

## 三维转动的四元数表述

刘俊峰

(复旦大学 光科学与工程系, 上海 200433)

**摘要:**用四元数表达三维的旋转与使用矩阵相比具有两个优点:第一,几何意义明确;第二,计算简单. 因此,四元数在数学、物理学和计算机图形学中具有很高的应用价值. 本文详细叙述了四元数的这一功能,讨论了四元数的定义、运算、性质、几何意义和它的 3 种表达形式,给出了使用四元数处理点的各种几何变换的一般结论.

**关键词:**四元数;矢量;旋转

**中图分类号:**O 411      **文献标识码:**A      **文章编号:**1000-0712(2004)04-0039-05

### 1 引言

二维平面上的旋转可以用复数来表达,三维空间中的旋转则可以用四元数来表达. 用四元数表达三维的旋转与使用矩阵相比具有两个优点:第一,几何意义明确;第二,计算简单. 此外,四元数代数还涵盖了矢量代数,实数、复数和矢量都可以看作是四元数的特例,可以在一个统一的体系中进行运算. 本文详细叙述了四元数的这一功能,讨论了四元数的定义、运算、性质、几何意义和它的 3 种表达形式.

### 2 四元数的源和流

1) 四元数的起源. 四元数起源于寻找复数的三维对应物. 复数可以表达一个二维矢量,当处理不共面的多个矢量时,需要用新的数来表达一个三维矢量. 1843 年哈密顿 (Hamilton) 发明了四元数,这是一种形如  $A = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$  的数,  $i, j, k$  满足  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ,  $ij = -ji = k$ ,  $jk = -kj = i$ ,  $ik = -ki = -j$ . 这一新数包含 4 个分量,并且不满足乘法的交换律. 哈密顿给出了四元数的加法、乘法规则以及四元数的逆和模,指出四元数能通过旋转、伸长或缩短将一个给定的矢量变成另一个矢量. 同年,格拉斯曼 (Grassmann) 定义了形如  $q = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$  的超复数,并研究了它的  $n$  维情形. 他定义了超复数的内积和外积,并给出几何意义,但在乘积中二阶单元  $e_i e_j$  (一阶单元的乘积) 未

被简化成一阶单元. 结合后来的著述中可以看出他的研究思路还是线性代数,线性代数中的许多基本概念就是他提出的. 在 1855 年的 1 篇文章中他定义了 16 种不同类型的乘积,给出了这些乘积的几何意义,并应用于力学、磁学、晶体学.

2) 四元数的发展. 麦克斯韦 (Maxwell) 将四元数的数量部分和矢量部分分开,作为实体处理,作了大量的矢量分析. 三维矢量分析的建立,及同四元数的正式分裂是 18 世纪 80 年代由 Gibbs 和 Heaviside 独立完成的. 矢量代数被推广到矢量函数和矢量微积分. 由此开始了四元数和矢量分析的争论,最终矢量分析占了上风. 从纯粹代数的观点看,四元数是令人兴奋的,因为它提供了一个除了乘法的交换律外,具有实数和复数性质的例子. 后来许多超复数系统被大量地创造出来,例如, Galey 给出了八元数,  $x = x_0 + x_1 e_1 + \dots + x_7 e_7$ ,  $e_i^2 = -1$ ,  $e_i e_j = -e_j e_i$  ( $i \neq j$ ),  $e_1 e_2 = e_3$ ,  $e_1 e_4 = e_5$ ,  $e_1 e_6 = e_7$ ,  $e_2 e_5 = e_7$ ,  $e_2 e_4 = -e_6$ ,  $e_3 e_4 = e_7$ ,  $e_3 e_5 = e_6$ , 这种八元数的乘法结合律不是一般地成立,但仍是可除的 (已由他人证明). Hamilton 在《四元数讲义》中还引进了拟四元数,即带有复系数的四元数,指出此时乘积定律不成立,即两个非零的拟四元数相乘可以得零. Clifford 创立了另一类超复数,  $\tilde{e}^2 = 1$ ,  $\tilde{e}$  与每个实四元数交换,  $q + \tilde{e}Q$  满足乘积定律,但不是可结合的,其中  $q$  和  $Q$  是实四元数. 后来 Clifford 引进了以他的名字命名的代数:  $1, e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  满足  $e_i^2 = -1$ ,  $e_i e_j = -e_j e_i$  ( $i \neq j$ ), 两个或多个单元的乘积



$$\begin{aligned}
 & a_0 \beta + b_0 \alpha - \alpha \cdot \beta + \alpha \times \beta \\
 (AB)^* &= a_0 b_0 - \alpha \cdot \beta - a_0 \beta - b_0 \alpha - \alpha \times \beta \\
 B^* A^* &= (b_0 - \beta)(a_0 - \alpha) = a_0 b_0 - \\
 & a_0 \beta - b_0 \alpha + \beta \alpha = a_0 b_0 - \\
 & a_0 \beta - b_0 \alpha - \beta \cdot \alpha + \beta \times \alpha
 \end{aligned}$$

所以  $(AB)^* = B^* A^*$  (7)

定义四元数  $A = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$  的范数和模分别为:

$$\|A\| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (8)$$

$$|A| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (9)$$

由式(4)可将矢量点乘和叉乘表示为直乘的组合:

$$\alpha \cdot \beta = -\frac{1}{2}(\alpha\beta + \beta\alpha) \quad (10)$$

$$\alpha \times \beta = \frac{1}{2}(\alpha\beta - \beta\alpha) \quad (11)$$

因此有结论:

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta + \beta\alpha = 0$$

$$\alpha // \beta \Leftrightarrow \alpha \times \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta - \beta\alpha = 0$$

可见仅当两个矢量平行或垂直时,它们的乘积才是对易或反对易的,而在一般情况下是不对易的. 因为乘积不对易,所以对乘法的逆运算使用逆的概念,它同分别定义左除与右除是等价的. 因为

$$\alpha^* \alpha = -(-\alpha) \cdot \alpha = \alpha \cdot \alpha = \|\alpha\|^2 \quad (12)$$

所以由  $\alpha^{-1} \alpha = 1$  定义非零矢量的逆为

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\|\alpha\|^2} \alpha^* \quad (13)$$

这样  $\alpha\beta = \gamma$  相当于  $\beta = \alpha^{-1} \gamma$  或  $\alpha = \gamma\beta^{-1}$ .

再看看 3 个矢量的相乘会出现什么结果:

$$\begin{aligned}
 \alpha\beta\gamma &= -\alpha \cdot \beta\gamma + (\alpha \times \beta) \gamma = -\alpha \cdot \beta\gamma - \\
 & (\alpha \times \beta) \cdot \gamma + (\alpha \times \beta) \times \gamma
 \end{aligned}$$

$$\text{故有: } (\alpha \times \beta) \cdot \gamma = -\frac{1}{2}(\alpha\beta\gamma - \gamma\beta\alpha) \quad (14)$$

$$(\alpha \times \beta) \times \gamma = \frac{1}{2}(\alpha\beta\gamma - \gamma\alpha\beta) \quad (15)$$

所以以矢量  $\alpha, \beta, \gamma$  为棱的平行六面体的体积为

$$V = |(\alpha \times \beta) \cdot \gamma| = \frac{1}{2} |\alpha\beta\gamma - \gamma\beta\alpha| \quad (16)$$

可见,四元数能完全满足矢量运算的要求,而且更灵活. 以前对矢量操作的方法现在仍然适用.

点 A 平移到点 B, 可以表示为  $B = A + d$ , 其中矢量  $d$  表示平移的方向和距离; 点 A 关于原点的反演点 B 为  $B = -A$ .

如图 1 所示, 设 A 点有一光源使 B 点投影到平面上的 C 点, 平面由一点 P 和法向单位矢量  $e_n$  确

定, 以 A、B、C 等表示各点到原点的矢量, A、B、C 共线, 该直线的单位矢量

为  $e_l$ , 有  $e_l = \frac{B-A}{|B-A|}$ ,

$C = B + e_l t$ , 其中 t 为直线参数方程的参数; 又 C

在平面上, 有  $e_n \cdot (C - P) = 0 \Rightarrow e_n \cdot (B - P + e_l t) = 0$

$$\Rightarrow t = \frac{e_n \cdot (P - B)}{e_n \cdot e_l}, \text{ 故 } C = B + \frac{e_n \cdot (P - B)}{e_n \cdot e_l} e_l.$$

考虑一个完整的四元数  $A = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 = a_0 + \alpha$ , 有

$$\begin{aligned}
 A^* A &= (a_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 - a_3 i_3)(a_0 + a_1 i_1 + \\
 & a_2 i_2 + a_3 i_3) = (a_0 - \alpha)(a_0 + \alpha) = \\
 & a_0^2 - \alpha\alpha = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |A|^2
 \end{aligned}$$

所以由  $A^{-1} A = 1$  可定义非零四元数 A 的逆为

$$A^{-1} = \frac{1}{\|A\|^2} A^* \quad (17)$$

由于实数、复数、矢量都可以看作是四元数的特例, 故求逆的运算对它们都是适用的. 因为

$$A A^* = (a_0 + \alpha)(a_0 - \alpha) = a_0^2 - \alpha\alpha = A^* A$$

所以

$$A^{-1} A = A A^{-1} = 1 \quad (18)$$

根据  $(AB)^* = B^* A^*$  可以推出

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \quad (19)$$

定义  $A^m = A A \cdots A$  (m 个 A 相乘), 则有

$$A^{-m} = (A^{-1})^m = (A^m)^{-1} \quad (20)$$

### 5 四元数的几何意义和三角表达式

考虑矢量的转动. 设矢量  $\alpha$  旋转  $\theta$  角变成矢量  $\beta$ ,  $|\alpha| = |\beta| = r$ ; 设垂直于  $\alpha, \beta$  所在平面的转轴方向单位矢量为  $e_n$ , 转动方向与转轴方向遵循右手定则. 因为

$$\alpha \cdot \beta = r^2 \cos \theta$$

$$\alpha \times \beta = e_n r^2 \sin \theta$$

$$\text{故 } \beta\alpha = -\beta \cdot \alpha + \beta \times \alpha = -\alpha \cdot \beta - \alpha \times \beta = -r^2 \cos \theta - e_n r^2 \sin \theta$$

$$\beta = (-r^2 \cos \theta - e_n r^2 \sin \theta) \alpha^{-1} = \frac{1}{r^2} (-r^2 \cos \theta -$$

$$e_n r^2 \sin \theta)(-\alpha) = (\cos \theta + e_n \sin \theta) \alpha$$

$$\text{即 } \beta = (\cos \theta + e_n \sin \theta) \alpha \quad (21)$$

由此可看出形如  $\cos \theta + e_n \sin \theta$  的一个四元数表示一个旋转: 以  $e_n$  为转轴, 使垂直于转轴的平面内的

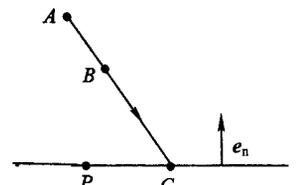


图 1

一个矢量按右手螺旋方向转过  $\theta$  角. 当  $\alpha$  反向旋转时, 定义角度为负值, 把  $-\theta$  代入式  $\cos \theta + e_n \sin \theta$  中得到  $\cos \theta + (-e_n) \sin \theta$ , 相当于转轴反向, 这也是与实际相符合的. 而且这两种旋转互逆, 相继实施这两个旋转相当于没转, 这与  $\cos \theta + e_n \sin \theta$  和  $\cos \theta - e_n \sin \theta$  的乘积为 1 相符. 利用式(21), 就可以方便地实施沿任意方向的一个旋转, 把表示旋转的四元数左乘到与  $e_n$  垂直的矢量上即可.

因  $\cos \theta + e_n \sin \theta$  表示一个旋转, 故  $\Delta\theta \rightarrow 0$  的无限小转动为  $1 + e_n \Delta\theta$ , 所以

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \frac{(1 + e_n d\theta)\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}}{dt} = e_n \omega \boldsymbol{R} = \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{R} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}$$

这就是线速度与角速度的关系.

对  $A = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$  可以作以下变形:

记  $\boldsymbol{\alpha} = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$ ,  $\rho = |\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ , 则  $\boldsymbol{\alpha} = \rho e_n$ ,  $e_n$  为  $\boldsymbol{\alpha}$  的单位矢量, 也即由  $\boldsymbol{\alpha}$  的方向余弦组成的矢量.

$$r = |A| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{a_0^2 + \rho^2}$$

$$\cos \theta = \frac{a_0}{r}, \quad \sin \theta = \frac{\rho}{r}$$

有  $A = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 =$

$$a_0 + \boldsymbol{\alpha} = r(\cos \theta + e_n \sin \theta) \quad (22)$$

可见, 任意的一个四元数也表示一个旋转, 它使矢量旋转的同时还使矢量的大小变为原来的  $r$  倍, 这就是四元数的几何意义. 式(22)也称作四元数的三角式, 还可以类比于复数的指数式把式(22)写成

$$A = r e_n^\theta \quad (23)$$

因为  $e_n$  为一单位矢量, 故根据四元数幂的定义及式(20)有:

$$e_n^2 = e_n e_n = -e_n \cdot e_n = -1, e_n^{4k} = 1,$$

$$e_n^{4k+1} = e_n, e_n^{4k+2} = -1, e_n^{4k+3} = -e_n, (k \text{ 为整数})$$

所以  $e_n$  类似于虚数  $i$ . 把式(23)作幂级数展开, 就可以证明该式成立. 但是若利用指数式作乘法:

$$A_1 A_2 = r_1 e_n^{\theta_1} r_2 e_n^{\theta_2} = r_1 r_2 e_n^{\theta_1 + \theta_2} = r_1 r_2 e_n^{\theta_3} \quad (24)$$

仅当  $e_{n1} \parallel e_{n2}$  时成立, 即绕同一个转轴旋转时有:

$$(\cos \theta_1 + e_n \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + e_n \sin \theta_2) = e_n^{\theta_1} e_n^{\theta_2} = e_n^{(\theta_1 + \theta_2)} \quad (25)$$

$$(\cos \theta + e_n \sin \theta)^m = e_n^{m\theta} \quad (26)$$

$e_n$  为转轴的单位矢量,  $m$  为整数. 在一般情况下, 因为  $e_{n1}$  与  $e_{n2}$  不对易, 用幂级数展开不能证明式(24)成立.

## 6 矢量旋转的四元数表述

矢量  $\boldsymbol{\alpha}$  可以分解为平行于  $e_n$  的分量和垂直于  $e_n$  的分量, 即:  $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_{\parallel} + \boldsymbol{\alpha}_{\perp}$ .

$$\boldsymbol{\alpha}_{\parallel} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot e_n) e_n = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha} e_n + e_n \boldsymbol{\alpha}) e_n =$$

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha} - e_n \boldsymbol{\alpha} e_n) \quad (\text{因 } e_n e_n = e_n^2 = -1) \quad (27)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{\perp} = e_n \times (\boldsymbol{\alpha} \times e_n) = \frac{1}{2} e_n \times (\boldsymbol{\alpha} e_n - e_n \boldsymbol{\alpha}) =$$

$$\frac{1}{4}[e_n(\boldsymbol{\alpha} e_n - e_n \boldsymbol{\alpha}) - (\boldsymbol{\alpha} e_n - e_n \boldsymbol{\alpha}) e_n] =$$

$$\frac{1}{4}(e_n \boldsymbol{\alpha} e_n + \boldsymbol{\alpha} + e_n \boldsymbol{\alpha} e_n) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha} + e_n \boldsymbol{\alpha} e_n) \quad (28)$$

由式(27)、(28)可知,  $-e_n \boldsymbol{\alpha} e_n = 2\boldsymbol{\alpha}_{\parallel} - \boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha}_{\parallel} - (\boldsymbol{\alpha}_{\parallel} + \boldsymbol{\alpha}_{\perp}) = \boldsymbol{\alpha}_{\parallel} - \boldsymbol{\alpha}_{\perp}$ , 这表示  $-e_n \boldsymbol{\alpha} e_n$  是  $\boldsymbol{\alpha}$  平行于  $e_n$  的分量和垂直于  $e_n$  的分量反向后的合成, 即  $-e_n \boldsymbol{\alpha} e_n$  是  $\boldsymbol{\alpha}$  在以  $e_n$  为法向的镜面反射后形成的矢量, 或者说  $-e_n \boldsymbol{\alpha} e_n$  与  $\boldsymbol{\alpha}$  关于  $e_n$  轴对称. 而  $e_n \boldsymbol{\alpha} e_n = \boldsymbol{\alpha}_{\perp} - \boldsymbol{\alpha}_{\parallel}$  是以  $e_n$  所在平面为反射面, 以  $\boldsymbol{\alpha}$  和  $e_n$  形成的平面为法平面的反射.

矢量  $\boldsymbol{\alpha}$  与转轴  $e_n$  不垂直时,  $\boldsymbol{\alpha}$  绕  $e_n$  旋转  $\theta$  角变成矢量  $\boldsymbol{\beta}$ , 可认为是  $\boldsymbol{\alpha}$  的垂直于  $e_n$  的分量  $\boldsymbol{\alpha}_{\perp}$  绕  $e_n$  旋转  $\theta$  角, 然后再与  $\boldsymbol{\alpha}$  的平行于  $e_n$  的分量  $\boldsymbol{\alpha}_{\parallel}$  合成为  $\boldsymbol{\beta}$ . 即

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_{\parallel} + (\cos \theta + e_n \sin \theta) \boldsymbol{\alpha}_{\perp} = \frac{1}{2}[(\boldsymbol{\alpha} - e_n \boldsymbol{\alpha} e_n) + \cos \theta(\boldsymbol{\alpha} + e_n \boldsymbol{\alpha} e_n) + e_n \sin \theta(\boldsymbol{\alpha} + e_n \boldsymbol{\alpha} e_n)] = \frac{1}{2}[(1 + \cos \theta)\boldsymbol{\alpha} + \sin \theta e_n \boldsymbol{\alpha} - \sin \theta \boldsymbol{\alpha} e_n + (\cos \theta - 1)e_n \boldsymbol{\alpha} e_n]$$

可见, 此时需要对矢量同时左乘和右乘一个四元数, 设  $\boldsymbol{\beta} = u_1 \boldsymbol{\alpha} u_2$ ,  $u_1 = x + e_n y$ ,  $u_2 = s + e_n t$ , 则  $(x + e_n y) \boldsymbol{\alpha} (s + e_n t) = xs \boldsymbol{\alpha} + xt \boldsymbol{\alpha} e_n + ys e_n \boldsymbol{\alpha} + yt e_n \boldsymbol{\alpha} e_n$ , 比较系数可得:

$$\begin{cases} xs = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \\ xt = -\frac{1}{2} \sin \theta \\ ys = \frac{1}{2} \sin \theta \\ yt = \frac{1}{2}(\cos \theta - 1) \end{cases}$$

解此方程得到它的一组解为:

$$\begin{cases} x = \cos \frac{\theta}{2} \\ y = \sin \frac{\theta}{2} \\ s = \cos \frac{\theta}{2} \\ t = -\sin \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

记  $u = \cos \frac{\theta}{2} + e_n \sin \frac{\theta}{2}$

$$u^{-1} = u^* = \cos \frac{\theta}{2} - e_n \sin \frac{\theta}{2}$$

则  $\beta = u\alpha u^{-1}$  (29)

表示  $\alpha$  绕  $e_n$  旋转  $\theta$  角得到  $\beta$ .  $u = \cos \frac{\theta}{2} + e_n \sin \frac{\theta}{2}$

表示以方向  $e_n$  为转轴旋转  $\theta$  角的操作. 相继两次旋转的合成就是这两个旋转相乘. 所以三维转动群中的任一元素可以用四元数来表示, 而且群元素间的运算要比使用矩阵表示简便的多.

下面用四元数表示来解决一个实际的问题.

一个圆柱体, 轴线方向  $\alpha$  与  $z$  轴重合,  $\alpha$  绕  $y$  轴转动  $\theta$  角, 再绕  $z$  轴转动  $\varphi$  角, 最后向着  $z$  轴转动  $\theta$  角, 结果圆柱体回到了原来的位置, 但同时也绕  $z$  轴自转了一个角度, 现在的问题是这个角度有多大, 如何用数学的方法计算出来? 解决的思路是把总的效果看作是依次三个转动的合成, 根据合成的转动判断转过的角度. 这可以用四元数表示如下:

$$e^{n\frac{\theta}{2}} e^{i_3\frac{\varphi}{2}} e^{i_2\frac{\theta}{2}} \alpha e^{-i_2\frac{\theta}{2}} e^{-i_3\frac{\varphi}{2}} e^{-n\frac{\theta}{2}} = e^{m\frac{\phi}{2}} \alpha e^{-m\frac{\phi}{2}}$$

以  $i_1, i_2, i_3$  代表沿  $x, y, z$  轴的单位矢量,  $n$  是最后一次旋转时的轴矢量, 这里假设合成转动的轴矢量为  $m$ , 转过的角度为  $\phi$  角. 可以证明  $e^{n\frac{\theta}{2}} e^{i_3\frac{\varphi}{2}} e^{i_2\frac{\theta}{2}} = e^{i_3\frac{\phi}{2}}$ , 即绕  $z$  轴转动了  $\phi$  角, 其中  $n$  是  $(e^{i_3\frac{\varphi}{2}} e^{i_2\frac{\theta}{2}} i_3 e^{-i_2\frac{\theta}{2}} e^{-i_3\frac{\varphi}{2}}) \times i_3$  经单位化的矢量, 证明过程如下.

$$\begin{aligned} \text{证: } & (e^{i_3\frac{\varphi}{2}} e^{i_2\frac{\theta}{2}} i_3 e^{-i_2\frac{\theta}{2}} e^{-i_3\frac{\varphi}{2}}) \times i_3 = \\ & [e^{i_3\frac{\varphi}{2}} (i_3 \cos \theta + i_1 \sin \theta) e^{-i_3\frac{\varphi}{2}}] \times i_3 = \\ & [i_3 \cos \theta + i_1 e^{-i_3\frac{\varphi}{2}} e^{-i_3\frac{\varphi}{2}} \sin \theta] \times i_3 = \\ & [i_1 (\cos \varphi - i_3 \sin \varphi) \sin \theta] \times i_3 = \\ & (i_1 \cos \varphi + i_2 \sin \varphi) \times i_3 \sin \theta = \\ & (-i_2 \cos \varphi + i_1 \sin \varphi) \sin \theta \end{aligned}$$

所以  $n = i_1 \sin \varphi - i_2 \cos \varphi$

则

$$e^{n\frac{\theta}{2}} e^{i_3\frac{\varphi}{2}} e^{i_2\frac{\theta}{2}} = \left[ \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} (i_1 \sin \varphi - i_2 \cos \varphi) \right] \cdot$$

$$\begin{aligned} & \left[ \cos \frac{\varphi}{2} + i_3 \sin \frac{\varphi}{2} \right] \left[ \cos \frac{\theta}{2} + i_2 \sin \frac{\theta}{2} \right] = \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \\ & \left[ \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} (i_3 \sin \varphi + \cos \varphi) + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cdot \right. \\ & (i_2 + i_1 \sin \varphi - i_2 \cos \varphi) \left. \right] + i_3 \sin \frac{\varphi}{2} \left[ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \right. \\ & \left. \sin^2 \frac{\theta}{2} (i_3 \sin \varphi + \cos \varphi) + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} (i_2 - \right. \\ & \left. i_1 \sin \varphi + i_2 \cos \varphi) \right] = \cos \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\varphi}{2} \cos \varphi \cdot \\ & \sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin \varphi + i_3 \left[ \cos \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin \varphi + \right. \\ & \left. \sin \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \varphi \right] + i_2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cdot \\ & \left[ \cos \frac{\varphi}{2} (1 - \cos \varphi) - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right] + i_1 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cdot \\ & \left[ \cos \frac{\varphi}{2} \sin \varphi - \sin \frac{\varphi}{2} (1 + \cos \varphi) \right] = \cos \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \\ & \sin^2 \frac{\theta}{2} \left( \cos \varphi \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \varphi \sin \frac{\varphi}{2} \right) + i_3 \left[ \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \right. \\ & \left. \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \left( \cos \frac{\varphi}{2} \sin \varphi - \sin \frac{\varphi}{2} \cos \varphi \right) \right] + \\ & i_2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right] + \\ & i_1 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right] = \\ & \cos \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \left( \cos \varphi + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) + \\ & i_3 \left[ \sin \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \left( 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos \varphi \right) \right] = \\ & \cos \frac{\varphi}{2} + i_3 \sin \frac{\varphi}{2} = e^{i_3\frac{\phi}{2}} \end{aligned}$$

在上同的证明过程中, 化简过程用到的步骤不多, 虽然每一步的计算较多, 但都是非常初等的运算. 由这些例子可以看出四元数对几何关系的表达简洁明了, 并能应用到包括物理学在内的其他学科中.

参考文献:

- [1] 克莱因 M. 古今数学思想(第 3 册)[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1979.
- [2] 张光远. 近现代数学发展概论[M]. 重庆: 重庆出版社, 1991.
- [3] 伊夫斯 H. 数学史上的里程碑[M]. 北京: 北京科学技术出版社, 1990.
- [4] 李文林. 数学珍宝——历史文献精选[M]. 台北: 九章出版社, 2000.
- [5] 基斯德夫林. 数学: 新的黄金时代[M]. 上海: 上海教育出版社, 1998.
- [6] 胡作玄, 邓明立. 20 世纪数学思想[M]. 济南: 山东教育出版社, 1999. (下转 62 页)

## Improvement on the shape of light-beat in measurement of tiny displacement by double-grating using laser

HUANG Zhuang-xiong, PAN Yong-hua, SONG G Wei, ZHOU Jin

(Department of Physics, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

**Abstract** :By theoretical analysis and computer simulation, the "burr" phenomenon——irregular shape of light-beat signals in the experimental measurement of tiny displacement by double-grating using Laser is studied. An effective improvement of the experiment is put forward as well.

**Key words** :Doppler effect; tiny vibration; double-grating

(上接 43 页)

## Three dimensional rotation represented by quaternion

LIU Jun-feng

(Department of Optical Science and Engineering, Fudan University, Shanghai 200433, China)

**Abstract** :Three dimensional rotation represented by quaternion has two advantages over that by matrix: first, the geometric meaning is definitude; second, computation is easy. The application of quaternion to mathematics, physics and computer graphics is significant. The definition, operation, properties, geometric meaning of quaternion and its three expressions are discussed. It is also demonstrated how to use quaternion to transform points.

**Key words** :quaternion; vector; rotation

(上接 54 页)

### 3 总结

电磁学与电动力学教材打通的观点和方法是具有普遍意义的。从学科上看,这样可以对某几门学科组成的较大的领域有个整体的认识,从教学上看,这样也可以大大减少授课学时,进一步改进课程设置和教学方法,提高教学质量。本文虽然在其体系结构和内容上作了一些探讨,但是不够深入,还需要作进一步深化研究。

### 参考文献:

[1] 赵凯华,陈熙谋. 电磁学[M]. 北京:人民教育出版社,

1978.

[2] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 北京:人民教育出版社,1979.

[3] 刘之景. 经典电磁学与现代化内容相结合的教学探讨[J]. 大学物理,1998,17(9):35.

[4] 田洪睦等. 试析电磁学的教学结构体系[J]. 聊城师大学学报,1999,12(3):84.

[5] 李江林等. 电磁学知识结构体系与教学研究[J]. 国际物理教育通讯,1998(22):15.

[6] 陶力沛. 电磁学教学改革探讨[J]. 青岛大学学报,2001,14(2):108.

[7] 宋为基. 电磁学电动力学[M]. 苏州:苏州大学出版社,2000.

## The idea on combining electromagnetics and classical electrodynamics

JIANG Xuan, HUANG Xiao-qin

(Department of Physical Science and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

**Abstract** :The idea on combining electromagnetics and classical electrodynamics is proposed and discussed from three aspects, including feasibility, system frame and contents of teaching material.

**Key words** :electromagnetics; classical electrodynamics; system frame; unitive expatiation