

# 基于FFT的海浪实时仿真方法

侯学隆<sup>1</sup>, 黄启来<sup>2</sup>, 沈培志<sup>1</sup>

(1. 海军航空工程学院指挥系, 烟台 264001; 2. 海军航空工程学院训练部, 烟台 264001)

**摘要:** 针对虚拟海战场仿真需求, 提出一种真实感海浪的实时仿真方法。在改进 Gerstner 波形的基础上, 构建海浪的基本模型, 推导出海浪的离散 FFT 模型, 并通过采样波数谱提取 FFT 模型所需参数。仿真结果表明, 该方法用于大面积海浪的实时仿真时, 能获得高度逼真的动画效果。

**关键词:** 快速傅里叶变换算法; 波数谱; 海浪仿真

## Ocean Wave Real-time Simulation Method Based on FFT

HOU Xue-long<sup>1</sup>, HUANG Qi-lai<sup>2</sup>, SHEN Pei-zhi<sup>1</sup>

(1. Department of Comand, Institute of Naval Aeronautic Engineering, Yantai 264001;  
2. Department of Training, Institute of Naval Aeronautic Engineering, Yantai 264001)

**【Abstract】** Aiming at the requirements for virtual sea battlefield simulation, this paper proposes real-time simulation method for realistic ocean wave. It builds the basic ocean wave model and elicits discrete FFT algorithm model based on improved Gerstner wave. The parameters needed in ocean wave FFT model get by sampling wave vector spectrum. Simulation result shows when the method is used in real-time simulation of large scale ocean wave, it can achieve high realistic animation effect.

**【Key words】** Fast Fourier Transform(FFT) algorithm; wave number spectrum; ocean wave simulation

### 1 概述

海浪仿真是构建虚拟海战场的关键技术之一, 在海战模拟中具有重要作用。海浪仿真的逼真度来源于海浪的波形及运动的真实性、尖端的海水光学效应以及海浪与其他实体的交互效应的真实表达。对海浪的波形及运动建模是逼真模拟海浪的前提之一。目前, 海浪建模方法有 4 种<sup>[1]</sup>: 基于几何造型的建模方法, 基于动力模型的建模方法, 基于流体力学的建模方法与基于海浪谱的建模方法。其中, 海浪谱法<sup>[2]</sup>由于其物理概念清晰、算法易于实现而得到广泛应用, 其基本思想是从海浪波谱中提取一系列单元波的振幅、频率、传播方向等参数, 经线性叠加合成海浪。该方法确保了海浪数据来源的真实性, 避免了凭经验选取参数造成仿真效果不可控的现象, 只要叠加的单元波数量足够多, 就能模拟逼真的波浪细节, 但叠加大量单元波取得逼真度的同时却牺牲了实时性。本文通过构造海浪的快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT)模型有效解决逼真度与实时性之间的矛盾。

### 2 海浪几何造型

海浪仿真的基本模型来源于线性波理论, 它广泛用于海洋工程与计算机图形学中。根据傅里叶变换理论, 将海面看作由一系列不同振幅、频率和传播方向的余弦波叠加而成。因此, 对于水平面某点 $(x_0, y_0)$ 对应的瞬时波高由下式计算:

$$z = z_0 - \sum_{i=1}^n A_i \cos[k_i(x_0 \cos \theta_i + y_0 \sin \theta_i) - \omega_i t + \varphi_i] \quad (1)$$

其中,  $z_0$  为潮高(典型值为 0);  $n$  为单元波数量;  $A_i$  为振幅;  $\omega_i = 2\pi f_i$  为角频率,  $f_i$  为频率;  $k_i = 2\pi/\lambda_i$  为波数,  $\lambda_i$  是波长;  $\theta_i$  为波在  $xy$  水平面的传播方向;  $\varphi_i$  为初相角, 一般随机产生。由式(1)可知, 线性波描述的海浪呈三角函数形状, 波谷、波峰平滑对称, 适合描述相对平静的海面。

当风作用在海面时, 海浪开始成长, 陡度增加, 波峰变得陡峭而波谷相对平坦, 此时采用式(1)描述海面并不合适, 而 Gerstner 模型却能较好地描述该情况下的海浪形状。Gerstner 模型以单个水质点为研究对象, 认为每个水质点绕垂直平面某一固定点做圆周运动, 在数学上通常采用次摆线描述如下:

$$\begin{cases} x = x_0 + A \sin(kx_0 - \omega t + \varphi) \\ z = z_0 - A \cos(kx_0 - \omega t + \varphi) \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $x$  轴向右,  $z$  轴向上, 点 $(x_0, z_0)$ 为垂直平面的一个固定点;  $k$  为波数;  $\omega$  为角频率;  $A$  是振幅, 也是水质点做圆周运动轨迹的半径。根据  $K \times A$  的不同乘积值, 可获得不同陡峭程度的波浪, 如图 1 所示。其中,  $\omega=0$ ;  $\varphi=0$ 。

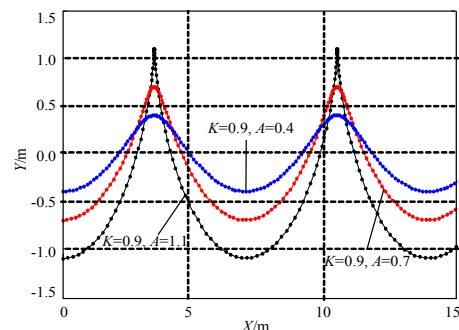


图 1 Gerstner 波形

**基金项目:** 国家部委基金资助项目

**作者简介:** 侯学隆(1979—), 男, 硕士、讲师, 主研方向: 分布式作战仿真, 虚拟战场环境; 黄启来, 副教授; 沈培志, 副教授

**收稿日期:** 2009-05-12 **E-mail:** hxltop@163.com

当  $K \times A > 1$  时, 将会发生波峰“交叠”现象, 为更好地控制波形, 引入波形控制因子  $\mu$ , 通过改变  $\mu$  值, 不仅可以调节波浪的陡峭程度, 还可避免“交叠”。据此, 式(2)可改写为

$$\begin{cases} x = x_0 + \mu A \sin(kx_0 - \omega t + \varphi) \\ z = z_0 - A \cos(kx_0 - \omega t + \varphi) \end{cases} \quad (3)$$

引入波形控制因子后的 Gerstner 波形如图 2 所示。其中,  $K=1.5$ ;  $A=1.2$ ;  $\omega=0$ ;  $\varphi=0$ 。

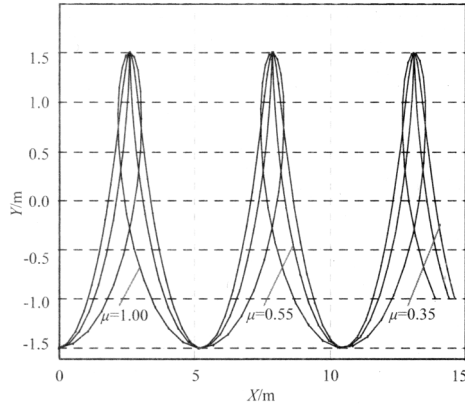


图 2 引入波形控制因子后的 Gerstner 波形

将多次摆线波叠加, 并将其扩展到二维表面, 改写成海浪的波数表达式为

$$\begin{cases} x(\bar{x}_0, t) = \bar{x}_0 + \mu \cdot \sum_{\vec{k}} \hat{k} A(\vec{k}) \sin(\vec{k} \cdot \bar{x}_0 + \omega(k)t + \varphi) \\ y(\bar{x}_0, t) = y_0 - \sum_{\vec{k}} A(\vec{k}) \cos(\vec{k} \cdot \bar{x}_0 + \omega(k)t + \varphi) \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $\bar{x}=(x, z)$  是以  $\bar{x}_0=(x_0, z_0)$  为基准点随时间变化的水平坐标;  $y_0$  为平均水面;  $\vec{k}=(k_x, k_z)$  为波数矢量, 其幅值为  $k=\|\vec{k}\|$ , 单位矢量  $\hat{k}=\vec{k}/k$ ,  $\varphi(\vec{k})$  为初始相位。

### 3 FFT 算法模型

对于式(4)有多种计算方法, 最简单的是直接叠加法, 但该方法计算效率低。FFT 算法是最有效的一种计算方式, 它能实时叠加大量单元波。对于  $N \times M (N=2^i, M=2^j, i, j$  为正整数) 的复数集  $F_{n,m}$ , 通过二维快速傅里叶逆变换可得复数集  $F_{p,q}$ :

$$F_{p,q} = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} F_{n,m} \exp(i2\pi(\frac{np}{N} + \frac{mq}{M})) \quad (5)$$

其中,  $p \in [-N/2, N/2-1]$ ;  $q \in [-M/2, M/2-1]$ 。为使用傅里叶快速算法, 将式(4)改写成复数形式得:

$$\begin{cases} x(\bar{x}_0, t) = \bar{x}_0 + \mu \cdot R \left( \sum_{\vec{k}} \hat{k} H(\vec{k}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \bar{x}_0) \right) \\ y(\bar{x}_0, t) = y_0 - R \left( \sum_{\vec{k}} H(\vec{k}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \bar{x}_0) \right) \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $R$  表示取复数的实部, 而  $H(\vec{k}, t)$  为

$$H(\vec{k}, t) = A(\vec{k}) \exp(i\varphi) \exp(i\omega(k)t) \quad (7)$$

$\bar{x}_0$  的取值, 在面积  $L_x \times L_z$  的水平面建立  $N \times M$  规则采样网格, 共计  $N \times M$  个采样点, 可得  $\bar{x}_0=(nL_x/N, mL_z/M)$ ,  $n \in [-N/2, N/2-1]$ ,  $m \in [-M/2, M/2-1]$ 。根据式(5)、式(6)及  $\bar{x}_0$  的表达式得:

$$\begin{cases} \frac{nL_x}{N} \cdot k_x = 2\pi \frac{np}{N} \\ \frac{mL_z}{M} \cdot k_z = 2\pi \frac{mq}{M} \end{cases} \quad (8)$$

解上述方程可得波数矢量  $\vec{k}$  的取值:

$$\vec{k} = (k_x, k_z) = (2\pi p / L_x, 2\pi q / L_z) \quad (9)$$

其中,  $p \in [-N/2, N/2-1]$ ;  $q \in [-M/2, M/2-1]$ 。根据  $\vec{k}$ ,  $\bar{x}_0$  的表达式, 式(6)变换为:

$$\begin{cases} x = x_0(p) + \mu \cdot R \left( \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} i \cdot U_{k_x} H(\vec{k}, t) \exp(i2\pi(\frac{np}{N} + \frac{mq}{M})) \right) \\ y = y_0 - R \left( \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} H(\vec{k}, t) \exp(i2\pi(\frac{np}{N} + \frac{mq}{M})) \right) \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $x_0(p) = pL_x/N$ ;  $z_0(q) = qL_z/M$ ;  $U_{k_x} = k_x / \|\vec{k}\|$ ;  $U_{k_z} = k_z / \|\vec{k}\|$ 。为了利用现有的 FFT 算法库(如 FFTW), 令

$$\begin{cases} x = x_0(p - N/2) + \mu \cdot (-1)^{(p+q)} \cdot R \left( \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} i \cdot (-1)^{(n+m)} U_{k_x} H(\vec{k}, t) \exp(i2\pi(\frac{np}{N} + \frac{mq}{M})) \right) \\ y = y_0 - (-1)^{(p+q)} \cdot R \left( \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^{(n+m)} H(\vec{k}, t) \exp(i2\pi(\frac{np}{N} + \frac{mq}{M})) \right) \\ z = z_0(q - M/2) + \mu \cdot (-1)^{(p+q)} \cdot R \left( \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} i \cdot (-1)^{(n+m)} U_{k_z} H(\vec{k}, t) \exp(i2\pi(\frac{np}{N} + \frac{mq}{M})) \right) \end{cases} \quad (11)$$

$n, p \in [0, N-1]$ ,  $m, q \in [0, M-1]$ , 式(10)变换如下:

其中,  $\vec{k} = (k_x, k_z) = 2\pi(p - N/2)/L_x, 2\pi(q - M/2)/L_z$ 。对于式(11), 只要知道  $H(\vec{k}, t)$ , 便可使用 FFT 算法一次性求出各采样点的高度值  $y$  和修正后的水平坐标  $x, z$ 。

### 4 波数谱采样

由式(7)可知,  $H(\vec{k}, t)$  由振幅  $A(\vec{k})$ 、初相位  $\exp(i\varphi)$  及相位  $\exp(i\omega(k)t)$  3 个部分构成。对于振幅  $A(\vec{k})$ , 一种简单的方法是在一个区间内随机产生。但随机产生会使仿真海浪的能量分布与真实海区的观测统计有较大差距, 并且仿真效果不能调节。获取  $A(\vec{k})$  最好的方法是从海浪波数谱中提取, 文献[3]提出一种方法: 对 Phillips 波谱采样, 将波谱值的平方根直接作为振幅值。当采样数或风速值变化时, 该方法容易产生波高突变, 仿真效果难以控制。本文根据波谱理论采用积分法求取振幅, 进而推广到对任意波谱的采样。给定波数谱  $E_{\vec{k}}(\vec{k})$ , 对于每一个采样区间有(当  $\Delta k_x, \Delta k_z$  足够小时, 可近似计算):

$$\begin{cases} A(\vec{k}) = \sqrt{2 \int_{\Delta k_x} \int_{\Delta k_z} E_{\vec{k}}(\vec{k}) dk_x dk_z} \approx \sqrt{2 E_{\vec{k}}(\vec{k}) \Delta k_x \Delta k_z} \\ \Delta k_x = 2\pi / L_x, \Delta k_z = 2\pi / L_z \end{cases} \quad (12)$$

波数谱通常可由方向谱转化而来, 给定方向谱  $E_{\omega, \theta}(\omega, \theta)$ , 为保证转化过程能量保持一致可按式(14):

$$\begin{cases} E_{\vec{k}}(\vec{k}) = E_{\omega, \theta}(\omega_{\vec{k}}, \theta_{\vec{k}}) \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{g}{k}} \\ \omega_{\vec{k}} = \sqrt{gk}, \cos(\theta_{\vec{k}}) = k_x / \|\vec{k}\| \end{cases} \quad (13)$$

方向谱的表达式通常由频谱和方向扩展函数组合而成, 即  $E_{\omega, \theta}(\omega, \theta) = E_{\omega}(\omega) \cdot D(\omega, \theta)$  (14)

其中,  $E_{\omega}(\omega)$  为频谱;  $D(\omega, \theta)$  为方向扩展函数,  $\theta$  为单元波的传播方向。目前, 有大量的频谱(Bretschneider 谱、Phillips 谱、P-M 谱、JONSWAP 谱、Kruseman 谱、Toba 谱、文圣常谱等)和方向扩展函数(国际船模试验池会议(ITTC), ISSC, SWOP, Mitsuyasu 等)可用。不失一般性, 选择 P-M 频谱及 ITTC 方向扩展函数构造方向谱。P-M 谱描述了无限风区风吹过数小时后充分成长的海浪, 其谱式为<sup>[5]</sup>

$$S_{PM}(\omega) = \frac{\alpha g^2}{\omega^5} \exp \left[ -\frac{5}{4} \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^4 \right] \quad (15)$$

其中,  $\alpha=0.0081$  为 Phillips 常量;  $\omega_p=0.855 g/U_{10}$  为峰值频率,  $U_{10}$  为海平面 10 m 处风速, 其单位为 m/s。ITTC 建议的方向

扩展函数:

$$D_{ITTC}(\omega, \theta) = \frac{2}{\pi} \cos^2(\theta - \theta_w), |\theta - \theta_w| \leq \pi/2 \quad (16)$$

其中,  $\theta_w$  为海浪的主方向, 一般取平均风向。根据式(13), 将上述方向谱转化成波数谱可得:

$$E_{PM-ITTC}(\vec{k}) = \frac{\alpha}{\pi k^6 U_{10}^2} \exp\left(-\frac{0.688g^2}{k^2 U_{10}^4}\right) |\vec{k} \cdot \vec{U}_{10}|^2, \vec{k} \cdot \vec{U}_{10} \geq 0 \quad (17)$$

其中,  $k = \|\vec{k}\|$ ;  $U_{10} = \|\vec{U}_{10}\|$ 。

$E_{PM-ITTC}$  波数谱图如图 3 所示。

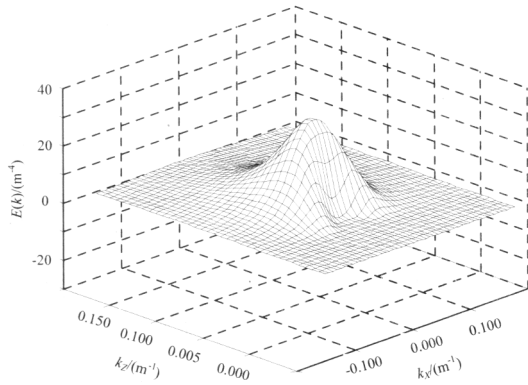


图 3  $E_{PM-ITTC}$  波数谱图

其中,  $k_x$  为波数矢量在  $x$  轴的分量;  $k_z$  为波数矢量为  $z$  轴的分量;  $E(k)$  为以波数计算的波谱能量。

大量海洋观测统计表明, 对于开阔海区充分成长的海洋表面高度近似服从正态分布, 而其幅值服从瑞利分布。据此, 采用 2 个独立的标准正态分布(均值为 0、均方差为 1)随机数  $\lambda_r, \lambda_i$ , 分别代替  $\exp(i\varphi)$  的实部和虚部, 可证明  $\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}$  服从瑞利分布, 且均方差为  $\sqrt{2}$ , 为保证振幅的均方差也为 1,  $\lambda_r, \lambda_i$  各缩小  $\sqrt{2}$  倍, 式(7)变换为

$$H(\vec{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_r + i\lambda_i) A(\vec{k}) \exp(i\omega(k)t) \quad (18)$$

根据线性波理论, 对于深水浪有:

$$\exp(i\omega(k)t) = \cos(\sqrt{gk} \cdot t) + i \sin(\sqrt{gk} \cdot t) \quad (19)$$

由此可知, 只要知道各采样点的  $\vec{k}$  值及相应波数谱, 就可求出相应的振幅, 同时输入不断变化的时间值, 经 FFT 变换后可产生海浪动画。

## 5 仿真验证

由式(11)可知, 每帧动画的生成需要计算  $H(\vec{k}, t)$  1 次, FFT 运算 3 次, 再加上 1 次法线计算, 仿真验证表明海浪的实时仿真采样数不超过  $128 \times 128$ 。经 FFT 变换后的高度场具有平铺特性如图 4 所示, 它能够绘制大面积海浪。

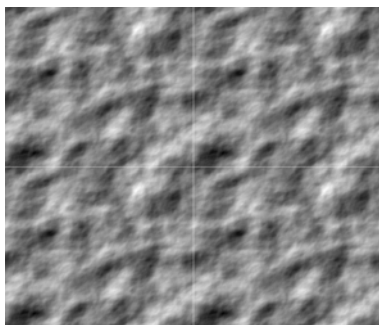
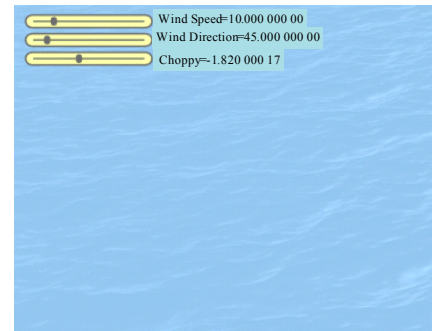


图 4 可拼接的高度图(由  $512 \times 512$  采样平铺)

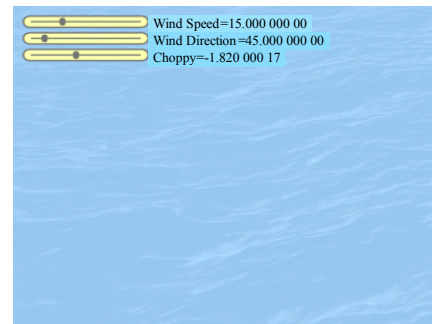
在 Intel 双核 CPU 3.0 GHz、内存 1 GB、GPU 为 NVIDIA GeForce 8800 GTX、显存 512 MB 的 PC 机上, 采用 FFTW 库, 横向和纵向各平铺  $128 \text{ m} \times 128 \text{ m}$  高度场(网格间距 2 m)4 次, 渲染结果如 表 1 所示, 不同风速下的海浪效果如图 5 所示(均为同一相机下的截图)。

表 1 仿真结果

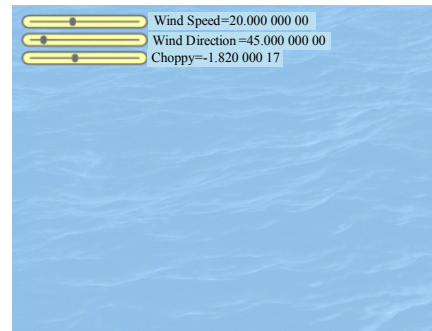
算法	采样数 ( $M \times N$ )	$L_x \times L_z / \text{m}^2$	顶点数	帧速率 ( $\text{f} \cdot \text{s}^{-1}$ )
FFT 算法	$128 \times 128$	$(4 \times 256) \times (4 \times 256)$	$2^{18}$	25.8
直接叠加法	$128 \times 128$	$1024 \times 1024$	$2^{18}$	0.08



(a)  $U_{10} = 10 \text{ m/s}, \theta_w = 45^\circ, \mu = -1.82$



(b)  $U_{10} = 15 \text{ m/s}, \theta_w = 45^\circ, \mu = -1.82$



(c)  $U_{10} = 20 \text{ m/s}, \theta_w = 45^\circ, \mu = -1.82$

图 5 海浪仿真效果( $1024 \text{ m} \times 1024 \text{ m}$ )

由以上分析可知, 采用直接叠加法在普通 PC 机上叠加  $128 \times 128$  个单元波生成一帧图像需要数秒时间, 难以实现实时仿真。采用 FFT 算法可获得 24 f/s 以上的帧速率, 并能取得高度逼真的动画效果。可见, 使用 FFT 算法合成海浪可同时兼得逼真度与实时性。

## 6 结束语

FFT 算法合成海浪是海浪仿真领域最为有效的方法之一。与文献[3]的海浪模拟算法相比, 本文方法具有以下特点: (1)适应性好, 适用于任何海浪谱, 只要知道海浪频谱和方向扩展函数就可构造相应的方向谱, 从而获得对应的波数谱;

(下转第 261 页)

弱节点也可以要求多个强节点服务。

## 5 实例分析

为了测试 P2P 网络对多媒体直播服务的支持能力以及 P2P 流媒体直播系统能否在业务功能上满足用户需求,以直播业务为实例,实现一个基于 P2P 流媒体直播系统的原型,并分析其性能。

测试系统包括一台直播服务器,千兆交换机和若干用户计算机。使用 Java 作为系统的开发语言,软件开发环境是 JDK 1.5。启动程序 Peer 通过验证后自动加入默认对等组 NetPeerGroup,在主界面中用户可以获取频道播放相应媒体节目和查看节点当前的信息。运行结果展示了系统实现功能,包括对等组加入、EPG 获取、Peer 状态查询、媒体数据传输和播放,达到了直播业务的功能需求。

对性能的测试集中在 2 个方面:启动延迟和对流量的监测。播放启动延迟数据如表 1 所示。

系统名称	加入节点									
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
原型	10	12	9	12	10	11	13	12	9	10
传统	10	11	10	12	10	11	15	11	12	13
PPLive	25	23	20	30	28	28	24	26	21	33

结果表明,原型的节点启动延迟与传统方式类似,较 PPLive 的启动延迟小,原型的启动延迟在用户可以接受的范围内。节点流量数据结果如图 5 所示。

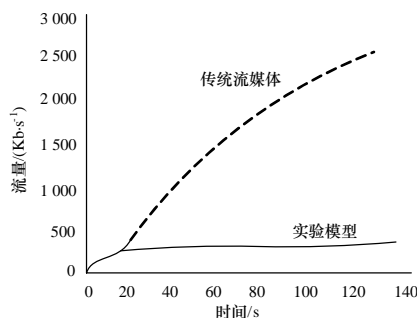


图 5 节点流量数据结果

由图 5 可知,传统的流媒体数据流量与接入节点数呈正比,而原型的流媒体分发数据在节点达到一定数量后服务器

流量几乎不变。实验结果表明,本文研究的结构是可行的,达到直播业务的功能要求。

## 6 结束语

本文在分析了流媒体直播业务功能和 P2P 流媒体传输模型后,提出基于 P2P 流媒体分发技术的直播系统,并详细描述了各模块功能及工作流程。边缘服务器是整个流媒体分发的核心,在系统中是直接与客户端交互的成员,它区别于传统不可管理 P2P 流媒体最大的特点是:它在提供流服务之前要对用户身份进行审核。

通过实例测试,该系统在播放启动延时、流量管理方面具有明显优势,它可以作为基于 P2P 流媒体直播系统的参考模型。

### 参考文献

- [1] Bawa M, Deshpande H, Garcia-Molina H. Transience of Peers & Streaming Media[J]. ACM SIGCOMM Computer Communication Review, 2003, 33(1): 107-112.
- [2] Chu Y, Rao S G, Seshan S, et al. A Case for End System Multicast[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communication, 2002, 20(8): 1456-1471.
- [3] Padmanabhan V N, Wang H J, Chou P A, et al. Distributing Streamingmedia Content Using Cooperative Networking[C]//Proc. of the 12th International Workshop on Network and Operating Systems Support for Digital Audio and Video. Miami, Florida, USA: ACM Press, 2002: 177-186.
- [4] Hefeeda M, Habib A, Botev B, et al. PROMISE: A Peer-to-Peer Media Streaming Using Collect Cast[R]. West Lafayette, USA: Purdue University, Tech. Rep.: CS-TR03-016, 2003.
- [5] Zhang Xinyan, Liu Jiangchuan, Li Bo, et al. CoolStreaming/DONet: A Data-driven Overlay Network for Peer-to-Peer Live Media Streaming[C]//Proc. of the 24th Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies. Miami, Florida, USA: IEEE INFOCOM'05, 2005: 2102-2111.

编辑 陆燕菲

(上接第 258 页)

(2)效果调节方便,采用积分方法对波数谱采样求取单元波振幅,调节风速、采样数不会造成波高的突变;(3)参数设置简单,只须设置风速、风向和波形控制因子,便可模拟不同海况、方向和陡峭程度的海浪。

下一步的研究工作包括尖端海水光学效应仿真及多波谱采样消除平铺带来的视觉重复感,进一步提高模拟的逼真度,并在此基础上开展非线性波浪的模拟。

### 参考文献

- [1] 刘 洁. 基于海浪谱的海浪模拟算法研究与系统实现[D]. 长沙:湖南大学, 2005.

编辑 陆燕菲

- [2] 杨怀平, 孙家广. 基于海浪谱的波浪模拟[J]. 系统仿真学报, 2002, 4(9): 1175-1178.
- [3] Tessendorf J. Simulating Ocean Water[C]//Proc. of SIGGRAPH'99. Los Angeles, USA: ACM Press, 1999.
- [4] Frechot J. Realistic Simulation of Ocean Surface Using Wave Spectra[Z]. (2006-11-07). <http://www.labri.fr/publications/is/2006/Fre06/>
- [5] Pierson W J, Moskowitz L. A Proposed Spectral form for Fully Developed Wind Seas[J]. Journal of Geophysical Research, 1964, (69): 5181-5203.