系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
5 (3) (1983), 216—222

液浮陀螺仪浮筒表面瞬态温度的确定

喻文焕　　胡顺菊
(南开大学计算机与系统科学系，天津)

遵照关肇直先生生前的建议，本文作者之一在文献[1]中，将液浮陀螺仪浮筒表面稳态温度估计问题，转化成一个函数空间中的优化问题，然后利用 Тихонов 正则化方法，给出了这个问题的近似解法.

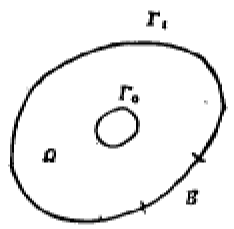
后来我们在[2]中，对于浮筒表面稳态温度的确定，给出了问题的精确解法，并且证明了在适当的条件下，该问题在 Hadarmard 意义下是适定的，即可以依据在壳体某部分上测得液体温度的值，唯一地确定出浮筒稳态温度的最佳估值，且这个最佳估值连续地依赖于量测值.

在基本上是放宽了对求解集合的限制，我们在[3]中证明了：能够依据壳体上的测量值，唯一地确定浮筒表面的稳态温度，但是没有证明所求的最佳参数连续依赖于量测值.

本文试图利用函数空间优化的思想，确定浮筒表面的瞬态温度．问题被转化成反求一个发展方程的边界条件．我们证明了：若将未知的边界温度作为参数，则这个参数是能辨识的；并且反求边界条件的问题是适定的．还给出了优化公式系，根据这个公式系，借助于梯度法之类的寻优方法，便能求出最佳参数.

I. 问题的提法

在液浮陀螺仪中，封装有内常平架的浮筒是悬浮在液体当中．为了精确地调节浮筒的温度达到稳态值，必须依据某种方式估计出浮筒表面温度的瞬态值.



假定浮筒表面是 Γ_0，陀螺仪的壳体是 Γ_1．充满液体的空间部分是 Ω(如图).

假定在 $Q \triangleq \Omega \times (0, t_1)$ 上定义的温度场是 $T(x, t)$，使用标准的数学物理方法，可以确定 $T(x, t)$ 是下述问题的解：

$$AT \triangleq \frac{\partial T}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[k_{ij}(x)\frac{\partial T}{\partial x_j}\right] = f(x, t), (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$T|_{t=0} = \phi(x), \ x \in \Omega, \quad (2)$$

$$T|_{\Sigma_0} = v, \quad \Sigma_0 \triangleq \Gamma_0 \times (0, T), \quad (3)$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \nu}\right|_{\Sigma_1} = \varphi, \ \Sigma_1 \triangleq \Gamma_1 \times (0, T). \quad (4)$$

1984 年 10 月 11 日收到.

其中

$$k_{ij} = k_{ij}(x) \text{ 为热传导系数},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} \triangleq \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \cos(n, x_i), \tag{5}$$

这里 n 为边界 $\partial\Omega \triangleq \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ 的外法向么矢。

方程式(1)代表在一个微分体积元 $d\Omega$ 上的热量守恒定律，方程式(2)表明温度场 $T(x, t)$ 在起始时刻的值。方程(3)代表浮筒表面温度的值，而(4)则反映了液体与壳体之间的 Fourier 交换律。

我们在本文中，使用下述假设：

C_1. $k_{ij} \in C(\bar{\Omega})$ 且 $k_{ij}(x) = k_{ji}(x)$, $\forall\ x \in \bar{\Omega}$;

C_2. k_{ij} 满足一致椭圆条件

$$\mu^{-1}|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \mu|\xi|^2,\ \forall\ \xi \in \mathbf{R}^3,\ x \in \bar{\Omega},$$

$$\mu > 1 \text{ 是常数}; \tag{6}$$

C_3. $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 是有界区域，$\partial\Omega$ 是光滑的二维流形且 Ω 局部位于 $\partial\Omega$ 一侧.

关于问题(1)—(4)的适定性，有

引理 1. 设条件 C_1、C_2 及 C_3 成立. 此外，设

$$\begin{cases} f \in L^2(Q),\ \varphi \in L^2(\Sigma_1),\ \phi \in H^1(\Omega), \\ v \in L^2(0,\ t_1;\ H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)), \end{cases}$$

则问题(1)—(4)存在唯一解 T，且 $T \in V \triangleq V_2^{1,1/2}(Q)$. 其中 Соболев 空间 $H^r(\Gamma_0)$ 的定义见[4]，

$$L^2(0, t_1; H^r(\Gamma_0)) \triangleq \left\{v;\ \left[\int_0^{t_1} \|v(\cdot, t)\|^2_{H^r(\Gamma_0)}\, dt\right]^{\frac{1}{2}} \triangleq \|v\| < +\infty\right\},$$

$$V_2^{1,1/2}(Q) \triangleq \left\{f;\ \begin{array}{l} \|f\| \triangleq \max\limits_{0\leqslant t\leqslant t_1} \|f(\cdot, t)\|_{2,\Omega} + \|\partial_x f\|_{2,Q} < +\infty, \\ \displaystyle\int_0^{t-h}\int_\Omega h^{-1}|f(x, t+h) - f(x, t)|^2\, dxdt \to 0 (h \to 0) \end{array}\right\},$$

$$\|f(\cdot, t)\|_{2,\Omega} \triangleq \left\{\int_\Omega f^2(x, t) dx\right\}^{1/2},$$

$$\|\partial_x f\|_{2,Q} \triangleq \left\{\sum_{i=1}^{3} \int_Q \left|\frac{\partial f(x, t)}{\partial x_i}\right|^2 dxdt\right\}^{1/2}.$$

证. 当边值 $v = 0$ 时，引理 1 为[5]所述. 然后利用 Соболев 空间的迹定理[4]便可得所需理论.

根据本文考虑的对象，不失一般性，可以假定方程式(1)、(2)及(4)是齐次的，即设

$$f = 0,\ \phi = 0,\ \varphi = 0.$$

因此问题(1)—(4)的解依赖于 v. 记成 $T = T(v) = T(x, t; v)$. 换言之，$T(v)$ 是下述问题的解：

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} AT = 0, & (x, t) \in Q, \\ T|_{t=0} = 0, & x \in \Omega, \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \nu}\right|_{\Sigma_1}=0, \qquad T|_{\Sigma_0}=v.$$

由于浮筒悬浮在液体当中，其表面温度难以测定，但我们可以依据在壳体的某部分 B 上温度 T 的量测值

$$z \triangleq z(s, t)=T(s, t)+\varepsilon, \quad (s, t) \in B \times (0, t_1) \tag{7}$$

来辨识 v. 在(7)式中，$B \subset \Gamma_1$，ε 为量测误差. 可以假定其是高斯白噪声过程.

根据对(7)作的假定，我们应当使用最小二乘法来估计出最佳的参数. 即将未知的边值 v 当作参数，当该参数变化在某个容许参数集 $\mathscr{U}_{ad}$ 内时，在 $\mathscr{U}_{ad}$ 内找一个最佳参数 $u \in \mathscr{U}_{ad}$ 使下述残差目标泛函

$$J(v)=\int_0^{t_1}\int_B |\gamma_B T(v)-z|^2 ds dt \tag{8}$$

取极小值. 此处 $\gamma_B T(v)=T(v)|_B$ 中之 γ_B 是迹算子[4]，由[4]，

$$\gamma_B \in \mathscr{L}(V;\ L^2(0, t_1;\ H^{1/2}(\Gamma_0))).$$

换言之，最佳参数 u 应当满足

$$J(u)=\inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J(v). \tag{9}$$

我们引进

定义. 如果存在唯一的最佳参数 $u \in \mathscr{U}_{ad}$ 使(9)式成立，则说系统(1)—(4)的参数 v 在容许参数集 $\mathscr{U}_{ad}$ 内，依据目标泛函(8)是能辨识的. 此外，若依某种度量，被辨识出的最佳参数连续地依赖于量测值 z，则说辨识参数 v 的问题是适定的.

II. 参数 v 的能辨识性

关于这个问题的证明，基于下述求二次泛函极值的结果.

引理 2[6]. 假定 $\Pi_1(v_1, v_2)$ 是自反 Banach 空间 $\mathscr{U} \times \mathscr{U}$ 上的双线性连续泛函，$l_1(v)$ 是 $\mathscr{U}$ 上的连续线性泛函，$\mathscr{U}'_{ad} \subset \mathscr{U}$ 是有界闭凸集. 若

$$\Pi_1(v, v) \geqslant 0, \ \forall\ v \in \mathscr{U},$$

则存在最佳参数 $u \in \mathscr{U}'_{ad}$ 使得目标泛函

$$I(v) \triangleq \Pi_1(v, v)-2l_1(v)+\text{const.} \tag{10}$$

取极小值，即

$$I(u)=\inf_{v \in \mathscr{U}'_{ad}} I(v), \tag{11}$$

且

u 为最佳参数 $\Longleftrightarrow$

$$\Pi_1(u, v-u) \geqslant l_1(v-u), \ \forall v \in \mathscr{U}'_{ad}. \tag{12}$$

此外，若 $\Pi_1(v_1, v_2)$ 还满足下述强制性条件

$$\Pi_1(v, v) \geqslant \alpha\|v\|^2, \ \forall\ v \in \mathscr{U}'_{ad},\ \alpha>0, \tag{13}$$

则使(13)式真确的 u 在 $\mathscr{U}'_{ad}$ 内还是唯一的.

在本段，参数空间 $\mathscr{U} \triangleq L^2(0, t;\ H^1(\Gamma_0))$，容许参数集 $\mathscr{U}_{ad}$ 的定义为

$$\mathscr{U}_{ad} \triangleq \{v;\ \|v\|_{L^2(0,t_1;H^1(\Gamma_0))} \leqslant \mu\}. \tag{14}$$

显然，$\mathscr{U}_{ad}$ 是 $\mathscr{U}$ 内的有界闭凸集.

定理 1. 设条件 C_1—C_5 成立，目标泛函 $J(v)$ 与容许参数集 $\mathscr{U}_{ad}$ 分别由(8)、(14)定义，$\mathrm{mes}\, B > 0$，$z \in L^2(B \times (0, t_1))$. 则系统(1)—(4)的参数 v 是能辨识的. 并且 u 为最佳参数的充要条件为

$$-\int_0^{t_1}\int_{\Gamma_0}(v-u)\frac{\partial p}{\partial \nu}\,dsdt \geqslant 0,\ \forall\ v \in \mathscr{U}_{ad}. \tag{15}$$

其中 $\dfrac{\partial p}{\partial \nu}$ 依(5)式定义，p 是下述问题的解:

$$\begin{cases} \Lambda^* p \triangleq -\dfrac{\partial p}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right) = 0,\ (x, t) \in Q, \\ \qquad p|_{t=t_1} = 0,\ x \in \Omega \\ \qquad p|_{\Sigma_0} = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial \nu}\Big|_B = \gamma_B T(u) - z,\ \dfrac{\partial p}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_1\setminus B} = 0,\ \text{a.e. } t \in (0, t_1). \end{cases} \tag{16}$$

证. 设

$$\begin{cases} \Pi(v_1, v_2) \triangleq \displaystyle\int_0^{t_1}\int_B [\gamma_B T(v_1)][\gamma_B T(v_2)]dsdt,\ (v_1, v_2) \in \mathscr{U} \times \mathscr{U}, \\ \qquad l(v) \triangleq \displaystyle\int_0^{t_1}\int_B \gamma_B T(v) z dsdt,\ v \in \mathscr{U}. \end{cases} \tag{17}$$

显然，$\Pi(v_1, v_2)$ 及 $l(v)$ 分别是 $\mathscr{U} \times \mathscr{U}$ 及 $\mathscr{U}$ 上的双线性、线性连续泛函，且由(8)式可得

$$J(v) = \Pi(v, v) - 2l(v) + \int_0^{t_1}\int_B z^2 dsdt. \tag{8'}$$

故由引理 2 的第一部分，可以断定存在 $u \in \mathscr{U}_{ad}$ 使得(9)式成立.

其次，证明 $\Pi(v, v)$ 在 $\mathscr{U}_{ad}$ 上满足强制条件(13). 令

$$\widetilde{\mathscr{U}}_{ad} \triangleq \left\{v \in \mathscr{U}_{ad};\ \|v\|_{\mathscr{U}} = \frac{\mu}{2}\right\}. \tag{18}$$

根据 Соболев 空间的紧致原理[4]，$\widetilde{\mathscr{U}}_{ad}$ 是空间 $L^2(0, t_1; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))$ 内的紧致集，故连续泛函

$$F(v) = \Pi(v, v),\ v \in \widetilde{\mathscr{U}}_{ad}$$

达到它在 $\widetilde{\mathscr{U}}_{ad}$ 上的下确界 $\tilde{\alpha}$，即 $\exists\ v_0 \in \widetilde{\mathscr{U}}_{ad}$ 使得

$$F(v_0) = \tilde{\alpha} = \inf_{v \in \widetilde{\mathscr{U}}_{ad}} F(v).$$

兹证 $\tilde{\alpha} > 0$，如若不然，设 $\tilde{\alpha} = 0$. 由于 $\mathrm{mes}[B \times (0, t_1)] = t_1 \mathrm{mes}\, B > 0$，故可得到 $\gamma_B T(v_0) = 0$.

因此 $T(v_0)$ 是下述问题的解:

$$\begin{cases} \Lambda T(v_0) = 0, \quad (x, t) \in Q, \\ \dfrac{\partial T(v_0)}{\partial \nu}\Big|_B = 0, \\ T(v_0)|_B = 0. \end{cases} \tag{19}$$

根据抛物型方程广义 Cauchy 问题的唯一性[7]得到 $T(v_0)=0$. 从而有 $v_0=0$, 但此同 $v_0\in\tilde{\mathscr{U}}_{ad}$ 矛盾.

$\forall\ v\in\mathscr{U}_{ad}$ 且 $v\neq 0$, 则 $\tilde{v}=\frac{\mu}{2}\frac{v}{\|v\|}\in\tilde{\mathscr{U}}_{ad}$. 于是, 有

$$F(v)=F\left(\frac{2\|v\|}{\mu}\frac{\mu}{2}\frac{v}{\|v\|}\right)=\left(\frac{2}{\mu}\right)^2\|v\|^2F(\tilde{v})\geqslant\left(\frac{2}{\mu}\right)^2\tilde{\alpha}\|v\|^2.$$

当 $v=0$ 时, 上式显然成立. 故我们证明了二次泛函 $\Pi(v,v)$ 满足强制条件(13).

故由引理 2 的第三部分, 满足(19)式的最佳参数 u 还是唯一的.

最后, 导出关于 u 的变分不等式(15).

根据引理 2 的第二部分, u 是最佳参数的充要条件为

$$\Pi(u,v-u)\geqslant l(v-u),\ \forall\ v\in\mathscr{U}_{ad},$$

即

$$\int_0^{t_1}\int_B[\gamma_BT(u)-z][\gamma_BT(v)-\gamma_BT(u)]dsdt\geqslant 0,\ \forall\ v\in\mathscr{U}_{ad}. \tag{20}$$

在(16)式中, 若令 $\tau=t_1-t$, 则定理问题(16)就转化成(1)—(4)的类型了, 且

$$\gamma_BT(u)-z\in L^2(B\times(0,t_1)),$$

由引理 1, 定解问题(16)是适定的. 以下运用推广的 Green 公式[4]简化(20)式:

因为

$$\begin{aligned}0&=\int_Q\{p[AT(v)-AT(u)]-[T(v)-T(u)]A^*p\}dQ\\&=\int_0^{t_1}\int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}\{p[T(v)-T(u)]\,dxdt\\&\qquad+\int_\Sigma\left\{p\frac{\partial}{\partial\nu}[T(v)-T(u)]-[T(v)-T(u)]\frac{\partial p}{\partial\nu}\right\}d\Sigma\\&=-\int_{\Sigma_0}(v-u)\frac{\partial p}{\partial\nu}ds\,dt-\int_0^{t_1}\int_B[\gamma_BT(u)-z][\gamma_BT(v)-\gamma_BT(u)]dsdt,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&-\int_0^{t_1}\int_{\Gamma_0}(v-u)\frac{\partial p}{\partial\nu}dsdt\\&=\int_0^{t_1}\int_B[\gamma_BT(u)-z][\gamma_BT(v)-\gamma_BT(u)]dsdt.\end{aligned}$$

然后将上式与(20)式结合, 便可以得到(15)式.

III. 辨识参数 v 的问题是适定的

设

$$K\triangleq\{T(v)\in V;\ T(v)\text{ 是(1)—(4)的解},\ v\in\mathscr{U}_{ad}\}, \tag{21}$$

$$N\triangleq\{\gamma_BT(v);\ T(v)\in K\}. \tag{22}$$

依据 $z\in N$ 来确定(1)—(4)的最佳参数 u, 可以认为 u 是 z 的函数 $u=u(z)$. 根据定理 1, 函数 $u:N\to\mathscr{U}_{ad}$ 是单值的. 此外, 有

定理 2. 在定理 1 的假定下，函数 u: $N\to\mathscr{U}_{ad}$ 还是连续的，此处，是将N作为 $L^2(B\times(0,t_1))$ 的子集，$\mathscr{U}_{ad}$ 是作为 $\widetilde{\mathscr{U}}\triangleq L^2(0,t_1;H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_0))$ 的子集而言的．换言之，辨识参数 v 的问题是适定的．

证． 由于 $\mathscr{U}_{ad}$ 是 $\mathscr{U}$ 中的有界闭凸子集，故K也是V中的有界凸子集．根据问题(1)的唯一性，易于证明：映射

$$P_1:\ v\to T(v)$$

是自 $\mathscr{U}_{ad}$ 到K上的双方单值映射．

此外，根据紧致性质[4]，$\mathscr{U}_{ad}$ 是 $\mathscr{U}$ 内的紧集，故K亦是V中的紧集．我们知道，每个从紧集到 Hausdorff 空间上的双方单值连续映射都是拓扑映射，因此 P_1 是自 $\mathscr{U}_{ad}\subset\widetilde{\mathscr{U}}$ 到K上的拓扑映射．

其次，根据[4]，迹映射 $\gamma_B:T\to\gamma_BT$ 是自K到N上的线性连续映射．在定理 1 的假定下，映射 γ_B 还存在单值逆．事实上，若 $\gamma_BT\in N$ 且 $\gamma_BT=0$，则由 K、N 的定义，便知T满足

$$\Lambda T=0,\ T|_B=0,\ \left.\frac{\partial T}{\partial\nu}\right|_B=0.$$

再由抛物型方程广义 Cauchy 问题唯一性[7]，必然有 $T=0$．

由上述，K是V中的紧集，从而可以断定映射 ν_B 是拓扑映射．

最后，可以认为残差泛函(8)是 $L^2(B\times(0,t_1))$ 中距离的平方．

$$J(v)=\|\gamma_BT(v)-z\|^2_{L^2(B\times(0,t_1))}. \tag{23}$$

因此找最佳参数 $u\in\mathscr{U}_{ad}$ 使(9)式成立，等价于在凸闭集 $\bar{N}$ 上找 z 的投影 $\gamma_BT(v)$，此处 $\bar{N}$ 是N在 $L^2(B\times(0,t_1))$ 内的闭包，即

$$\|\gamma_BT(u)-z\|^2=\inf_{\gamma_BT(v)\in\bar{N}}\|\gamma_BT(v)-z\|^2. \tag{24}$$

根据定理 1，存在唯一的 $\gamma_BT(u)\in N\subset\bar{N}$ 使(24)式成立．再根据 Banach 空间中向闭凸集投影映射是连续的性质，便可断定投影映射

$$P_2: z\to\nu_BT(u)$$

是连续的．

总之，我们证明了映射 $P=P_1^{-1}\nu_B^{-1}P_2: L^2(B\times(0,t_1))\to\mathscr{U}_{ad}$ 是连续的，因而最佳参数 u 连续地依赖于量测数据 z，只是需要认为 u 是 $L^2(0,t_1;H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_0))$ 中的元．

总结定理 1 与定理 2，我们已经证明了：对于目标泛函(8)，在容许参数集(14)内，依据量测(7)，便可唯一地确定出陀螺仪浮筒表面的温度 u，求出的 u 连续地依赖于量测数据 z．即辨识浮筒面温度的问题是适定的．

此外，可用于寻求最佳参数 u 的优化系为

$$\left|\begin{array}{ll}\dfrac{\partial T}{\partial t}-\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)=f, & -\dfrac{\partial p}{\partial t}-\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right)=0,\ (x,t)\in Q\\ \qquad T|_{t=0}=\phi, & \qquad p|_{t=t_1}=0,\ x\in\Omega\\ \qquad T|_{\Sigma_0}=v, & \qquad p|_{\Sigma_0}=0,\ \Sigma_0\triangleq\Gamma_0\times(0.t_1),\end{array}\right.$$

$$
\begin{cases}
\left.\dfrac{\partial T}{\partial \nu}\right|_{\Sigma_1} = \varphi, \ \Sigma_1 \triangleq \Gamma_1 \times (0, t_1), & \left.\dfrac{\partial p}{\partial \nu}\right|_{B\times(0,t_1)} = \gamma_B T(u) - z, \\
 & \left.\dfrac{\partial p}{\partial \nu}\right|_{(\Gamma_1 \setminus B)\times(0,t_1)} = 0, \\
\multicolumn{2}{c}{-\displaystyle\int_0^{t_1}\int_{\Gamma_0} (v-u)\frac{\partial p}{\partial \nu}\, ds dt \geqslant 0, \quad \forall\, v \in \mathscr{U}_{ad}.}
\end{cases}
$$

参　考　文　献

[1] 胡顺菊，液浮陀螺仪内浮筒表面温度的估计，第二次控制理论及其应用学术交流会，桂林，1980，10.

[2] Hu Shunju and Yu Wenhuan, Identification of float serface temperature in floated gyroscope, Proc. 3rd IFAC Symp. Control of Distributed Parameter Systems, Toulouse (France), June, 1982.

[3] 胡顺菊、喻文焕，一个未知边值条件的辨识问题——液浮陀螺仪内浮筒表面温度的估计，系统科学与数学，4: 3 (1984)，173—182.

[4] Lions J. L. and Magenes E., Non-Homogerous Boundary Value Problems and Applications, V. I. and II, Springer-Verlag, N. Y., 1972.

[5] Ladyzenskaja O. A., Solonikov V. A. and Ural'ceuva N. N., Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Translations of Mathematical Monogrphs, AMS, Providence, Rhode Island, 1968 (Chap. 4).

[6] Lions J. L., Controle Optimal de Systemes Gouvernes par des Equations aux Derivees Partielles, Gauthier-Villars, Paris, 1968 (Chap. 1).

[7] Mizohata S., Unicite du prolongement des solutions pour quelques opérateurs differentiels paraboliques, *Memoirs of the College of Science, Univ. of Kyoto*, Series *A*, 31: 4(1958), Mathematics, 219—239.

IDENTIFICATION OF TRANSIENT TEMPERATURE ON THE FLOAT SURFACE OF A FLOATED GYROSCOPE

Yu Wen-Huan　Hu Shun-Ju

(Nankai University, Tianjin)

ABSTRACT

The transient temperature distribution in the fluid in a floated gyroscope is described by Dirichlet-Neumann's mixed initial-boundary value problem of second-order linear parabolic equations. Making use of optimization methods on function spaces, we estimate the transient temperature on the float surface by measuring the temperature on a part of the gyroscope hull. We prove that the unknown temperature on the float surface (as a parameter) is identifiable and that the problem identifying the parameter is well-posed. We also give an optimization system by which to seek the optimal parameter.