

# 频谱分析的校正方法

谢明 丁康

(重庆大学汽车工程系 重庆, 630044)

## 摘 要

本文提出了一种对幅值进行校正的新方法,以解决离散频谱当谱峰谱线没有对正峰顶时所带来的误差。该方法首次利用谱峰主瓣内谱线的重心求出峰顶的坐标,可得到准确频率、幅值和相位。其校正业可达细化1000倍左右的效果。

关键词: 频谱分析; 信号处理; 幅值校正; 误差

中图分类号: TN911.72; TH865

## 引 言

在频谱分析中,由DFT或FFT得到的幅值谱是离散谱线,是信号频谱与窗函数频谱做复卷积后按 $\Delta\omega=2\pi/N$ 等间隔频域抽样的结果<sup>[1]</sup>(图1)。当分析点数为 $N$ ,信号采样频率为 $f_s$ 时,谱线间隔即频率分辨率为 $f_s/N$ ,这就是频谱分析中的梳状效应。如周期信号的频率正好对正某一谱线时,则得到的频率、幅值和相位都是准确的。在通常情况下,信号频率在二条谱线之间,没有对正峰顶(主瓣中心),由峰值谱所反应的频率和幅值都不准确,相位误差更大。此时可以通过主瓣内的谱线来求主瓣中心(图1中的A点)的坐标,得到准确频率和幅值,进而可得到准确的相位,这就是频谱分析的校正方法。由于不同的窗函数有不同的主瓣形状,下面分别进行讨论。

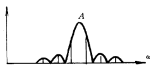


图1 频谱抽样的离散谱线

## 1 矩形谱

在频谱分析中,矩形窗的定义<sup>[2]</sup>为

$$W(n) = 1 \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1)$$

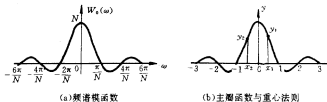
其频谱函数为

$$W(\omega) = -\frac{\sin \frac{N\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \quad (2)$$

$W(\omega)$  是一复函数, 其模为(见图 2(a)):

$$W_0(\omega) = \frac{\sin \frac{N\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \quad (3)$$

当  $\omega \rightarrow 0$  时,  $W_0(\omega) \rightarrow N$ ; 当  $\omega = \frac{2\pi}{N}K (K \pm 1, \pm 2, \dots)$  时,  $W_0(\omega) = 0$ .



(a) 频谱模函数

(b) 主瓣函数与重心法则

图 2 矩形窗谱及修正法则

在离散付氏变换中, 频率分辨率(谱线间隔)为

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N} \quad (4)$$

则

$$\omega = \Delta\omega \cdot K = \frac{2\pi}{N}K (K = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1) \quad (5)$$

由(5)式和图 2(a) 可看出矩形窗主瓣宽度为二个谱线间隔, 即主瓣内有二条谱线。当主瓣中心对正某一谱线时, 相邻谱线也对正  $W_0$  的零点, 这时没有频谱泄露发生。

将(5)式代入(3)式得

$$W_0(K) = \frac{\sin(\pi K)}{\sin(\frac{\pi K}{N})} \quad (6)$$

在  $K = \pm 1$  区间为主瓣区间, 这时因  $N \gg 1$ ,  $\frac{1}{N} \rightarrow 0$ , 所以有  $\sin(\frac{\pi K}{N}) \approx \frac{K}{N}$ , 故在主瓣区间可为

$$W_0(K) = \frac{\sin(\pi K)}{\pi K/N} = N \frac{\sin(\pi K)}{\pi K} \quad (7)$$

在用 DFT 或 FFT 的结果求幅值谱时, 为使幅值与时域相等, 要乘以系数  $1/N$ , 消去(7)式中系数  $N$ 。讨论中  $K$  不一定代表整数, 故用  $x$  代替  $K$ ,  $y$  代替  $W_0$ , 有

$$Y = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (8)$$

这就是图 2(b) 所示频谱校正所用的矩形窗主瓣函数。

对于函数  $Y=f(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$  满足下列命题

$$x \cdot f(x) + (x+1) \cdot f(x+1) = 0 \quad (9)$$

证: 
$$\begin{aligned} & x \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} + (x+1) \frac{\sin[\pi(x+1)]}{\pi(x+1)} \\ &= \frac{\sin \pi x}{\pi} + \frac{\sin(\pi x + \pi)}{\pi} = \frac{\sin \pi x}{\pi} - \frac{\sin \pi x}{\pi} = 0 \end{aligned}$$

(9)式表明在图 2(b)曲线上任取两点  $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ , 当  $|x_1 - x_2| = 1$  时, 两点的重心为座标原点, 如两点都在主瓣内, 就相当于谱线抽样的情况, 可用求重心方法来求主瓣中心的横座标。



图 3 矩形窗频率校正

图 3 表示幅值谱频域抽样的结果, 横座标用谱线序号  $K=1 \sim \frac{N}{2}-1$  表示, 所对应的频率为

$$f = K \cdot \frac{f_s}{N} \quad (10)$$

用主瓣内相邻谱峰最高的两条谱线  $K, K-1$  按重心法求主瓣重心的横座标  $x_0$  有

$$x_0 = \frac{(K-1)Y_{K-1} + KY_K}{Y_K + Y_{K-1}} = K + \frac{-Y_{K-1}}{Y_K + Y_{K-1}}$$

同理, 用  $K, K+1$  谱线求重心时有

$$x_0 = K + \frac{Y_{K-1}}{Y_K + Y_{K+1}} \quad (11)$$

令

$$x_0 = K + \Delta K$$

则得到频率校正公式

$$\Delta K = \begin{cases} \frac{Y_{K+1}}{Y_K + Y_{K+1}} & (Y_{K+1} \geq Y_{K-1}) \quad 0 \leq \Delta K \leq 1 \\ \frac{-Y_{K-1}}{Y_K + Y_{K-1}} & (Y_{K-1} > Y_{K+1}) \quad -1 \leq \Delta K \leq 0 \end{cases} \quad (12)$$

校正频率为

$$f_K = (K + \Delta K) \frac{f_s}{N} \quad (13)$$

### 1.2 矩形窗的幅值校正

图 3 中的主瓣函数为

$$Y = A \frac{\sin[\pi(x - x_0)]}{\pi(x - x_0)} \quad (14)$$

相当于(8)式乘系数  $A$  并平移到  $x=x_0$  处,  $x_0$  和  $A$  分别为分析信号的频率和幅值,  $Y, Y_{K-1}$  为主瓣内二条谱线, 按(11)、(12)式求出  $x_0$  后, 将  $x_0, Y=Y_K, x=K$  代入(14), 即可求出  $A$  值

为  $A = \frac{\pi(x_0 - K)Y_c}{\sin[\pi(x_0 - K)]}$ , 上式中  $x_0 - K = \Delta K$ , 用(12)式求出的  $\Delta K$  代入上式得幅值校正公式

$$A = \frac{\pi \Delta K Y_c}{\sin(\pi \Delta K)} \quad (15)$$

### 1.3 矩形窗的相位校正

由(2)式得矩形窗频谱函数的相位角

$$\varphi = -\frac{N-1}{2}\omega \quad (16)$$

将(5)式代入(16)得

$$\varphi = -\frac{N-1}{2} \frac{2\pi}{N} K = -\frac{N-1}{N} \pi K \quad (17)$$

在主瓣内可近似认为  $(N-1)/N \approx 1$ , 则

$$\varphi = -K\pi \quad (18)$$

这表明矩形窗的相位是线性的(见图4)。

真实信号频率函数与窗函数的频谱函数做卷积积时是复数相乘, 即相位角相加。如果谱线修正量  $\Delta K$  在  $-0.5 \sim 0.5$  之间, 由(18)式可知相位角  $\varphi$  所引入的误差  $-\frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{2}$  之间, 这说明频谱分析所得到的相位信息如不加校正完全不能用的。

相位校正量为

$$\Delta\varphi = -\Delta K\pi \quad (19)$$

设FFT实部为  $R_k$ , 虚部为  $I_k$ , 校正相位角为

$$\theta_k = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{I_k}{R_k}\right) + \Delta\varphi \quad (20)$$

因为矩形窗旁瓣最高, 在多频率存在时应选用其它窗函数, 以减少旁瓣对其它主瓣的影响。

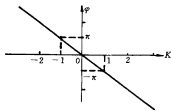


图4 矩形窗的相位

## 2 汉宁(Hanning)窗

在频谱分析中, 汉宁窗的定义<sup>[2]</sup>为

$$W(n) = a - (1-a)\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (21)$$

其频谱函数为:

$$W(\omega) = \left\{ aD(\omega) + \frac{1}{2}(1-a)\left[ D\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + D\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right) \right] \right\} e^{-j\frac{\omega}{2}N} \quad (22)$$

式中  $D(\omega) = \frac{\sin \frac{N\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j\frac{\omega}{2}N}$  为狄里赫利核, 当  $a=0.5$  为汉宁窗,  $a=0.54$  为海明窗, (22)式括号

内三项有相位差  $\frac{2\pi}{N}$ , 忽略三项之间的相位差(当  $N$  较大时误差不大), 以三项模函数之和作

为  $W(\omega)$  的模函数,并参照(6)、(7)、(8)式推导条件可得汉宁窗的主瓣函数。

$$Y = a \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} + \frac{1-a}{2} \left\{ \frac{\sin[\pi(x-1)]}{\pi(x-1)} + \frac{\sin[\pi(x+1)]}{\pi(x+1)} \right\} \\ = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \frac{a + (1-2a)x^2}{1-x^2} \quad (23)$$

上式当  $x \rightarrow 0, Y \rightarrow a$ ; 当  $x \rightarrow \pm 1$  时应用罗比塔法则有:

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{\sin(\pi x)[a + (1-2a)x^2]}{\pi x(1-x^2)} = \frac{1-a}{2} \quad (23a)$$

将  $a=0.5$  代入(23)式,其主瓣函数为

$$Y = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \frac{1}{2(1-x^2)} \quad (24)$$

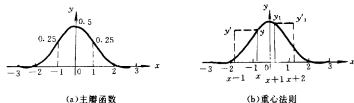


图 5 汉宁窗的谱与校正法则

对比(24)与(8)式可知,汉宁窗主瓣函数等于矩形窗主瓣函数乘上因子  $\frac{1}{2(1-x^2)}$ ,函数图形如图 5(a)所示,  $(-2, +2)$  区间为主瓣,通常主瓣内有 4 条谱线。

与矩形窗类似,函数  $Y=f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \frac{1}{2(1-x^2)}$  满足以下命题

$$xf(x) + (x+1)f(x+1) = f(x) - f(x-1) \quad (25)$$

与矩形窗(9)式不同上式等号右端不为零,而是二点之差。

证:移项并整理得

$$(x-1)f(x) + (x+2)f(x+1) = 0 \quad (26)$$

$$(x-1)f(x) = (x-1) \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \frac{1}{2(1-x^2)} = \frac{-\sin(\pi x)}{2\pi x(1+x)} \quad (27a)$$

$$(x+2)f(x+1) = (x+2) \frac{\sin[\pi(x+1)]}{\pi(x+1)} \cdot \frac{1}{2[1-(x+1)^2]} = \frac{\sin(\pi x)}{2\pi x(1+x)} \quad (27b)$$

(27a)与(27b)之和为零,得证。

(26)式表明,在图 5(b)的曲线上任取两点  $P(x, y)$ 、 $P(x_1, y_1)$ , 当  $|x-x_1|=1$  时,将左边点左移一格,右边点右移一格,这时两点的重心在坐标原点(图 5(b)中  $Y'$  点与  $Y'$  点二点的重心在原点)。(26)式对于(24)式在函数区间各点均满足,但对取绝对值的幅值谱只有在主瓣内才满足。

### 2.1 汉宁窗口的频率校正

与矩形窗类似, 用幅值谱谱峰主瓣内的两条谱线  $Y_K, Y_{K+1}$  平移后求重心坐标  $x_0$ 。

$$x_0 = \frac{(K-1)Y_K + (K+2)Y_{K+1}}{Y_K + Y_{K+1}} = K + \frac{2Y_{K+1} - Y_K}{Y_K + Y_{K+1}}$$

同理, 用  $Y_{K-1}, Y_K$  谱线求重心时有  $x_0 = K + \frac{Y_K - 2Y_{K-1}}{Y_K + Y_{K-1}}$ 。

令  $x_0 = K + \Delta K$  得到频率校正公式

$$\Delta K = \begin{cases} \frac{2Y_{K+1} - Y_K}{Y_{K+1} + Y_K} & (Y_{K+1} \geq Y_{K-1}) \\ \frac{Y_K - 2Y_{K-1}}{Y_K + Y_{K-1}} & (Y_{K+1} < Y_{K-1}) \end{cases} \quad (28)$$

求出  $\Delta K$  后代入(13)式即得校准频率。

### 2.2 汉宁窗的幅值校正

将(24)式写成

$$Y = A \frac{\sin[\pi(x - x_0)]}{\pi(x - x_0)} \cdot \frac{1}{2[1 - (x - x_0)^2]} \quad (29)$$

将  $Y = Y_K, x - x_0 = K$  代入(29)式并求出  $A$ , 校正幅值为

$$A = \frac{\pi \Delta K Y_K}{\sin(\pi \Delta K)} \cdot 2(1 - \Delta K^2) \quad (30)$$

与(15)式相比, 多了因子  $2(1 - \Delta K^2)$  部分。使用(30)式时须注意  $\sin(\pi \Delta K) \rightarrow 0$ , 以防计算溢出, 这时  $\Delta K \rightarrow 0, \Delta K \rightarrow \pm 1$ , 对(30)式有

$$\lim_{\Delta K \rightarrow 0} A = 2Y_K \quad (31)$$

$$\lim_{\Delta K \rightarrow \pm 1} A = 4Y_K \quad (32)$$

(31)、(32)式表明谱线对正主瓣中心( $\Delta K = 0$ )时, 幅值也需要校正, 这是由于加窗使时域能量衰减的缘故。

### 2.3 汉宁窗的相位校正

由(22)式可知, 汉宁窗的相位因子为

$$e^{j\pi} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

与矩形窗相同, 故可用(19)和(20)式来校正相位, 只是这时主瓣宽度为 4 个谱线间隔,  $\Delta K$  的区间为  $[-2, +2]$ , 校正量  $\Delta\varphi$  的取值范围有些不同, 如将  $\Delta\varphi$  限制在  $\pm\pi$  之间则无区别。

## 3 计算实例

用计算机产生(33)式的函数, 采样频率为 1024Hz, 作 1024 点 FFT 后, 频率间隔为 1Hz, 单边幅值谱的准确幅值为 1, 这样便于观察校正误差。分析结果及校正结果见表 1 和表

2.

$$Y = \sqrt{2} \cos(2\pi 123.3t + 10\pi/180) + \sqrt{2} \cos(2\pi 143.4t + 20\pi/180) \\ + \sqrt{2} \cos(2\pi 385.7t + 30\pi/180) \quad (33)$$

表1 多频率信号谱分析结果(加汉宁窗时幅值恢复系数为2)

矩形窗	谱峰频率(Hz)	谱峰幅值	谱峰相位(度)	汉宁窗	谱峰频率(Hz)	谱峰幅值	谱峰相位(度)
	123.0	0.947428	46.47		123.0	0.974212	46.06
143.0	0.750492	92.22	143.0	0.901448	91.94		
386.0	0.859477	-24.17	386.0	0.941722	-24.14		

表2 多频率谱分析的校正结果

窗函数	校正频率(Hz)	频率绝对误差	校正幅值	幅值绝对误差	校正相位(度)	相位绝对误差
矩形窗	123.1892	$1.077 \times 10^{-2}$	1.005624	$5.6524 \times 10^{-3}$	12.4149	2.4149
	143.4047	$4.68 \times 10^{-3}$	0.998564	$-1.436 \times 10^{-3}$	19.3747	-0.6253
	385.8000	$8.0 \times 10^{-3}$	1.001361	$1.361 \times 10^{-3}$	29.8474	-0.1526
汉宁窗	123.2005	$4.9 \times 10^{-4}$	0.999864	$-1.36 \times 10^{-4}$	0.9764	-0.0236
	143.3989	$-1.06 \times 10^{-3}$	0.999961	$-3.9 \times 10^{-5}$	20.1306	0.1306
	385.6955	$4.5 \times 10^{-3}$	1.000118	$1.18 \times 10^{-4}$	30.6762	0.6762

显然当频率间隔较远时,如本例中的 385.7Hz 这个频率成分,不论是采用矩形窗还是汉宁窗,校正精度都很高,频率和幅值绝对误差在 1% 左右,相位误差也小,当两个频率越靠近,校正精度越差,本例中 123.2Hz 与 143.4Hz 这两个频率相隔 20 条谱线,频率和幅值的校正误差明显增大,频率误差从 1% 增大到 1% 左右,幅值误差从 1% 增大到 5% 左右,相位误差也较大。从理论分析,当两个频率的间隔小于 4 个频率分辨率时,由于频谱重叠,此方法根本不适用。

## 4 结论

频谱分析的频率、幅值和相位校正方法,可大大提高离散谱分析的精度,在理论和实践上解决了精确求频率和幅值的问题,为精确测量信号参数提供了一种有效的手段。本方法具有算法简单,计算速度快的特点。不足之处在于窗函数有许多种,这里只讨论了最常用的两种,且此法不适用于频率过于密集的分析场合。

## 参考文献

- 1 E O 布赖姆著,快速富里叶变换,上海:上海科学技术出版社,1984
- 2 孙仲康著,快速傅里叶变换及其应用,北京:人民邮电出版社,1982
- 3 侯朝焕等著,快速富里叶变换,北京:海洋出版社,1990

## Rectifying Technique of Spectrum Analysis

*Xie Ming Ding Kang*

(Automobile Engineering Department, Chongqing University Chongqing, 630044)

### Abstract

This paper puts forward a new method which can rectify the spectrum peak value of amplitude spectrum in order to decrease the errors that exist when the spectrum line is not on the peak position. The method uses the center of gravity of the spectrum peak main-band to get the coordinates of the peak value so that the accurate frequency, amplitude, and phase of the spectrum peak are obtained. The rectifying precision can reach a zoom of 1,000 times.

**key words:** spectrum analysis; signal processing; amplitude rectification; errors