

一种标定陀螺仪的新方法

陈杰春, 振良, 袁峰, 宋建辉, 佟庆彬

(哈尔滨工业大学 电气工程及自动化学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 给出一种能够模拟陀螺仪实际工作条件的标定方法. 将陀螺仪安装在飞行器模型内部, 飞行器模型悬挂在 2 个平行屏幕之间并且在外力的推动下作无规则运动, 在飞行器模型上安装 2 根双向准直激光束, 激光束在屏幕上生成 4 个指示光斑, 利用双目视觉测量技术测量指示光斑在三维空间内的坐标, 然后借助于欧拉角算法确定飞行器模型姿态, 最后结合陀螺仪的输出信号对陀螺仪进行标定. 对飞行器模型姿态的测量误差作了详细的分析, 结果显示该方法可以精确测量飞行器模型姿态.

关键词: 陀螺仪; 标定; 姿态测量; 双目视觉测量; 欧拉角算法

中图分类号: V 441 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-7043(2004)04-0407-06

A new method for calibrating gyro sensors

CHEN Jie-chun, DING Zhen-liang, YUAN Feng, SONG Jian-hui, TONG Qing-bin

(School of Electrical Engineering and Automation, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract In this paper a new method is presented that can be used to simulate real working conditions of gyro sensor. The gyro sensor was mounted inside an aircraft model which was suspended between two parallel screens. Driven by external forces, the aircraft model flew randomly. Two collimated laser beams mounted on the outer surface of the aircraft model produced four laser spots on the screens. The 3D coordinates of the laser spots were measured by binocular stereo vision sensor and the attitude of the aircraft model were determined using Euler's algorithm. The final step was to calibrate the gyro sensor by comparing its output signal to the actual attitude of the aircraft model. The accuracy of attitude determination was analyzed and the results showed that the attitude of the aircraft model can be determined accurately using the method proposed in this paper.

Keywords gyro sensor; calibration; attitude determination; double view metrology; Euler algorithm

陀螺稳定装置作为惯性系统的核心部件, 广泛应用于飞机、导弹、舰船、机器人等运载体的控制系统及惯性导航系统. 随着国防和国民经济的发展, 对运载体的控制和导航精度的要求越来越高. 作为核心敏感部件, 陀螺仪的精度决定了陀螺稳定装置的精度. 在干扰力矩的作用下, 运行中的陀螺仪会产生漂移误差, 而且漂移误差使得系统误差随着时间的推移不断累积. 如果不采取适当的措施, 在长时间的

运行过程中, 累积的系统误差会大大降低运载体控制和导航系统的精度. 为了消除陀螺仪漂移误差的不利影响, 目前通常采取的措施是^[1-2]: 在单轴或多轴精密转台上做大量的统计实验, 建立一个描述陀螺仪漂移误差生成规律的数学模型, 然后利用该误差数学模型对系统误差进行补偿. 目前使用的测试设备和测试方法具有一定的局限性, 因为它们只能模拟陀螺仪的部分工作条件, 而陀螺仪的实际工作条件可能与实验条件相差比较大. 因此, 使用在特定的实验条件下建立的误差数学模型对工作在不同条件下的陀螺仪进行误差补偿是不理想的, 而且在实际的控制和导航过程中会产生很大的偏差. 文中给出一种标定陀螺仪的新方法, 在地面建立仿真实验

收稿日期: 2006-09-27

基金项目: 国防工业科学技术委员会基础研究基金资助项目 (9.5.1/A966000-15).

作者简介: 陈杰春 (1974-), 男, 博士研究生, E-mail: chenjiechun_hrb@yahoo.com.cn;

丁振良 (1941-), 男, 教授, 博士生导师.

系统, 将陀螺仪安装在飞行器模型内部, 飞行器模型在外力的推动下作不规则的运动. 借助于双目视觉测量技术测量飞行器模型的飞行姿态, 然后结合陀螺仪的输出信号建立描述陀螺仪漂移误差的数学模型. 该方法的优点在于陀螺仪随着飞行器模型作不规则运动, 可以尽量模拟陀螺仪的实际工作条件.

1 标定系统结构

标定系统结构如图 1 所示. 飞行器模型悬挂于 2 个平行屏幕之间, 模型上配置 2 根双向准直激光束, 激光束在每个屏幕上分别形成 2 个指示光斑. 在每个屏幕的左右各架设 1 部高速、高分辨率的 CMOS 数码相机, 连续拍摄对面屏幕上的指示光斑并将图像文件存储在磁盘阵列内, 用于后期分析处理.

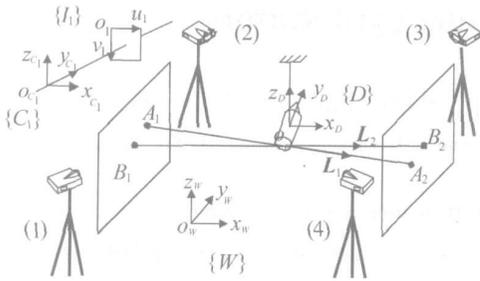


图 1 标定系统结构示意图

Fig 1 Configuration of calibrating system

为便于计算, 引入 4 个参考坐标系:

1) 机载坐标系 {D}. 固连于飞行器模型, 原点 \$o_d\$ 位于光束 \$A_1A_2\$ 和 \$B_1B_2\$ 的公垂线与 \$B_1B_2\$ 的交点处, \$x_d\$ 轴平行于光束 \$B_1B_2\$ 指向右方, \$z_d\$ 轴同时垂直于光束 \$B_1B_2\$ 和 \$A_1A_2\$ 指向上方, \$y_d\$ 轴垂直于坐标平面 \$x_d o_d z_d\$ 构成右手直角坐标系.

2) 地面坐标系 {W}. 原点 \$o_w\$ 位于地面上某一

点, \$z_w\$ 轴垂直于地面指向上方, \$x_w\$ 轴垂直于屏幕指向右方, \$y_w\$ 轴垂直于坐标平面 \$x_w o_w z_w\$ 指向前方.

3) 相机坐标系 {C_i}. 原点 \$o_{c_i}\$ 分别位于相机 \$i\$ 的光学中心, \$y_{c_i}\$ 轴平行于光轴指向前方, \$z_{c_i}\$ 轴垂直于 \$y_{c_i}\$ 轴指向上方, \$x_{c_i}\$ 轴垂直于坐标平面 \$y_{c_i} o_{c_i} z_{c_i}\$ 指向右方, 构成右手直角坐标系. 其中, \$i = 1, 2, 3, 4\$

4) 像平面坐标系 {I_i}. 原点 \$o_i\$ 分别位于相机 (\$i\$) 的 CMOS 传感器左上角, \$u_i\$ 轴平行于图像传感器上边指向右方, \$v_i\$ 轴平行于图像传感器左边指向下方.

将 2 根双向准直激光束看作 2 个向量 \$L_1\$ 和 \$L_2\$, 它们在机载坐标系中的坐标固定不变, 假设分别为: \$^D L_1 = [x_1 \ y_1 \ z_1]^T\$ 和 \$^D L_2 = [x_2 \ y_2 \ z_2]^T\$. 4 个指示光斑在地面坐标系中的坐标随着飞行器模型的运动而不断改变, 令: \$^W A_1 = [x_{a1} \ y_{a1} \ z_{a1}]\$, \$^W B_1 = [x_{b1} \ y_{b1} \ z_{b1}]^T\$, \$^W A_2 = [x_{a2} \ y_{a2} \ z_{a2}]^T\$, \$^W B_2 = [x_{b2} \ y_{b2} \ z_{b2}]^T\$, 则向量 \$L_1\$ 和 \$L_2\$ 在地面坐标系中的坐标可表示为: \$^W L_1 = [x_{a2} - x_{a1} \ y_{a2} - y_{a1} \ z_{a2} - z_{a1}]^T\$, \$^W L_2 = [x_{b2} - x_{b1} \ y_{b2} - y_{b1} \ z_{b2} - z_{b1}]^T\$.

2 飞行器模型姿态的确定

飞行器模型在三维空间中的姿态由地面坐标系 {W} 和机载坐标系 {D} 之间的 3 个欧拉角 \$\psi\$ (偏航角), \$\theta\$ (俯仰角) 和 \$\gamma\$ (滚转角) 决定. 令: \$^D l_i = ^D L_i / \parallel ^D L_i \parallel\$, \$^W l_i = ^W L_i / \parallel ^W L_i \parallel\$, 根据坐标变换原理^[3-4], 单位向量 \$^D l_i\$ 和 \$^W l_i\$ 之间满足如下的关系:

$$^D l_i = ^D B_W ^W l_i \tag{1}$$

式中: \$^D B_W\$ 表示地面坐标系至机载坐标系的过渡矩阵, 其表达式如式 (2) 所示, 该矩阵有一个重要的性质:

$$^D B_W = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \phi + \sin \gamma \sin \theta \sin \phi & \cos \gamma \sin \phi - \sin \gamma \sin \theta \cos \phi & \sin \gamma \cos \theta \\ -\cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi & \sin \theta \\ -\sin \gamma \cos \phi + \cos \gamma \sin \theta \sin \phi & -\sin \gamma \sin \phi - \cos \gamma \sin \theta \cos \phi & \cos \gamma \cos \theta \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$(^D B_W)^{-1} = (^D B_W)^T \tag{3}$$

由式 (1) 和 (3) 得

$$^W l_i = (^D B_W)^{TD} l_i \tag{4}$$

同理, 令: \$^D l_2 = ^D L_2 / \parallel ^D L_2 \parallel\$, \$^W l_2 = ^W L_2 / \parallel ^W L_2 \parallel\$, 则向量 \$^D l_2\$ 和 \$^W l_2\$ 之间也有如下关系:

$$^W l_2 = (^D B_W)^{TD} l_2 \tag{5}$$

令 \$B_j\$ (\$j = 1, 2, 3\$) 为矩阵 \$^D B_W\$ 的元素, 由式 (2) 得

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \arcsin B_{23} \\ \phi &= -\arcsin \left(\frac{B_{21}}{\cos \theta} \right) \\ \gamma &= \arcsin \left(\frac{B_{13}}{\cos \theta} \right) \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

分别取线性方程组 (4) 和 (5) 的第 1 行, 可建立线性方程组:

$$\begin{bmatrix} {}^D l_{11} & {}^D l_{12} & {}^D l_{13} \\ {}^D l_{21} & {}^D l_{22} & {}^D l_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^W l_{11} \\ {}^W l_{21} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

式中: ${}^W l_{i1} (i=1, 2)$ 为单位向量 ${}^W l_i$ 的第 1 分量, 其数值与指示光斑在地面坐标系内的坐标有关. 如, ${}^W l_{11} = (x_{a2} - x_{a1}) / \|{}^W L_1\|$, $\|{}^W L_1\|^2 = (x_{a2} - x_{a1})^2 + (y_{a2} - y_{a1})^2 + (z_{a2} - z_{a1})^2$. ${}^D l_{ij}$ 为单位向量 ${}^D l_i$ 的第 j 分量 ($i=1, 2; j=1, 2, 3$). 由于 2 根双向准直激光束固联在飞行器模型上, 向量 $L_i (i=1, 2)$ 在机载坐标系内的坐标不随飞行器模型的运动而改变. 根据机载坐标系的定义, 并假设向量 L_1, L_2 与 x_D 轴正方向的夹角分别为 α 和 β 则向量 ${}^D l_1$ 和 ${}^D l_2$ 可以分别表示为: ${}^D l_1 = [\cos \alpha \ \sin \alpha \ 0]^T$ 和 ${}^D l_2 = [\cos \beta \ \sin \beta \ 0]^T$. 由式 (7) 得

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \cos \beta & \sin \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^W l_{11} \\ {}^W l_{21} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

求解式 (8) 得

$$B_{21} = [{}^W l_{11} \cos \beta - {}^W l_{21} \cos \alpha] / \sin(\alpha - \beta). \quad (9)$$

同理, 分别取线性方程组 (4) 和 (5) 的第 3 行, 可建立线性方程组:

$$\begin{bmatrix} {}^D l_{11} & {}^D l_{12} & {}^D l_{13} \\ {}^D l_{21} & {}^D l_{22} & {}^D l_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{13} \\ B_{23} \\ B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^W l_{13} \\ {}^W l_{23} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

用类似于求解 B_{21} 的方法, 由式 (10) 可求得 B_{13} 和 B_{23} 的表达式分别为

$$B_{13} = [{}^W l_{13} \sin \beta - {}^W l_{23} \sin \alpha] / \sin(\beta - \alpha),$$

$$B_{23} = [{}^W l_{13} \cos \beta - {}^W l_{23} \cos \alpha] / \sin(\alpha - \beta). \quad (11)$$

由式 (6)、(9) 和 (11) 可知, 如果能够测量出 4 个指示光斑 A_i 和 $B_i (i=1, 2)$ 在地面坐标系中的坐标, 由式 (9) 和 (11) 可求得 B_{21} 、 B_{13} 和 B_{23} 的数值解, 然后根据式 (6) 就可以确定表征飞行器模型姿态的 3 个欧拉角.

3 指示光斑坐标的确定

3.1 相机成像数学模型

在不考虑畸变因素影响的情况下, 相机的成像

过程可以看作小孔成像过程. 如图 2 所示, 光轴垂直于像平面, 相机坐标系 $\{C_1\}$ 的坐标原点与像平面之间的距离等于 f . 点 P_w 是空间内的任意一个特征点, 假设它在地面坐标系 $\{W\}$ 内的坐标为 ${}^W P_w = ({}^W x_w, {}^W y_w, {}^W z_w)$, 在相机坐标系 $\{C_1\}$ 内的坐标为 ${}^{C_1} P_w = ({}^{C_1} x_w, {}^{C_1} y_w, {}^{C_1} z_w)$, 二者之间有如下关系^[5]:

$$\begin{bmatrix} {}^{C_1} x_w \\ {}^{C_1} y_w \\ {}^{C_1} z_w \end{bmatrix} = {}^{C_1} R_W \begin{bmatrix} {}^W x_w \\ {}^W y_w \\ {}^W z_w \end{bmatrix} + {}^{C_1} T_W. \quad (12)$$

式中: ${}^{C_1} R_W$ 和 ${}^{C_1} T_W$ 分别为地面坐标系 $\{W\}$ 到相机坐标系 $\{C_1\}$ 的过渡矩阵和转移矩阵.

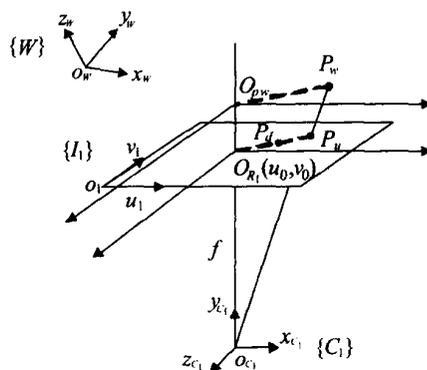


图 2 相机成像模型示意图

Fig 2 Illustration of camera model

假设, 点 P_w 在像平面内的投影点为 P_u , 并且该点在相机坐标系 $\{C_1\}$ 内的坐标为 ${}^{C_1} P_u = ({}^{C_1} x_u, {}^{C_1} y_u, {}^{C_1} z_u)$. 根据小孔成像原理得

$${}^{C_1} x_u = f {}^{C_1} x_w / {}^{C_1} z_w, \quad {}^{C_1} y_u = f {}^{C_1} y_w / {}^{C_1} z_w. \quad (13)$$

实际上, 由于受到相机镜头生产和装配工艺的限制, 物体在像平面上的成像会发生不同程度的畸变. 如图 2 所示, 点 P_w 在理想情况下成像于点 P_u , 但是由于发生了径向畸变实际成像于点 P_d . 点 P_u 和 P_d 在相机坐标系 $\{C_1\}$ 内的坐标之间满足如下关系:

$${}^{C_1} x_u = {}^{C_1} x_d + \delta_r, \quad {}^{C_1} z_u = {}^{C_1} z_d + \delta_r. \quad (14)$$

径向畸变主要由透镜曲面的加工缺陷引起, 其表达式为

$$\left. \begin{aligned} \delta_r &= k_1 {}^{C_1} x_d ({}^{C_1} z_d^2 + {}^{C_1} x_d^2) + O[({}^{C_1} z_d, {}^{C_1} x_d)^5] \\ \delta_r &= k_1 {}^{C_1} z_d ({}^{C_1} z_d^2 + {}^{C_1} x_d^2) + O[({}^{C_1} z_d, {}^{C_1} x_d)^5] \end{aligned} \right\}. \quad (15)$$

式中: ${}^{C_1} x_d$ 和 ${}^{C_1} z_d$ 为点 P_d 在相机坐标系 $\{C_1\}$ 内的坐标分量, 其数值是无法观测的, 而点 P_d 在像平面坐标系 $\{I_1\}$ 内的坐标分量是可以观测的, 因此进行如

下坐标变换并引入变量^l \hat{x}_d 和^l \hat{z}_d 得

$$\begin{aligned}
{}^{c_1}x_d &= s_x^{-1}d'_x({}^l x_d - u_0) = s_x^{-1}l_1\hat{x}_d, \\
{}^{c_1}z_d &= d_z({}^l z_d - v_0) = l_1\hat{z}_d.
\end{aligned}
\tag{16}$$

式中: u_0 和 v_0 分别表示光轴与像平面的交点 (O_{R1}) 在像平面坐标系 $\{I_1\}$ 中的坐标分量; s_x 表示图像比例因子; $d'_x = d_x N_{cx} / N_{fx}$, d_x 表示 CMOS 图像传感器水平方向相邻像元之间的中心距, N_{cx} 表示相机采集的图像水平方向像素数, N_{fx} 表示 CMOS 图像传感器每行像元数; d_z 表示 CMOS 图像传感器垂直方向相邻像元之间的中心距。

已经被证实^[6], 省略径向畸变表达式的高次项, 用一阶项就足以描述径向畸变. 这样由式 (12) ~ (16) 得

$$\begin{aligned}
f \frac{r_{11}^W x_w + r_{12}^W y_w + r_{13}^W z_w + t_1}{r_{21}^W x_w + r_{22}^W y_w + r_{23}^W z_w + t_2} &= s_x^{-1}l_1\hat{x}_d + \\
&k_1 l_1 \hat{x}_d [s_x^{-3}({}^l \hat{x}_d)^2 + s_x^{-1}({}^l \hat{z}_d)^2], \\
f \frac{r_{31}^W x_w + r_{32}^W y_w + r_{33}^W z_w + t_3}{r_{21}^W x_w + r_{22}^W y_w + r_{23}^W z_w + t_2} &= l_1\hat{z}_d + \\
&k_1 l_1 \hat{z}_d [s_x^{-2}({}^l \hat{x}_d)^2 + s_x^{-1}({}^l \hat{z}_d)^2].
\end{aligned}
\tag{17}$$

式中: r_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) 为过渡矩阵^D R_W 的元素; t_i ($i = 1, 2, 3$) 为转移矩阵^D T_W 的第 i 分量。

文中以相机 1 为例, 说明了相机成像数学模型的建立方法. 同样, 接下来仍然以相机 1 为例说明相机模型的标定方法。

3.2 相机模型的标定

相机模型的标定过程就是求解相机模型公式 (17) 中未知参数的过程. 式 (17) 中共有 17 个未知参数, 分别为: r_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), t_i ($i = 1, 2, 3$), f , k_1 , u_0 , v_0 和 s_x . 其他参数可以从相机厂家提供的资料中直接或间接得到^[6], 如 d'_x 和 d_z . 为了求解上述未知参数, 在地面坐标系 $\{W\}$ 内选取 N ($N \geq 9$) 个已知坐标的特征点 P_{wi} ($i = 1, 2, \dots, N$), 提取它们在像平面内的投影点 P_{di} ($i = 1, 2, \dots, N$) 在像平面坐标系 $\{I_1\}$ 内的坐标, 然后根据式 (17) 构建非线性方程组^[7]:

$$F(\eta) = 0 \tag{18}$$

式中: $\eta = [r_{11}, \dots, r_{33}, t_1, \dots, t_3, f, k_1, u_0, v_0, s_x]^T$.

$$F(\eta) = f \frac{r_{11}^W x_{wi} + r_{12}^W y_{wi} + r_{13}^W z_{wi} + t_1}{r_{21}^W x_{wi} + r_{22}^W y_{wi} + r_{23}^W z_{wi} + t_2} - s_x^{-1}l_1\hat{x}_{di} -$$

$$k_1 l_1 \hat{x}_{di} [s_x^{-3}({}^l \hat{x}_{di})^2 + s_x^{-1}({}^l \hat{z}_{di})^2] = 0$$

$$i = 1, 3, \dots, 2N - 1$$

$$F(\eta) = f \frac{r_{31}^W x_{wj} + r_{32}^W y_{wj} + r_{33}^W z_{wj} + t_3}{r_{21}^W x_{wj} + r_{22}^W y_{wj} + r_{23}^W z_{wj} + t_2} - l_1\hat{z}_{dj} -$$

$$k_1 l_1 \hat{z}_{dj} [s_x^{-2}({}^l \hat{x}_{dj})^2 + s_x^{-1}({}^l \hat{z}_{dj})^2] = 0$$

$$j = 2, 4, \dots, 2N.$$

众所周知, 牛顿迭代法是求解非线性方程组的常用方法, 因为在适当的条件下牛顿迭代法具有二阶收敛速度. 但是, 该方法对迭代初值的选取要求比较苛刻, 如果初值不在收敛域内, 该方法将会失效^[8]. 因此, 文中重点给出确定式 (18) 中未知向量 η 的初值 $\eta_0 = [r'_{11}, \dots, r'_{33}, t'_1, \dots, t'_3, f', k', u'_0, v'_0, s'_x]^T$ 的方法。

从图 2 可以看出, 线段 $O_{pw}P_w$ 平行于线段 $O_{R1}P_d$, 由此得^[9]

$${}^{c_1}x_d {}^{c_1}z_w = {}^{c_1}z_d {}^{c_1}x_w. \tag{19}$$

由式 (12) 和 (19) 得

$$\begin{aligned}
{}^{c_1}x_d (r_{31}^W x_w + r_{32}^W y_w + r_{33}^W z_w + t_3) &= \\
{}^{c_1}z_d (r_{11}^W x_w + r_{12}^W y_w + r_{13}^W z_w + t_1).
\end{aligned}
\tag{20}$$

整理式 (20) 得

$$\begin{aligned}
{}^{c_1}x_d &= {}^{c_1}z_d {}^W x_w (r_{11}/t_1) + {}^{c_1}z_d {}^W y_w (r_{12}/t_1) + \\
&{}^{c_1}z_d {}^W z_w (r_{13}/t_1) + {}^{c_1}z_d (t_3/t_1) - \\
&{}^{c_1}x_d {}^W x_w (r_{31}/t_1) - {}^{c_1}x_d {}^W y_w (r_{32}/t_1) - \\
&{}^{c_1}x_d {}^W z_w (r_{33}/t_1).
\end{aligned}
\tag{21}$$

结合式 (16) 和 (21) 得

$$\begin{bmatrix} l_1 \hat{z}_d {}^W x_w \\ l_1 \hat{z}_d {}^W y_w \\ l_1 \hat{z}_d {}^W z_w \\ l_1 \hat{z}_d \\ -l_1 \hat{x}_d {}^W x_w \\ -l_1 \hat{x}_d {}^W y_w \\ -l_1 \hat{x}_d {}^W z_w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s_x r_{11}/t_1 \\ s_x r_{12}/t_1 \\ s_x r_{13}/t_1 \\ s_x t_3/t_1 \\ r_{31}/t_1 \\ r_{32}/t_1 \\ r_{33}/t_1 \end{bmatrix} = l_1 \hat{x}_d. \tag{22}$$

令 $s_x = 1$, $u_0 = u'_0 = N_{cx}/2$, $v_0 = v'_0 = N_{cy}/2$ 其中 N_{cx} 和 N_{cy} 分别表示 CMOS 图像传感器每行和每列的像元数. 将投影点 P_{di} ($i = 1, 2, \dots, N$) 在像平面坐标系 $\{I_1\}$ 中的坐标代入式 (16), 求得^l \hat{x}_{di} 和^l \hat{y}_{di} 的数值. 然后将特征点 P_{wi} ($i = 1, 2, \dots, N$) 在地面坐标系 $\{W\}$ 中的坐标及^l \hat{x}_{di} 和^l \hat{y}_{di} 代入式 (22) 可以构建如

下超定线性方程组:

$$\begin{bmatrix} {}^I_1 \hat{z}_{di} & {}^W x_{wi} \\ {}^I_1 \hat{z}_{di} & {}^W y_{wi} \\ {}^I_1 \hat{z}_{di} & {}^W z_{wi} \\ {}^I_1 \hat{z}_{di} \\ - {}^I_1 \hat{x}_{di} & {}^W x_{wi} \\ - {}^I_1 \hat{x}_{di} & {}^W y_{wi} \\ - {}^I_1 \hat{x}_{di} & {}^W z_{wi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s_x r_{11} / t_1 \\ s_x r_{12} / t_1 \\ s_x r_{13} / t_1 \\ s_x t_3 / t_1 \\ r_{31} / t_1 \\ r_{32} / t_1 \\ r_{33} / t_1 \end{bmatrix} = {}^I_1 \hat{x}_{di} \quad (23)$$

为了叙述的方便引入如下表达式:

$$\begin{aligned} b_1 &= s_x r_{11} / t_b, \quad b_2 = s_x r_{12} / t_b, \quad b_3 = s_x r_{13} / t_b \\ b_4 &= s_x t_3 / t_b, \\ b_5 &= r_{31} / t_b, \quad b_6 = r_{32} / t_b, \quad b_7 = r_{33} / t_b \end{aligned} \quad (24)$$

容易看出, 应用最小二乘法求解式 (23), 就可以得到 $b_i (i = 1, 2, \dots, 7)$ 的解。

由式 (24) 得

$$\begin{aligned} |t_1| &= \sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2} / \sqrt{b_5^2 + b_6^2 + b_7^2} \\ |s_x| &= |t_1| \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} / \sqrt{r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{13}^2} \end{aligned} \quad (25)$$

由文献 [4-5] 得知, 过渡矩阵 ${}^C_1 R_W$ 的行向量 r_1, r_2 和 r_3 互相正交, 而且模都等于 1 另外, 由于图像比例因子 s_x 始终大于零, 因此由式 (25) 得

$$|t_1| = 1 / \sqrt{b_5^2 + b_6^2 + b_7^2} \quad (26)$$

$$s'_x = |t_1| \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \quad (27)$$

为了确定 t_1 的符号, 假定 $t_1 > 0$ 然后将 $|t_1|$ 代入式 (24), 得到 $r'_{1i}, r'_{3i} (i = 1, 2, 3)$ 和 t_3 的初值: $r'_{11} = b_1 |t_1| / s'_x, r'_{12} = b_2 |t_1| / s'_x, r'_{13} = b_3 |t_1| / s'_x, t'_3 = b_4 |t_1| / s'_x, r'_{31} = b_5 |t_1|, r'_{32} = b_6 |t_1|, r'_{33} = b_7 |t_1|$ 。从 N 个特征点中选取一个特征点 $P_{wj} (j \in [1, 2, \dots, N])$, 要求它在像平面内的投影点尽量远离像平面的中心, 将点 P_{wj} 在地面坐标系内的坐标 $({}^W x_{wj}, {}^W y_{wj}, {}^W z_{wj})$ 以及 $r'_{1i}, r'_{3i} (i = 1, 2, 3), |t_1|$ 和 t'_3 的值代入式 (12) 得

$$\begin{aligned} {}^C_1 x_{wj} &= r'_{11} {}^W x_{wj} + r'_{12} {}^W y_{wj} + r'_{13} {}^W z_{wj} + |t_1|, \\ {}^C_1 z_{wj} &= r'_{31} {}^W x_{wj} + r'_{32} {}^W y_{wj} + r'_{33} {}^W z_{wj} + t'_3. \end{aligned} \quad (28)$$

将由式 (28) 计算得到的 ${}^C_1 x_{wj}$ 和 ${}^C_1 z_{wj}$ 同点 P_{wj} 在像平面内的投影点 P_{dj} 在相机坐标系 $\{C_1\}$ 内的坐标分量 ${}^C_1 x_{dj}$ 和 ${}^C_1 z_{dj}$ 进行比较, 如果对应的坐标分量符号相

同, 说明 $t_1 > 0$ 否则 $t_1 < 0$ 如果 $t_1 < 0$ 需要将 $r'_{1i}, r'_{3i} (i = 1, 2, 3)$ 和 t'_3 变号, 否则不需任何改变。

由于向量 r_1, r_2 和 r_3 互相正交, 因此由下式可确定向量 r_2 的坐标分量 $r_{2i} (i = 1, 2, 3)$ 的初值。

$$(r'_{2b}, r'_{22}, r'_{23}) = (r'_{1b}, r'_{12}, r'_{13}) \times (r'_{3b}, r'_{32}, r'_{33}). \quad (29)$$

忽略相机模型公式 (17) 中的畸变项, 即令 $k_1 = 0$ 分别将特征点 $P_{wi} (i = 1, 2, \dots, N)$ 在地面坐标系 $\{W\}$ 中的坐标及其在像平面内的投影点 $P_{di} (i = 1, 2, \dots, N)$ 在像平面坐标系中的坐标代入式 (17) 可以构建如下超定线性方程组:

$$\left[(r'_{31} {}^W x_{wi} + r'_{32} {}^W y_{wi} + r'_{33} {}^W z_{wi} + t'_3) (-{}^I_1 \hat{z}_{di}) \right] \begin{bmatrix} f \\ t_2 \end{bmatrix} = (r'_{21} {}^W x_{wi} + r'_{22} {}^W y_{wi} + r'_{23} {}^W z_{wi}) {}^I_1 \hat{z}_{di}. \quad (30)$$

应用最小二乘法求解式 (30), 并将求得的 f 和 t_2 的近似解赋值给 f' 和 t'_2 , 最后令 $k'_1 = 0$ 至此, 已经确定了向量 η_0 的所有元素的值。

按照上述方法确定的未知向量 η 的初值, 能够充分接近式 (18) 的准确解, 因此使用牛顿迭代法求解式 (18), 方法失效的可能性会非常小。

3.3 指示光斑坐标的测量

文中以光斑 A_2 为例, 说明指示光斑坐标的测量方法。如图 3 所示, 光斑 A_2 在相机 1 和相机 2 的像平面内分别成像于点 A_{21} 和 A_{22} 。假设, 相机 1 已经做过标定, 点 A_2 在地面坐标系 $\{W\}$ 内的坐标为 $(x_{a_2}, y_{a_2}, z_{a_2})$ 。观测点 A_{21} 在像平面坐标系 $\{I_1\}$ 内的坐标, 则由式 (17) 可以建立如下形式的线性方程组 (系数已知):

$$\begin{cases} a_1 x_{a_2} + b_1 y_{a_2} + c_1 z_{a_2} + d_1 = 0 \\ a_2 x_{a_2} + b_2 y_{a_2} + c_2 z_{a_2} + d_2 = 0 \end{cases} \quad (31)$$

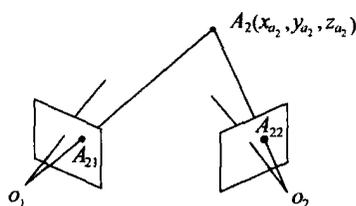


图 3 指示光斑 A_2 坐标的测量方法示意图

Fig 3 Illustration of measuring the coordinates of light spot A_2

同理,假定相机 2 已经做过标定,观测点 A_{22} 在像平面坐标系 $\{I_2\}$ 内的坐标,由式 (17)可以建立如下形式的线性方程组(系数已知):

$$\begin{cases} a_3x_{a_2} + b_3y_{a_2} + c_3z_{a_2} + d_3 = 0 \\ a_4x_{a_2} + b_4y_{a_2} + c_4z_{a_2} + d_4 = 0 \end{cases} \quad (32)$$

合并式 (31)和 (32)构造如下形式的超定线性方程组:

$$Ax + b = 0 \quad (33)$$

应用最小二乘法,求得式 (33)的解,就是指示光斑 A_2 在地面坐标系 $\{W\}$ 内的坐标.

4 误差分析

由式 (6)、(9)和 (11)得:

$$\begin{aligned} \theta &= \arcsin\left(\frac{{}^W l_{13} \cos \beta - {}^W l_{23} \cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}\right), \\ \phi &= -\arcsin\left(\frac{{}^W l_{11} \cos \beta - {}^W l_{21} \cos \alpha}{\cos \theta \sin(\alpha - \beta)}\right), \\ \gamma &= \arcsin\left(\frac{{}^W l_{13} \sin \beta - {}^W l_{23} \sin \alpha}{\cos \theta \sin(\beta - \alpha)}\right). \end{aligned} \quad (34)$$

式中: ${}^W l_{13} = (z_{a_1} - z_{a_2}) / \|{}^W L_1\|$, ${}^W l_{23} = (z_{b_1} - z_{b_2}) / \|{}^W L_2\|$, ${}^W l_{11} = (x_{a_1} - x_{a_2}) / \|{}^W L_1\|$, ${}^W l_{21} = (x_{b_1} - x_{b_2}) / \|{}^W L_2\|$.

由式 (34)得俯仰角 θ 的测量不确定度表达式为

$$\begin{aligned} u^2(\theta) &= \left(\frac{\partial \theta}{\partial z_{a_1}}\right)^2 u^2(z_{a_1}) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z_{a_2}}\right)^2 u^2(z_{a_2}) + \\ &\quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial z_{b_1}}\right)^2 u^2(z_{b_1}) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z_{b_2}}\right)^2 u^2(z_{b_2}). \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \text{式中: } \frac{\partial \theta}{\partial z_{a_1}} &= -\frac{\partial \theta}{\partial z_{a_2}} = \frac{\cos \beta}{\cos \theta \sin(\alpha - \beta) \|L_1\|}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial z_{b_1}} &= -\frac{\partial \theta}{\partial z_{b_2}} = \frac{\cos \alpha}{\cos \theta \sin(\alpha - \beta) \|L_2\|}. \end{aligned} \quad (36)$$

同理可得到偏航角 ϕ 和滚转角 γ 的测量不确定表达式.

测试系统中,屏幕长 7 m,高 6 m,2 个屏幕之间的距离为 7 m,因此, $\min(\|L_1\|) = \min(\|L_2\|) = 7$ m.令指示光斑坐标的测量不确定度为 $u(z_{a_i}) = u(z_{b_i}) = u(x_{a_i}) = u(x_{b_i}) = 0.1$ mm ($i = 1, 2$), $\theta \in [-30^\circ, 30^\circ]$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = -5^\circ$,由式 (35)得俯仰角 θ 的测量不确定度最大值为 $\max[u(\theta)] = 39''$.同理假

设 $\phi \in [-45^\circ, 45^\circ]$, $\gamma \in [-40^\circ, 40^\circ]$,由式 (36)和式 (37)可分别得偏航角 ϕ 和滚转角 γ 的测量不确定度最大值分别为: $\max[u(\phi)] = 55''$, $\max[u(\gamma)] = 5''$.由文献 [6-9]可知,光斑坐标测量不确定度不超过 0.1 mm 这种情况是不难实现的,因此文中给出的方法能够精确地测量飞行器模型的姿态.

5 结束语

通过误差分析可以看出,该方法不但可以模拟陀螺仪的实际工作环境,还可以对陀螺仪进行精确的标定,因此也提高了陀螺仪漂移误差数学模型的合理性.

参考文献:

- [1] CHO S Y, PARK C G. Calibration of a redundant MU [A]. Navigation and Control Conference, v3 [C]. [s.l.], 2004
- [2] WANG H, REN S Q, WANG C H. Research on identifying the dynamic error model of strapdown gyros on 3-axis tumble [J]. Journal of Harbin Institute of Technology (New Series), 2005, 12(6): 630-634
- [3] 肖业伦. 飞行器运动方程 [M]. 北京: 航空工业出版社, 1987
- [4] POGORELOV A V. Analytical geometry [M]. Moscow: Mir Publishers, 1984
- [5] FORSYTH D A, PONCE J. Computer vision: a modern approach [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004
- [6] TSAI R Y. A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3d machine vision metrology using off-the-shelf TV cameras and lenses [J]. IEEE Journal of Robotics and Automation, 1987, 3(4): 323-344
- [7] HONG Z Q, YANG J Y. Algorithm for camera calibration using a three-dimensional reference point [J]. Pattern Recognition, 1993, 26(11): 1655-1660
- [8] 黄象鼎, 曾钟钢, 马亚南. 非线性数值分析的理论与方法 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2004
- [9] JOAQUIM S, XAVIER A, DAN B. A comparative review of camera calibrating methods with accuracy evaluation [J]. Pattern Recognition, 2002, 35: 1617-1635

[责任编辑: 郑可为]