

振动与声学问题的计算

赵 玫 陈光冶 编

上海交通大学

振动、冲击、噪声国家重点实验室

1999年3月

引言

振动与声是日常生活中每时每刻都遇到的现象。人们利用振动与声为人类造福，改善人们的生活质量。但是，通常，人们会感到过大的振动与过高的声音带来的烦恼，情况严重时会影响人类的生命财产安全。因此研究振动与声的规律，对发展国民经济，改善人们的生活质量都具有重要的意义。

振动与声学所研究的物理本质是相同的，都是从宏观上研究物质在其平衡位置附近的运动。但是它们所研究的物质运动的结果不同。振动一般只研究振动系统内物质本身的运动状况；而声学着重研究物质的振动在介质中的传播特性。可以说振动是声的原因，声是振动的结果。一般地，振动问题研究较多的是固体的振动，而声研究较多的是物质的振动在空气和水中的传播。

鉴于振动与声具有如此密切的关系，加上振动与声学的计算方法也有相应的关系，因此开设本课程，希望本专业的学生能掌握振动与声学问题中较复杂问题的数值计算方法。

本课程的主要内容为：

- 1、 离散振动系统与连续振动系统的运动方程；
- 2、 连续振动系统的离散化方法；
- 3、 振动问题的有限元法；
- 4、 大自由度系统的近似计算；
- 5、 声学问题的基本公式；
- 6、 边界元方法在声学问题上的应用；
- 7、 声辐射与散射，结构声耦合问题的计算。

主要参考书：

- 1) L. Meirovitch, "Computational Methods in Structural Dynamics", Sijthoff & Noordhoff Intl Publishers, 1980, (O342 M514C)
- 2) D. R. Ciskowski, C. A. Brebbia ed, "Boundary Element Methods in Acoustics Computational Mechanics", 1991, (O42-32 B765B)

第 1 章 离散系统和连续系统的振动微分方程

1.1 离散系统和连续系统

系 统	自 由 度	描述系统运动的变量	运 动 方 程	方程消去时间变量后
离散系统	有 限 个	时间的函数	普通微分方程组	解联列的代数方程
连续系统	无限多个	时间和空间的位置	偏微分方程组	解微分方程的边值问题

1.2 离散系统的振动微分方程

设 n 个自由度的系统用 n 个广义坐标描述 $q_i(t)$ ($i=1, 2, 3, \dots, n$), \dot{q} 为广义坐标对时间的一阶导数, 则系统的动能为

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \quad (1.1)$$

$$\text{其中: } T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (1.2)$$

T_2 是广义速度的二次函数。

$$T_1 = \sum_{j=1}^n f_j \dot{q}_j \quad (1.3)$$

T_1 是广义速度的一次函数。 T_0 , m_{ij} 和 f_j 是广义坐标 q_i ($i=1, \dots, n$) 和时间的函数。一般地, 研究旋转振动体时, 动能中有 T_1 和 T_0 项。 T_0 项由离心力产生; T_1 项由哥氏力引起, 与旋转物体的陀螺现象相关, 称陀螺项。 T_1 项也在含流体的管道振动时出现。

系统的势能是广义坐标的函数 $V = V(q_1, q_2, \dots, q_n)$ 。弹性恢复力和重力与势能有关。 Rayleigh 耗散函数为

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (1.4)$$

其中, c_{ij} 是粘性阻尼系数, $c_{ij} = c_{ji}$ 。除粘性阻尼力外其它非保守力的虚功 $d\bar{W}$ 为

$$d\bar{W} = \sum_{i=1}^n Q_i dq_i \quad (1.5)$$

其中, Q_i 为广义力, 是时间的函数, dq_i 为广义坐标的虚位移, Lagrange 函数为

$$L = T - V \quad (1.6)$$

Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.7)$$

一般地, 方程组(1.7)是由 n 个非齐次非线性二阶微分方程组成。对非线性方程组不存在通解, 必须通过小运动假设对方程线性化。

1.3 平衡位置附近的小运动

所谓位形空间 (Configuration Space) 是以 q_i 为坐标轴的 n 维欧拉空间, 状态空间 (State Space) 是以 q_i 和 \dot{q}_i 为坐标轴的 $2n$ 维欧拉空间, 而平衡位置是状态空间中的常数解, 即 $q_i(t) = q_{i0} = \text{const}$, $\dot{q}_i(t) = \dot{q}_{i0} = 0$ 。当 $\text{const} = 0$ 时为系统的平凡平衡位置; 当 $\text{const} \neq 0$ 时为系统的非平凡平衡位置。

当系统处于平衡状态时, $\dot{q}_i(t) = 0$, $\ddot{q}_i(t) = 0$, 即方程 (1.7) 在某种条件下存在常数解, 这意味着在这种条件下方程的右端项 Q_i 为零。当 $Q_i = 0$ 时, 由于系统处于平衡状态时, $\dot{q}_i = 0$, 因此 $L = T_2 + T_1 + T_0 - V$ 中, $T_2 = T_1 = 0$, $F = 0$, L 简化为 $L = T_0 - V$, 代入式 (1.7) 得

$$-\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial (V - T_0)}{\partial q_i} = 0, \quad \text{或写成} \quad \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.8)$$

其中,

$$U = V - T_0 \quad (1.9)$$

U 称为动力势能 (是一种修改的势能)。式 (1.8) 定义了系统的平衡位置。如果 U 中含有比广义坐标二次项更高的项, 则系统有多于一个平衡位置。

在讨论平衡位置附近的小运动时, 可将广义坐标作平移, 使 $q_{i0} = \dot{q}_{i0} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。不失一般性, 可讨论在平凡平衡位置附近的小运动, 也就是指这时, 微分方程组可简化为线性微分方程组。为了得到线性化的振动微分方程, Lagrange 函数和 Rayleigh 耗散函数必须满足一定的条件, 即它们是广义速度的二次函数。

对 T_2 , 只有当 m_{ij} 为常数且对称时, 才满足线性化条件。即

$$m_{ij} = m_{ji} = \left. \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|_{\dot{q}=\dot{q}_0} = \left. \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \right|_{\dot{q}=\dot{q}_0} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.10)$$

T_2 的表达形式不变。

对 T_1 , 它本身是广义速度的一次函数, 而不是广义速度的两次函数, 因此只有当 f_j (1.3) 为广义坐标的线性函数才满足条件。可设

$$f_j = \sum_{i=1}^n f_{ij} q_i \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.11)$$

$$f_{ij} = \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.12)$$

f_{ij} 是常数。于是, T_1 可改写为

$$T_1 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f_{ij} q_i \dot{q}_j \quad (1.13)$$

对动力势能 $U(q_1, q_2, \dots, q_n)$ 在广义坐标原点展开成 Taylor 级数:

$$U(q_1, q_2, \dots, q_n) = U(0, 0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_i} q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} q_i q_j + \dots \quad (1.14)$$

按平衡位置附近小位移的假设, $U(0, 0, \dots, 0)$ 是常数, 对运动方程没有影响; U 是 q_i 和 q_j 的二次函数, 忽略高次项后有

$$U(q_1, q_2, \dots, q_n) \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j \quad (1.15)$$

$$\text{其中, } k_{ij} = k_{ji} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=0} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_i} \right|_{q=0} \quad (1.16)$$

k_{ij} 是常数, 具有对称性 ($k_{ij} = k_{ji}$), 称为刚度系数, 其中包括来自弹性势能 (V) 的弹性刚度系数和来自离心力 (T_0) 的几何刚度系。

把式(1.1)、式(1.2)、式(1.4)、式(1.6)、式(1.9)、式(1.13)和式(1.15)代入式(1.7), 有

$$\sum_{j=1}^n [m_{ij} \ddot{q}_j + (g_{ij} + c_{ij}) \dot{q}_j + k_{ij} q_j] = Q_i \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1.17)$$

其中, g_{ij} 反对称, 称为陀螺系数

$$g_{ij} = f_{ji} - f_{ij} = -g_{ji} \quad (i, j=1, 2, \dots, n) \quad (1.18)$$

另一类重要的力(循环力), 不是来自势能, 而是来自动力传递装置(曲轴、轴系、滑轮等), 有形式 $h_{ij} q_j$, 且系数 h_{ij} 反对称。

$$h_{ji} = -h_{ij} \quad (1.19)$$

加入循环功后, 系统的运动方程为

$$\sum_{j=1}^n [m_{ij} \ddot{q}_j + (g_{ij} + c_{ij}) \dot{q}_j + (k_{ij} + h_{ij}) q_j] = Q_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.20)$$

把系统在原点(平衡位置)附近作小运动的线性常系数微分方程表示成矩阵形式, 设 $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$, 引入 $n \times n$ 矩阵

$$M = [m_{ij}], G = [g_{ij}], C = [c_{ij}], K = [k_{ij}], H = [h_{ij}] \quad (1.21)$$

则方程为

$$M \ddot{q} + (G + C) \dot{q} + (K + H) q = Q \quad (1.22)$$

$$\text{其中, } M = M^T, C = C^T, K = K^T \quad (1.23)$$

M 、 C 和 K 分别为质量(惯量)、阻尼和刚度矩阵。反对称矩阵 G (陀螺矩阵或哥氏矩阵) 和 H (循环矩阵) 为

$$G = F^T - F = -G^T, H = -H^T \quad (1.24)$$

一般地, 耗散函数

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij} \dot{q}_i q_j \quad (1.25)$$

若用式(1.25)替代式(1.7)中的 F , 则能导出方程(1.20), 也可用矩阵形式表示动能、动力势能和耗散函数:

$$T_2 = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \quad (1.26a)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T F \dot{\mathbf{q}} \quad (1.26b)$$

$$F = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T C \dot{\mathbf{q}} \quad (1.27)$$

$$F' = F + \dot{\mathbf{q}}^T H \mathbf{q} \quad (1.28)$$

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T K \mathbf{q} \quad (1.29)$$

$$\text{一般地, 若有二次型 } f = X^T A X \quad (1.30)$$

A 为 $n \times n$ 实对称矩阵, X 为 n 维实向量。

正定:

如果当 X 不为零时, $f > 0$, X 全为零时, $f = 0$, 则称实二次型 f 是正定的, 矩阵 A 也是正定的;

半正定:

当 X 不全为零时, $f \geq 0$, 则称实二次型 f 半正定, A 半正定。

由于动能项 T_2 按定义是广义速度 $\dot{q}_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的正定函数, 因此 M 是正定的, C 是半正定, K 不能定。

例 1.1 导出图 1.1 所示系统的运动方程, 然后使方程组线性化, 并识别系数矩阵。已知弹簧是非线性的,

$$F_{s1}(x) = -k_1(x + \mathbf{e}_1 x^3), \quad F_{s2}(y) = -k_2(y + \mathbf{e}_2 y^3) \quad (a)$$

$$\text{动能: } T = \frac{1}{2} m[(\dot{x} - \Omega y)^2 + (\dot{y} + \Omega x)^2] \quad (b)$$

其中, Ωy 表示 $\bar{\Omega} \times \vec{y}$

$$\text{耗散能: } F = \frac{1}{2} c_1 \dot{x}_1^2 \quad (c)$$

势能: 从某一位置回到势能零点时势力作的功

$$\begin{aligned} V &= \int_x^0 F_{s1}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_y^0 F_{s2}(\mathbf{h}) d\mathbf{h} \\ &= -\int_x^0 k_1(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1 \mathbf{x}^3) d\mathbf{x} - \int_y^0 k_2(\mathbf{h} + \mathbf{e}_2 \mathbf{h}^3) d\mathbf{h} \\ &= \frac{1}{2} [k_1(x^2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 x^4)] + \frac{1}{2} [k_2(y^2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 y^4)] \end{aligned} \quad (d)$$

由式(1.6): $h = T - V$

$$= \frac{1}{2} m[(\dot{x} - \Omega y)^2 + (\dot{y} + \Omega x)^2] - \frac{1}{2} [k_1(x^2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 x^4)] - \frac{1}{2} [k_2(y^2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 y^4)]$$

代入方程(1.7), 对 x 有:

$$m(\ddot{x} - \Omega \dot{y}) + c_1 \dot{x} - m(\dot{y} + \Omega x)\Omega + k_1(x + \mathbf{e}_1 x^3) = 0$$

$$m\ddot{x} - 2m\Omega \dot{y} + c_1 \dot{x} - m\Omega^2 x + k_1(x + \mathbf{e}_1 x^3) = 0$$

对 y 有:

$$m\ddot{y} + m\Omega \dot{x} - m(\dot{x} - \Omega y)(-\Omega) + k_2(y + \mathbf{e}_2 y^3) = 0$$

$$m\ddot{y} + 2m\Omega \dot{x} - m\Omega^2 y + k_2(y + \mathbf{e}_2 y^3) = 0$$

线性化只要令 $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = 0$ 即可

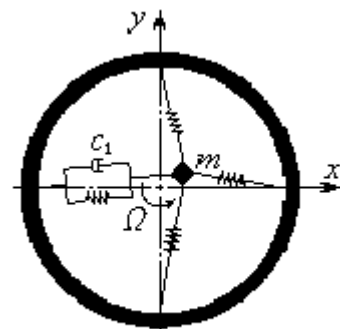


图 1.1

$$\begin{aligned} \therefore M &= \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} & G &= \begin{bmatrix} 0 & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{bmatrix} & c &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} k_1 - m\Omega^2 & 0 \\ 0 & k_2 - m\Omega^2 \end{bmatrix} & H &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ Q &= [0 \quad 0]^T \end{aligned}$$

直接从 T 、 V 、 F 得到矩阵：

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\Omega(xy - \dot{x}y) + \frac{1}{2}m\Omega^2(x^2 + y^2) \\ T_2 &= \frac{m}{2}[\dot{x} \quad \dot{y}] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} & T_1 &= [x \quad y] \begin{bmatrix} 0 & m\Omega \\ -m\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \\ T_0 &= \frac{1}{2}[x \quad y] \begin{bmatrix} m\Omega^2 & 0 \\ 0 & m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

线性化后的 V ：

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}[x \quad y] \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & F &= \frac{1}{2}[\dot{x} \quad \dot{y}] \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \\ \therefore M &= \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} & F &= \begin{bmatrix} 0 & m\Omega \\ -m\Omega & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$G = F^T - F \begin{bmatrix} 0 & -m\mathbf{W} \\ m\mathbf{W} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & m\mathbf{W} \\ -m\mathbf{W} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2m\mathbf{W} \\ 2m\mathbf{W} & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = V - T_0 = \frac{1}{2}[x \quad y] \begin{bmatrix} k_1 - m\Omega^2 & 0 \\ 0 & k_2 - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 - m\Omega^2 & 0 \\ 0 & k_2 - m\Omega^2 \end{bmatrix}$$

显然，矩阵 M 是正定的，矩阵 C 是半正定的。当 $k_1 > m\Omega^2$ 和 $k_2 > m\Omega^2$ ，矩阵 K 是正定的； $k_1 = m\Omega^2$ 和 $k_2 = m\Omega^2$ 或 $k_1 > m\Omega^2$ 和 $k_2 = m\Omega^2$ ，矩阵 K 是半正定的； $k_1 > m\Omega^2$ 和 $k_2 < m\Omega^2$ 或 $k_1 < m\Omega^2$ 和 $k_2 > m\Omega^2$ 矩阵 K 是不定的

1.4 连续系统

1.4.1 连续系统的 Lagrange 方程 边值问题

连续系统又称分布参数系统，它们的运动不仅依赖于时间，而且依赖于空间位置，因此用偏微分方程来描述。一般分布参数系统处于三维空间域中，为了讨论这类系统的共同特性，采用一维空间域讨论。

讨论在域 $0 \leq x \leq L$ 上定义的系统， x 是系统中任何质点在空间的位置。通常，用 $w(x, t)$ 表示系统中各点偏离给定参考位置的位移函数。

设系统的动能为：

$$T(t) = \int_0^L \hat{T}(x, t) dx \quad (1.31)$$

其中, $\hat{T}(x, t)$ 为动能密度, $\hat{T}(x, t) = \hat{T}(\dot{w}, \dot{w}')$ (1.32)

“ \cdot ” 和 “ $'$ ” 分别为对时间 t 和坐标 x 的偏导数。

$$\text{设: 虚功为 } dW(t) = \int_0^L d\hat{W}(x, t) dx \quad (1.33)$$

其中虚功密度 $d\hat{W}(x, t)$ 可写成两项

$$d\hat{W}(x, t) = d\hat{W}_c(x, t) + d\hat{W}_{nc}(x, t) \quad (1.34)$$

其中, $d\hat{W}_c(x, t)$ 为保守力的虚功密度, $d\hat{W}_{nc}(x, t)$ 为非保守力的虚功密度。

$$d\hat{W}_c(x, t) = -d\hat{V}(x, t) \quad (1.35)$$

其中, $\hat{V}(x, t)$ 是势能密度, 可写成

$$\hat{V}(x, t) = \hat{V}(w, w', w'') \quad (1.36)$$

用 $p(x, t)$ 表示分布的非保守力, 非保守力的虚功密度为

$$dW_{nc}(x, t) = p(x, t)dw(x, t) \quad (1.37)$$

其中, $dw(x, t)$ 是域中任一点的虚位移。

Hamilton 原理:

在任何时间区段 (t_1, t_2) 中, 动能、变形能、阻尼力和外力所作功的变分为零, 这时所得到的才是真正的运动。

利用拓展的 Hamilton 原理, 设 T 为系统的动能, dW 是势力和非势力的虚功, 则在相同的时间、相同的始终位置和相同的约束条件下, 在所有约束允许的可能运动中, 真实运动是下述变分问题的解:

$$\int_{t_1}^{t_2} (dT + dW) dt = 0 \quad t = t_1, t_2, \quad dw = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (1.38)$$

其中, t_1, t_2 是任意时间, 把式(1.31)至式(1.35)代入式(1.38), 可以得到

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (d\hat{L} + d\hat{W}_{nc}) dx dt = 0 \quad t = t_1, t_2, \quad dw = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (1.39)$$

其中, $\hat{L} = \hat{T} - \hat{V} = \hat{L}(w, w', w'', \dot{w}, \dot{w}')$ (1.40)

称为 Lagrangian 密度, 其变分为

$$d\hat{L} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial w} dw + \frac{\partial \hat{L}}{\partial w'} dw' + \frac{\partial \hat{L}}{\partial w''} dw'' + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}} d\dot{w} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}'} d\dot{w}' \quad (1.41)$$

把式(1.37)和式(1.41)代入式(1.39)得

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial w} dw + \frac{\partial \hat{L}}{\partial w'} dw' + \frac{\partial \hat{L}}{\partial w''} dw'' + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}} d\dot{w} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}'} d\dot{w}' + p dw \right) dx dt = 0 \quad (1.42)$$

通过分部积分, 把式(1.42)转变成只包含 dw , 即不含 dw' , dw'' , $d\dot{w}$, $d\dot{w}'$ 项。

$$\int_0^L \frac{\partial \hat{L}}{\partial w'} dw' dx = \int_0^L \frac{\partial \hat{L}}{\partial w'} d(dw) = \frac{\partial \hat{L}}{\partial w'} dw \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial w'} \right) dw dx \quad (1.43a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\partial \hat{L}}{\partial w''} dw'' dx &= \frac{\partial \hat{L}}{\partial w''} dw'' \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial w''} \right) dw'' dx \\ &= \frac{\partial \hat{L}}{\partial w''} dw'' \Big|_0^L - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial w''} \right) dw'' \Big|_0^L + \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial w''} \right) dw'' dx \end{aligned} \quad (1.43b)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}} d\dot{w} dt = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}} d\dot{w} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}} \right) d\dot{w} dt \quad (1.43c)$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}'} \mathbf{d}\dot{w}' dx dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}'} \mathbf{d}\dot{w}' \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}'} \right) \mathbf{d}\dot{w}' dx \right] dt \\
&= \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}'} \mathbf{d}\dot{w}' \Big|_0^{L} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}'} \right) \mathbf{d}\dot{w}' \Big|_0^L dt - \left[\int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}'} \right) \mathbf{d}\dot{w}' dx \right] \Big|_{t_1}^{t_2} \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}'} \right) \mathbf{d}\dot{w}' dx dt
\end{aligned} \tag{1.43d}$$

把式(7.13)代入式(7.12)，并利用 $\mathbf{d}w = 0$ 在 $t = t_1, t_2$ ，使式(1.42)成为

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left[\frac{\partial \hat{L}}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial w'} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial w''} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}'} \right) + p \right] \mathbf{d}w dx \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\partial \hat{L}}{\partial w'} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial w''} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}'} \right) \right] \mathbf{d}w \Big|_0^L + \frac{\partial \hat{L}}{\partial w''} \mathbf{d}w' \Big|_0^L \right\} dt = 0
\end{aligned} \tag{1.44}$$

由于 $\mathbf{d}w$ 是虚位移，是系统的任意可能位移，满足系统的约束条件，因此 $\mathbf{d}w = \mathbf{d}w' = 0 (x = 0, x = L)$ 是可取的虚位移的一种。在这种情况下，由于在域 $0 < x < L$ 中 $\mathbf{d}w$ 不为零，系统在域 $0 < x < L$ 中必须满足下式

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial w'} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial w''} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}'} \right) + p = 0 \quad 0 < x < L \tag{1.45}$$

而边界上，如果满足

$$\left[\frac{\partial \hat{L}}{\partial w'} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial w''} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}'} \right) \right] \mathbf{d}w \Big|_0^L = 0 \tag{1.46a}$$

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial w''} \mathbf{d}w' \Big|_0^L = 0 \tag{1.46b}$$

在边界对式(1.46a)使

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial w'} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial w''} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}'} \right) = 0 \quad \text{在 } x = 0, L \tag{1.47a}$$

$$\text{或 } \mathbf{d}w = 0, \quad \text{在 } x = 0, L \tag{1.47b}$$

对式(1.46b)使

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial w''} = 0 \quad \text{在 } x = 0, L \tag{1.48a}$$

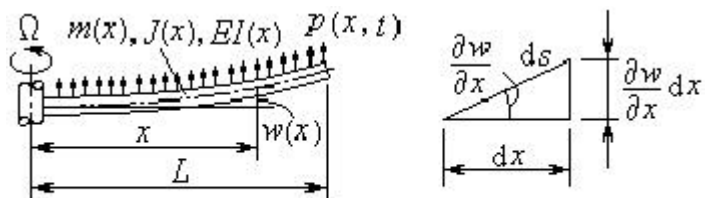
$$\text{或 } \mathbf{d}w' = 0 \quad \text{在 } x = 0, L \tag{1.48b}$$

总之，式(1.45)是连续系统在域 $0 < x < L$ 上必须满足的 Lagrange 运动微分方程，而边界条件可以取式(1.46)，或在 $x = 0$ 和 $x = L$ 这两端从式(1.47a)和式(1.47b)以及式(1.48a)和式(1.48b)中各选一个作为边界条件。但是边界条件必须反映系统两端的物理条件。

实际上方程(1.45)和式(1.47)以及式(1.48)既包括微分方程的初值问题，又包括了边值问题，即它们既要满足初始条件，又要满足边界条件。但它与边值问题更接近，因此下面称它们为边值问题。

边界条件有两类，第一类是边界的几何约束，第二类是边界的力和力矩平衡，可通过实际例子来理解。

例 1.2 一根处于弯曲状态的杆，它的一端与以等角速



度 Ω 旋转的轴刚性固定连接，另一端自由，杆上受载荷 $p(x,t)$ ，杆长为 L ，推导它的振动微分方程。(见图 1.2)

$$\text{动能: } T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) [\dot{w}(x,t)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L J(x) [\dot{w}'(x,t)]^2 dx \quad (1.49)$$

其中，第一项为平动动能，第二项为转动动能， $m(x)$ 为杆的单位长度质量， $J(x)$ 为单位长度转动惯量（质量惯性矩）， $\dot{w}(x,t)$ 为杆上 x 处长度为 dx 微单元的速度， $\dot{w}'(x,t)$ 为杆上 x 处长度为 dx 微单元的角速度。

势能：由两部分组成：一部分由弯曲引起，另一部分由使杆在轴向（ x 向）缩短的轴向力引起。

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) [w''(x,t)]^2 dx + \int_0^L P(x,t) (ds - dx) \quad (1.50)$$

其中， $EI(x)$ 为弯曲刚度， $P(x,t)$ 为离心力引起的轴向力。

$$P(x,t) = P(x) = \int_x^L m(\mathbf{x}) \Omega^2 \mathbf{x} d\mathbf{x} \quad (1.51)$$

因为 Ω 是常数，所以 $P(x)$ 表示 x 处的离心力，是由 $x \rightarrow L$ 以外的质量引起的。

$$ds - dx = \{(dx)^2 + [w'(x,t)dx]^2\}^{1/2} - dx \approx \frac{1}{2} [w'(x,t)]^2 dx \quad (1.52)$$

把式(1.51)和式(1.52)代入式(1.50)：

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) [w''(x,t)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left[\int_x^L m(\mathbf{x}) \Omega^2 \mathbf{x} d\mathbf{x} \right] [w'(x,t)]^2 dx \quad (1.53)$$

由杆的自重所作的虚功为：（处理为非保守力）

$$dW_{nc} = - \int_0^L m(x) g dw(x,t) dx \quad (1.54)$$

从式(1.49)和式(1.53)可得 Lagrange 密度：

$$\hat{L} = \frac{1}{2} m \dot{w}^2 + \frac{1}{2} J (\dot{w}')^2 - \frac{1}{2} EI (w'')^2 - \frac{1}{2} \left(\int_x^L m \Omega^2 \mathbf{x} d\mathbf{x} \right) (w')^2 \quad (1.55)$$

$$\text{分布力 } p = -mg \quad (1.56)$$

计算方程(1.45)中的每一项：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{L}}{\partial w} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial w'} \right) &= m \Omega^2 x w' - \left(\int_x^L m \Omega^2 \mathbf{x} d\mathbf{x} \right) w'' \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial w''} \right) &= - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI w'') \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}} \right) &= m \ddot{w} \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}'} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} (J \dot{w}') = \frac{\partial}{\partial x} (J \ddot{w}')$$

所以，系统在 $0 < x < L$ 满足方程：

$$-m \Omega^2 x w' + \left(\int_x^L m \Omega^2 \mathbf{x} d\mathbf{x} \right) w'' - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI w'') - m \ddot{w} + \frac{\partial}{\partial x} (J \ddot{w}') - mg = 0 \quad (1.58)$$

与边界条件有关的项为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{L}}{\partial w'} &= -\left(\int_x^L m\Omega^2 \mathbf{x} d\mathbf{x}\right)w' \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial w''}\right) &= -\frac{\partial}{\partial x} (EIw'') \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{w}'}\right) &= J\ddot{w}' \\ \frac{\partial \hat{L}}{\partial w''} &= -EIw'' \end{aligned} \quad (1.59)$$

因而，边界条件式(1.47a)取下列形式：

$$-\left(\int_x^L m\Omega^2 \mathbf{x} d\mathbf{x}\right)w' + \frac{\partial}{\partial x} (EIw'') - J\ddot{w}' = 0 \quad (x=0, L) \quad (1.60)$$

而式(1.48a)取如下的形式：

$$-EIw'' = 0 \quad (x=0, L) \quad (1.61)$$

因此，在 $x=0$ ，边界条件(1.47b)或(1.60)以及边界条件(1.48b)或(1.61)必须满足。

$x=0$ 为固定端，取(1.47b)和(1.48b)，称为几何边界条件：

$$w(0, t) = 0 \quad (1.62a)$$

$$w'(x, t)|_{x=0} = 0 \quad (1.62b)$$

在 $x=L$ 端为自由端，取式(1.60)和式(1.61)：

$$\text{由于 } \int_L^L m\Omega^2 \mathbf{x} d\mathbf{x} = 0$$

$$\text{所以 } \frac{\partial}{\partial x} [EIw''(x, t)]|_{x=L} = J\ddot{w}'(x, t)|_{x=L} \quad (1.63a)$$

$$EIw''(x, t)|_{x=L} = 0 \quad (1.63b)$$

式(1.63)称为动力边界条件或自然边界条件。

对固定端只有几何边界条件，对自由端只有动力边界条件，而对铰链则为一个动力边界条件，一个几何边界条件。

初始条件为：

$$w(x, 0) = w_0(x) \quad (1.64a)$$

$$\dot{w}(x, t)|_{t=0} = \dot{w}_0(x) \quad (1.64b)$$

考察方程(1.58)和式(1.62)至式(1.64)，由于 $m(x)g$ 将产生准静平衡变形 $w_{st}(x)$ ，因此，通过理解 $w(x, t)$ 是相对于 $w_{st}(x)$ 度量的， $m(x)g$ 能从式(1.58)中略去。

1.4.2 特征值问题

在方程(1.58)和边界条件(1.62)、(1.63)中，设 $w(x)$ 为偏离平衡位置的位移，则方程(1.58)中 $-mg$ 可忽略，由于无外力，是自由振动问题。

设： w 可分离，即在任何时刻，域中各点振动位移之比不变。

$$w(x, t) = W(x)F(t) \quad (1.65)$$

将(1.65)代入式(1.58)：

$$\left[-mW^2xW' + \left(\int_x^L mW^2\mathbf{x}d\mathbf{x}\right)W'' - \frac{d^2}{dx^2}(EIW'')\right]F = \left(mW - \frac{d}{dx}JW'\right)\ddot{F} \quad 0 < x < L$$

(1.66)

$$\text{式(1.62): } W(0)F = 0 \quad (1.67a)$$

$$W' \Big|_{x=0} F = 0 \quad (1.67b)$$

$$\text{式(1.63): } \left[\frac{d}{dx} (EIW'') \right]_{x=L} F = (JW') \Big|_{x=L} \ddot{F} \quad (1.68a)$$

$$(EIW'') \Big|_{x=L} F = 0 \quad (1.68b)$$

式(1.66)两边同除 $-F(mW - \frac{d}{dx} JW')$:

$$\frac{m\Omega^2 xW' - \left(\int_x^L m\Omega^2 \mathbf{x} d\mathbf{x} \right) W'' + \frac{d^2}{dx^2} (EIW'')}{mW - \frac{d}{dx} JW'} = \frac{-\ddot{F}}{F} = \mathbf{I} \quad (1.69)$$

$$\ddot{F} + \mathbf{I}F = 0 \quad (1.70)$$

$$\text{设: } F(t) = Ae^{st} \quad (1.71)$$

代入式(1.70)得:

$$s^2 + \mathbf{I} = 0 \quad (1.72)$$

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{-\mathbf{I}} \quad (1.73)$$

$$F(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} = A_1 e^{\sqrt{-\mathbf{I}} t} + A_2 e^{-\sqrt{-\mathbf{I}} t} \quad (1.74)$$

当 $\mathbf{I} < 0$, s_1 和 s_2 为实数, 其中一正, 一负, 运动无界, 这种情况与平衡位置小位移无关, 不讨论。 $\mathbf{I} > 0$, 设 $\mathbf{I} = \mathbf{w}^2$, 则有

$$s_{1,2} = \pm i\mathbf{w} \quad (1.75)$$

式(1.74)成为

$$F(t) = A_1 e^{i\mathbf{w}t} + A_2 e^{-i\mathbf{w}t} \quad (1.76)$$

由于 $F(t)$ 必须是实数, $A_1 = \overline{A_2}$, 式(1.76)表示系统作频率为 \mathbf{w} 的简谐运动。由式(1.69)左边:

$$m\Omega^2 xW' - \left(\int_x^L m\Omega^2 \mathbf{x} d\mathbf{x} \right) W'' + \frac{d^2}{dx^2} (EIW'') = \mathbf{I} \left[mW - \frac{d}{dx} (JW') \right] \quad 0 < x < L \quad (1.77)$$

$$\text{边界条件(1.67): } W(0) = 0 \quad (1.78a)$$

$$W' \Big|_{x=0} = 0 \quad (1.78b)$$

$$\text{边界条件(1.68): } -\left[\frac{d}{dx} (EIW'') \right]_{x=L} = \mathbf{I} (JW') \Big|_{x=L} \quad (1.79a)$$

$$(EIW'') \Big|_{x=L} = 0 \quad (1.79b)$$

求满足方程(1.77)与边界条件(1.78)、(1.79)的非平凡解 $\mathbf{w}(x)$ 称为分布参数或连续系统的特征值问题。

方程最高四阶, 四个积分常数加一个特征值 \mathbf{I} , 共五个未知数, 而只有四个边值条件。先解方程(1.77), 代入边界条件中的三个条件可确定用第四个常数表示的三个常数, 但第四个常数是唯一的。而有一个边界条件得到一个关于 \mathbf{I} 的方程, 一般是超越方程, 它称为特征方程或频率方程, 有一个满足特征方程的 \mathbf{I} 值的无限可数集合, 即 $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots$, 它们称为特征值。与特征值相对应, 有一个称为特征函数的无限可数集合 W_1, W_2, \dots 。由于四个积分常数不能唯一确定, 因此特征

函数只给出振型，而不给出幅值。 $\mathbf{w}_r = \sqrt{I_r}$ ， $(r=1,2,\dots)$ 为系统的固有频率。相应地，特征函数 W_r ($r=1,2,\dots$)也称为固有振型(模态)，同样也有正则振型(模态)。

尽管特征值问题(1.77)–(1.79)只是一个例子，但它代表着一类自共轭系统的问题，当边界条件给定，解是唯一的，尽管方程相同，只要边界条件不同，那么解也将不同。

事实上，特征值问题(1.77)–(1.79)没有封闭解，因此下面将不具体地解这类问题，而是讨论这一类问题的共性，以便寻找近似解的求解方法。

1.4.3 自共轭系统

为了讨论自共轭系统的特性，一般地可设 w 是空间位置变量 x 的函数，讨论 w 的线性齐次微分表达式：

$$Lw = A_0(x)w + A_1(x)\frac{dw}{dx} + \dots + A_{2p}(x)\frac{d^{2p}w}{dx^{2p}} \quad (1.80)$$

其中， $A_0(x), \dots, A_{2p}(x)$ 是已知函数， Lw 是函数 w 和其 $2p$ 阶导数的齐次线性组合，称为 $2p$ 阶微分表达式， L 为线性齐次微分算子：

$$L = A_0(x) + A_1(x)\frac{d}{dx} + \dots + A_{2p}(x)\frac{d^{2p}}{dx^{2p}} \quad (1.81)$$

其中， $A_0(x), \dots, A_{2p}(x)$ 是 x 的函数，并不影响算子的线性。

设 M 是与 L 类似的算子，但阶次为 $2q$ 阶， $q < p$ ，微分方程为

$$Lw = \mathbf{I}Mw \quad (1.82)$$

其中 \mathbf{I} 是一个参数，方程(1.82)定义在域 $0 < x < L$ 中，且 w 必须满足边界条件：

$$B_i w = \mathbf{I}C_i w \quad i=1,2,\dots,p \quad x=0, L \quad (1.83)$$

其中 B_i 和 C_i 是线性齐次微分算子， B_i 和 C_i 的最高阶次分别为 $2p-1$ 和 $2q-1$ 。特征值问题包括求得使非平凡函数 w 满足方程(1.82)和边界条件(1.83)的参数 \mathbf{I} 。参数 \mathbf{I} 的值和函数 w 分别是系统的特征值和特征函数。

对公式(1.77)–(1.79)表示的特征值问题， L 、 M 、 B_i 、 C_i 分别为：

$$L = m\Omega^2 x \frac{d}{dx} - \left[\left(\int_x^L m\Omega^2 \mathbf{x} d\mathbf{x} \right) - E \frac{d^2 I}{dx^2} \right] \frac{d^2}{dx^2} + 2E \frac{dI}{dx} \frac{d^3}{dx^3} + EI \frac{d^4}{dx^4} \quad (1.84a)$$

$$M = m - \frac{dJ}{dx} \frac{d}{dx} - J \frac{d^2}{dx^2} \quad (1.84b)$$

$$x=0 \text{ 时, } B_1 = 1, C_1 = 0, B_2 = \frac{d}{dx}, C_2 = 0 \quad (1.84c)$$

$$x=L \text{ 时, } B_1 = -E \frac{dI}{dx} \frac{d^2}{dx^2} - EI \frac{d^3}{dx^3}, C_1 = J \frac{d}{dx}, B_2 = EI \frac{d^2}{dx^2}, C_2 = 0 \quad (1.84d)$$

可以看出， $p=2$ ， $q=1$ 。

式(1.82)和式(1.83)表示的特征值问题也能写成二维或三维域的形式，其中算子形式会出现对不同空间位置变量的偏导数，域的边界形式也不同。

在求解特征值问题之前，先引入有关函数的一些定义。

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是实函数且分段光滑，即在域 $D: 0 \leq x \leq L$ 中分段连续，分段有一阶导数。定义两个函数的内积为：

$$(f, g) = \int_0^L f g dx \quad (1.85)$$

若函数 f 和 g 正交, 则有: $(f, g) = 0$

$$\text{函数 } f \text{ 的模 } \|f\|: \|f\|^2 = (f, f) = \int_0^L f^2 dx \quad (1.86)$$

具有单位模的正交函数称为正则正交函数。函数的模存在, 称它在域 D 中平方可加, 意味着函数 f^2 在 Lebesgue 意义上可积。

模有界的函数 ($\|f\| < \infty$) 称为有有限能量, 这样的函数空间定义为 K^0 , 上标指对函数 f 导数的阶次为 0。

线性独立:

设 n 个函数的集合为 f_1, f_2, \dots, f_n , $c_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为常数,

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n = 0 \quad (1.87)$$

如果只有当所有的 $c_i (i=1, 2, \dots, n)$ 都为零时, 式(1.87)才成立, 则称函数 f_1, f_2, \dots, f_n 线性独立。否则, 称它们线性相关。

线性独立的函数集中所有函数之间两两正交。正交函数集必定线性独立。设式(1.87)中的函数 f_1, f_2, \dots, f_n 之间两两正交, 在两边乘 f_s 并在区间 $0 \leq x \leq L$ 积分, 得

$$\sum_{r=1}^n c_r \int_0^L f_s f_r dx = \sum_{r=1}^n c_r \|f_s\|^2 d_{rs} = c_s \|f_s\|^2 = 0 \quad s=1, 2, \dots, n \quad (1.88)$$

由于 $\|f_s\|^2 \neq 0 \therefore c_s = 0 (s=1, 2, \dots, n) \therefore f_1, f_2, \dots, f_n$ 线性独立。

任意函数 f 与正则正交函数集 $f_r (r=1, 2, \dots)$ 之间的关系:

$$\text{设 } c_r = (f, f_r) = \int_0^L f f_r dx \quad (r=1, 2, \dots) \quad (1.89)$$

称 c_r 为 f 对正则正交系统的分量, 即 f 用 f_r 的线性组合表示时的常数系数, f 与 f_r 线性组合差的模平方为:

$$\left\| f - \sum_{r=1}^n c_r f_r \right\|^2 = \int_0^L (f - \sum_{r=1}^n c_r f_r)^2 dx \geq 0 \quad (1.90)$$

展开式(1.90)中的积分:

$$\int_0^L f^2 dx - 2 \sum_{r=1}^n c_r \int_0^L f f_r dx + \sum_{r=1}^n c_r^2 = \|f\|^2 - \sum_{r=1}^n c_r^2 \geq 0 \quad (1.91)$$

$$\text{由(1.91)式得: } \|f\|^2 \geq \sum_{r=1}^n c_r^2 \quad (1.92)$$

由于 $\|f\|^2$ 与 n 无关, 因而可得 Bessel 不等式

$$\|f\|^2 \geq \sum_{r=1}^{\infty} c_r^2 \quad (1.93)$$

设 $f(x)$ 可用正则正交函数集 $f_r (r=1, 2, \dots)$ 的线性组合近似地表示为 $\sum_{r=1}^n d_r f_r$, 为了得到对 $f(x)$ 最好的近似, 可设均方误差为:

$$M = \int_0^L (f - \sum_{r=1}^n d_r f_r)^2 dx \quad (1.94)$$

展开式(1.94)中的积分:

$$M = \int_0^L f^2 dx - 2 \sum_{r=1}^n d_r \int_0^L f f_r dx + \sum_{r=1}^n d_r^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_{r=1}^n d_r c_r + \sum_{r=1}^n d_r^2$$

$$= \|f\|^2 + \sum_{r=1}^n (d_r - c_r)^2 - \sum_{r=1}^n c_r^2 \quad (1.95)$$

显然 $d_r = c_r$ 时, M 取最小值, 即用“分量”作线性组合系数时, 给出对 f 最好的近似。任一个分段连续函数 f 用一系列正则正交函数近似, 称为平均意义上的近似。若 n 足够大, 使均方误差 $\int_0^L (f - \sum_{r=1}^n c_r \mathbf{f}_r)^2 dx$ 能小于任意小的正数, 那么函数集 $\mathbf{f}_r (r=1,2,\dots)$ 称为完备函数集。对完备函数集, Bessel 不等式取等号。

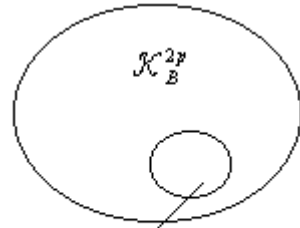
$$\text{引入符号 } f_n = \sum_{r=1}^n c_r \mathbf{f}_r \quad (n=1,2,\dots) \quad (1.96)$$

$$\text{若 } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0 \quad (1.97)$$

则序列 f_1, f_2, \dots 在平均意义上收敛于函数 f 。

实际上, 如果任何分段连续函数能用一组函数的线性组合以任何要求的精度在平均意义上近似地表示, 那么这组函数是完备的, 它不必具备正则正交的条件。

上述有关函数及完备函数集的概念有利于对特征值问题(1.82)-(1.83)的讨论。由于微分方程(1.82)含有 $2p$ 阶导数, 可用 K_B^{2p} 表示函数空间, 其中函数 w 的 $2p$ 阶导数有有限能量, 同时 w 满足边界条件(1.83), 称 K_B^{2p} 空间中的函数为比较函数。比较函数不必满足方程, 因此它包含了作为子空间的特征函数空间。



特征函数空间

图 1.3

为了简单, 讨论如下的特征值问题:

$$Lw = \mathbf{I}mw \quad 0 < x < L \quad (1.98a)$$

$$B_i w = 0 \quad i=1,2,\dots,p \quad x=0,L \quad (1.98b)$$

其中 m 为单位长度的质量。

设 u 和 v 为两个比较函数, 定义一个内积为:

$$(u, Lv) = \int_0^L uLv dx \quad (1.99)$$

自共轭系统: 若微分算子 L 和由特征值问题(1.98)描述的系统使式(1.100)成立, 则算子 L 和系统称为自共轭算子和自共轭系统。

$$(u, Lv) = (v, Lu) \quad (1.100)$$

对自共轭系统具有对称性:

$$\int_0^L uLv dx = \int_0^L \sum_{k=0}^p a_k \frac{d^k u}{dx^k} \frac{d^k v}{dx^k} dx + \sum_{l=0}^{p-1} b_l \left. \frac{d^l u}{dx^l} \frac{d^l v}{dx^l} \right|_0^L \quad (1.101)$$

其中, $a_k (k=1,2,\dots,p)$ 和 $b_l (l=1,2,\dots,p-1)$ 一般是 x 的函数。

$$\text{记 } [u, v] = \int_0^L \sum_{k=0}^p a_k \frac{d^k u}{dx^k} \frac{d^k v}{dx^k} dx + \sum_{l=0}^{p-1} b_l \left. \frac{d^l u}{dx^l} \frac{d^l v}{dx^l} \right|_0^L \quad (1.102)$$

$[u, v]$ 称为能量内积。

可以看出, 式(1.102)积分中只含 u, v 及其 p 阶导数, 而边界条件只含 $p-1$ 阶导数 (相应于几何边界条件)。因此, u, v 只要满足 p 阶导数在 $(0 \leq x \leq L)$ 域中为有限能量且仅满足几何边界条件。定义这样的 u, v 组成的空间为 K_G^p , 称为能量空间, u, v 称为能量函数 (或允许函数)。显然, 能量空间包含了作为子空

间的比较函数组成的空间 K_B^{2p} 。 $K_G^p \supset K_B^{2p}$ 。

当 $u = v$ 时, 有

$$[u, u] = \int_0^L \sum_{k=0}^p a_k \left(\frac{d^k u}{dx^k} \right)^2 dx + \sum_{l=0}^{p-1} b_l \left(\frac{d^l u}{dx^l} \right)^2 \Big|_0^L \quad (1.103)$$

可理解为特征值问题(1.98)表示系统的最大势能的两倍。用能量内积可定义能量模:

$$|u| = [u, u]^{1/2} \quad (1.104)$$

引入序列:

$$u_n = \sum_{r=1}^n c_r \mathbf{f}_r \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.105)$$

如果当 n 足够大时, $|u - u_n|^2$ 小于任意小的正数 ϵ , 则称函数 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots$ 在能量意义上是完备的。

若序列 u_1, u_2, \dots , 如果满足(1.106)式, 则称它在能量意义上收敛于 u 。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u - u_n| = 0 \quad (1.106)$$

正定算子和正定系统:

式(1.98)表示的系统, 对任何比较函数 u , 若当且仅当 $u = 0$ 时(1.107)式等号成立, 称算子 L 和系统为正定的。

$$(u, Lu) = \int_0^L u L u dx \geq 0 \quad (1.107)$$

系统和算子正定时, 特征值 $\mathbf{I} > 0$, 等价于系统稳定。当式(1.107)中 $u \neq 0$ 时等号成立, 则系统为半正定, 有零特征值, 系统能作刚体运动。

自共轭系统特征函数的正交性:

讨论特征值问题(1.98), 两个不同的特征值为 \mathbf{I}_r 和 \mathbf{I}_s , 对应的特征函数为 w_r 和 w_s , 则有

$$L w_r = \mathbf{I}_r m w_r \quad (1.108a)$$

$$L w_s = \mathbf{I}_s m w_s \quad (1.108b)$$

$$\int_0^L w_s L w_r dx = \mathbf{I}_r \int_0^L m w_r w_s dx \quad (1.109a)$$

$$\int_0^L w_r L w_s dx = \mathbf{I}_s \int_0^L m w_r w_s dx \quad (1.109b)$$

把式(1.109a) - 式(1.109b)得:

$$\int_0^L w_s L w_r dx - \int_0^L w_r L w_s dx = (\mathbf{I}_r - \mathbf{I}_s) \int_0^L m w_r w_s dx \quad (1.110)$$

$$\therefore \int_0^L m w_r w_s dx = 0 \quad (\mathbf{I}_r \neq \mathbf{I}_s) \quad (1.111)$$

自共轭系统相应于不同特征值的特征函数对质量函数 m 正交。若特征函数加权 \sqrt{m} , 则加权的特征函数以普通的方式正交。

$$(\sqrt{m} w_r, \sqrt{m} w_s) = 0 \quad (\mathbf{I}_r \neq \mathbf{I}_s) \quad (1.112)$$

把式(1.111)代入式(1.109)式:

$$\int_0^L w_s L w_r dx = \int_0^L w_r L w_s dx = 0 \quad (\mathbf{I}_r \neq \mathbf{I}_s) \quad (1.113)$$

这表明, 对自共轭系统特征函数在能量内积意义上也是正交的。如果特征值

\mathbf{I}_i 共有 m_i 个重特征值, 必定有 m_i 个相应的相互正交的特征函数, 它们与其它特征值对应的特征函数也正交。

正则化特征函数满足: $\int_0^L m w_r^2 dx = 1$

正则化的特征函数组成一个满足(1.114)式的无限可数正则正交函数集:

$$(\sqrt{m} w_r, \sqrt{m} w_s) = \int_0^L m w_r w_s dx = \mathbf{d}_{rs} \quad r, s = 1, 2, \dots \quad (1.114a)$$

$$[w_r, w_s] = \int_0^L \sum_{k=0}^p a_k \frac{d^k w_r}{dx^k} \frac{d^k w_s}{dx^k} dx + \sum_{l=0}^{p-1} b_l \frac{d^l w_r}{dx^l} \frac{d^l w_s}{dx^l} \Big|_0^L = \mathbf{I}_r \mathbf{d}_{rs} \quad r, s = 1, 2, \dots \quad (1.114b)$$

前面的讨论中, 无限可数正则正交函数集是完备的。因此, 正则化的特征函数集是完备的。

展开定理:

具有连续的 Lw 并满足边界条件的任一函数 w 能用特征函数展开成绝对和一致收敛的级数, 形式如下:

$$w = \sum_{r=1}^{\infty} c_r w_r \quad (1.115)$$

$$\text{其中, 系数 } c_r = \int_0^L m w w_r dx \quad r = 1, 2, \dots \quad (1.116)$$

式(1.115)和式(1.116)构成分布参数自共轭系统的展开定理, 它形成了用模态分析方法确定响应的基础。

在于许多情况下, 很难得到由式(1.115)表示分布参数系统特征值问题的封闭解。只有在某些均布质量、均布刚度等简单情况下, 才能获得系统特征值和特征函数。

在以后的讨论中, 将采用近似的特征函数, 即比较函数或能量函数(允许函数), 使用较方便。

1.4.4 非自共轭系统

结构动力学中大部分系统属自共轭系统, 但某些气动弹性问题, 如包含颤振的系统必须作非共轭系统处理。下面讨论非自共轭系统的特性。

设 L 是线性齐次微分算子, 可以证明总是存在一个由式(1.117)定义的共轭算子 L^* :

$$(v, Lu) = (L^* v, u) \quad (1.117)$$

其中, u 是 L 域中的函数, v 是 L^* 域中的函数。

设 u_i 是 L 的一个特征函数, v_j 是 L^* 的一个特征函数,

$$Lu_i = \mathbf{I}_i u_i \quad (1.118a)$$

$$L^* v_j = \mathbf{I}_j^* v_j \quad (1.118b)$$

其中 \mathbf{I}_i 和 \mathbf{I}_j^* 分别为 L 和 L^* 的实特征值或复特征值。特征函数集 v_j ($j = 1, 2, \dots$) 称为特征函数集 u_i ($i = 1, 2, \dots$) 的共轭。

由式(1.118)得:

$$(v_j, Lu_i) = \int_0^L v_j Lu_i dx = \mathbf{I}_i \int_0^L v_j u_i dx \quad (1.119a)$$

$$(u_i, L^* v_j) = \int_0^L u_i L^* v_j dx = \mathbf{I}_j^* \int_0^L u_i v_j dx \quad (1.119b)$$

上面两式相减得:

$$(\mathbf{I}_i - \mathbf{I}_j^*) \int_0^L u_i v_j dx = 0 \quad (1.120)$$

若 $(\mathbf{I}_i \neq \mathbf{I}_j^*)$, 则有

$$(u_i, v_j) = \int_0^L u_i v_j dx = 0 \quad (\mathbf{I}_i \neq \mathbf{I}_j^*) \quad (i, j = 1, 2, \dots) \quad (1.121)$$

当 $\mathbf{I}_i \neq \mathbf{I}_j^*$ 时, 与 L 的特征值 \mathbf{I}_i 相应的特征函数跟与 L^* 的特征值 \mathbf{I}_j^* 相应的特征函数之间正交。即特征函数 $u_i (i=1, 2, \dots)$ 与共轭的特征函数集 $v_j (j=1, 2, \dots)$ 存在着双正交关系。

式(1.118a)可写成:

$$(L - \mathbf{I}_i) u_i = 0 \quad (1.122)$$

由式(1.122)得

$$(v_i, (L - \mathbf{I}_i) u_i) = 0 \quad (1.123)$$

展开式(1.123)并代入式(1.117):

$$(v_i, L u_i) - \mathbf{I}_i (v_i, u_i) = (L^* v_i, u_i) - \mathbf{I}_i (v_i, u_i) = ((L^* - \mathbf{I}_i) v_i, u_i) = 0 \quad (1.124)$$

由上式可知 u_i 与 $(L^* - \mathbf{I}_i) v_i$ 任一正交, 必有 u_i 为零, 而 u_i 是特征函数不为零, 因此必有

$$(L^* - \mathbf{I}_i) v_i = 0 \quad (1.125)$$

所以存在与特征值 \mathbf{I}_i 相应的 L^* 的特征函数, 由此可得出结论 L 算子的特征值与 L^* 的特征值吻合, 但特征函数不同。

正则化, 使 $\int_0^L u_i v_i dx = 1 (i=1, 2, \dots)$, 可得到两组双正则正交函数集

$$(u_i, v_j) = \int_0^L u_i v_j dx = \mathbf{d}_{ij} \quad (1.126)$$

两个函数集是完备的, 因此每一个平方可加函数 f 能用任一个函数集的线性组合来表示:

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{a}_i u_i \quad (1.127)$$

$$\text{其中 } \mathbf{a}_i = (v_i, f) \quad (i=1, 2, \dots) \quad (1.128)$$

式(1.127)和式(1.128)为一种非自共轭系统的展开定理。

另一种为:

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{b}_j v_j \quad (1.129)$$

$$\mathbf{b}_j = (u_j, f) \quad (j=1, 2, \dots) \quad (1.130)$$

$L f$ 可有两种表示方法:

$$L f = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{a}_i L u_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{a}_i \mathbf{I}_i u_i \quad (1.131)$$

$$\text{或 } L^* f = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{b}_j L^* v_j = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{b}_j \mathbf{I}_j v_j \quad (1.132)$$

当 $L = L^*$ 时, 系统就转化为自共轭系统。

第 2 章 连续系统的离散化方法

2.1 概述

连续系统的问题通过分离变量得到微分方程的边值问题, 封闭形式的解很难得到, 因此考虑采用近似解的方法。通过离散化过程获得近似解, 方法之一是用一组给定函数的有限项级数展开解, 另一种方法是把系统的质量和刚度集中表示。离散化以后, 把偏微分方程转变成联立的普通微分方程组。

本章讨论前一种方法, 其中包括 Rayleigh-Ritz 法, 与它密切相关的假定模态法和加权残数法 (包括 Galerkin 法、配置法、最小二乘法、子域法和矩法)。有限元法本质上是 Rayleigh-Ritz 法, 但它同经典的 Rayleigh-Ritz 法又有些不同, 而且已经发展并形成了它的特色及大型软件, 因此自成一章, 在下一章专门阐述。

2.2 Rayleigh-Ritz 法

讨论下面的特征值问题的解。

$$Lw = \mathbf{I}mw \quad 0 < x < L \quad (2.1a)$$

$$B_i w = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \quad x = 0, L \quad (2.1b)$$

其中 L 是 $2p$ 阶自共轭微分算子。当封闭解不存在或不容易获得时, 采用近似解。

Rayleigh 原理:

对于保守系统, Rayleigh 商在主模态附近取驻定值 (极值)。解特征值问题 (2.1) 等价于求 Rayleigh 商的驻定值 (极值)。

Rayleigh 商为

$$R(w) = \frac{[w, w]}{(\sqrt{mw}, \sqrt{mw})} \quad (2.2)$$

其中 w 称为试探函数, 试探函数在能量空间 \mathcal{K}_G^p 中, 即它满足边界条件 (2.1b), 且 p 阶导数在区间 $[0, L]$ 内可积 (能量有限), 实际上, 将在 \mathcal{K}_G^p 的子空间 S^n 中寻找试探函数, (n 是有限的整数)。用 S^n 空间的函数 w^n 近似 w 。这样把给出 $R(w)$ 驻定值的问题简化为确定 w^n 和 $\mathbf{L}^n = R(w^n)$ 的问题, 即使 $R(w^n)$ 是驻定的。

$$R(w^n) = \frac{[w^n, w^n]}{(\sqrt{mw^n}, \sqrt{mw^n})} \quad (2.3)$$

设: $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n, \dots$ 满足两个条件: (i) 任何 n 个函数线性独立, (ii) 序列 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n, \dots$ 在能量意义上是完备的, 即对空间 \mathcal{K}_G^p 中的任一函数 w 及任意小的 $\epsilon > 0$, 都存在一个足够大的 N , 和一组常数 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \dots$, 使式 (2.4) 成立:

$$\left\| w - \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \mathbf{f}_i \right\| < \epsilon \quad (2.4)$$

或者条件(ii)可指序列 $\mathbf{a}_1 \mathbf{f}_1, \mathbf{a}_1 \mathbf{f}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{f}_2, \dots$ 在能量意义上收敛于 w 。

从上述完备的函数集中选取 n 个函数 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n, \dots$ 作为 \mathcal{K}_G^p 的 n 维子空间 S^n 的基。这样 w^n 能表示成

$$w^n = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{f}_i \quad (2.5)$$

其中 a_1, a_2, \dots, a_n 是待定的系数，把式(2.5)代入式(2.3)，可以得到：

$$\begin{aligned} R(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \frac{\left[\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{f}_i, \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{f}_j \right]}{\left(\sqrt{m} \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{f}_i, \sqrt{m} \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{f}_j \right)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j [\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j]}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j (\sqrt{m} \mathbf{f}_i, \sqrt{m} \mathbf{f}_j)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

对自共轭系统有

$$[\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j] = \int_0^L \sum_{k=0}^p a_k \frac{d^k \mathbf{f}_i}{dx^k} \frac{d^k \mathbf{f}_j}{dx^k} dx + \sum_{l=0}^{p-1} b_l \frac{d^l \mathbf{f}_i}{dx^l} \frac{d^l \mathbf{f}_j}{dx^l} \Big|_0^L = k_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.7a)$$

$$(\sqrt{m} \mathbf{f}_i, \sqrt{m} \mathbf{f}_j) = \int_0^L m \mathbf{f}_i \mathbf{f}_j dx = m_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.7b)$$

其中 k_{ij} 称为刚度系数， m_{ij} 称为质量系数，它们有对称性：

$$k_{ij} = k_{ji} \quad m_{ij} = m_{ji} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.8)$$

把式(2.7)代入式(2.6)得到 Rayleigh 商的另一种形式

$$R(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{N(a_1, a_2, \dots, a_n)}{D(a_1, a_2, \dots, a_n)} \quad (2.9)$$

$$\text{其中：} \quad N(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} a_i a_j \quad (2.10a)$$

$$D(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} a_i a_j \quad (2.10b)$$

Rayleigh 商的分子与分母分别与 n 个自由度系统的势能和动能对应。这样，由于式(2.5)的引入，把分布系统的特征值问题转化为 n 个自由度离散系统的特征值问题。

利用 Rayleigh 商取驻定值的条件：

$$\frac{\partial R}{\partial a_r} = 0 \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (2.11)$$

得到：

$$\frac{\partial R}{\partial a_r} = \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial a_r} \right) D - \left(\frac{\partial D}{\partial a_r} \right) N}{D^2} = \frac{\partial N}{\partial a_r} - \mathbf{L}^n \left(\frac{\partial D}{\partial a_r} \right)}{D} = 0 \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (2.12)$$

其中， \mathbf{L}^n 是 Rayleigh 商的驻定值。从式(2.10)可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial a_r} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} \left(\frac{\partial a_i}{\partial a_r} a_j + a_i \frac{\partial a_j}{\partial a_r} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} (\mathbf{d}_{ir} a_j + a_i \mathbf{d}_{jr}) \\ &= \sum_{j=1}^n k_{rj} a_j + \sum_{i=1}^n k_{ir} a_i = 2 \sum_{j=1}^n k_{rj} a_j \quad r = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.13a)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial a_r} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \left(\frac{\partial a_i}{\partial a_r} a_j + a_i \frac{\partial a_j}{\partial a_r} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} (\mathbf{d}_{ir} a_j + a_i \mathbf{d}_{jr}) \\ &= \sum_{j=1}^n m_{rj} a_j + \sum_{i=1}^n m_{ir} a_i = 2 \sum_{j=1}^n m_{rj} a_j \quad r = 1, 2, \dots, n\end{aligned}\quad (2.13b)$$

把式(2.12)和式(2.13)相结合, 得到:

$$\sum_{j=1}^n (k_{ij} - \mathbf{L}^n m_{ij}) a_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.14)$$

式(2.14)组成了一组 n 个联立的代数方程, 称为 Galerkin 方程, 也称为 Ritz 系统。因此确定式(2.3) Rayleigh 商驻定值的问题转化为求式(2.14)表示的特征值问题, 把微分方程的求解简化为代数特征值问题的求解。

式(2.14)写成矩阵形式:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{L}^n \mathbf{M} \mathbf{a} \quad (2.15)$$

其中 $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ 是实对称的 $n \times n$ 刚度矩阵和质量矩阵, \mathbf{a} 是一个 n 维系数向量。如果算子 L 是正定的, 则 \mathbf{M} 是正定的, \mathbf{K} 也是如此, 因此所有的特征值 \mathbf{L}_r^n ($r = 1, 2, \dots, n$) 都是正实数。特征向量 \mathbf{a}_r ($r = 1, 2, \dots, n$) 也是实数向量。其中特征值 \mathbf{L}_r^n 代表了系统(2.1)近似的前 n 个特征值。用式(2.5)可以得到系统的前 n 个近似的特征向量:

$$\mathbf{w}_r^n = \sum_{i=1}^n a_{ir} \mathbf{f}_i \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (2.16)$$

其中, a_{ir} 是第 r 个系数向量 \mathbf{a}_r 的第 i 个分量。这样得到的特征值 \mathbf{L}_r^n 所对应的特征向量 \mathbf{w}_r^n 称为 Ritz 特征值和 Ritz 特征向量。下面讨论 Ritz 特征值和特征向量与实际特征值和特征向量之间的关系。

设特征值问题(2.1)的特征值为 $\mathbf{I}_1 \leq \mathbf{I}_2 \leq \dots$, 而特征值问题(2.15)的特征值为 $\mathbf{L}_1^n \leq \mathbf{L}_2^n \leq \dots \leq \mathbf{L}_n^n$, 由于系统的允许函数 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots$ 是完备的, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 就可以得到特征值问题(2.1)的解。因此 Ritz 系统可以认为是迫使实际系统中常数 $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots$ 为零时得到的系统。

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = 0 \quad (2.17)$$

因此, $\mathbf{L}_1^n \geq \mathbf{I}_1$ (2.18)

较高阶的情况可用特征值的最大-最小原理得到。

由式(2.1)描述系统的第 $s+1$ 阶特征值 \mathbf{I}_{s+1} 的最大值可在迫使 u 与前 s 个特征值正交的约束条件下, Rayleigh 商的极小值 $R(u)$ 得到。

$$\text{即, } \mathbf{I}_2 = \max \min R(w) \quad (w, \mathbf{y}_1) = 0 \quad (2.19)$$

即当试探函数与第一振型正交时, 使 Rayleigh 商 $R(w)$ 取得极小值, 这个极小值就是 \mathbf{I}_2 的最大值。

对于 Ritz 系统加同样的约束, 可得:

$$\mathbf{L}_2^n = \max \min R(w) \quad (w, \mathbf{y}_1) = 0 \quad (w, \mathbf{f}_j) = 0 \quad j = n+1, n+2, \dots \quad (2.20)$$

由于用于计算 \mathbf{L}_2^n 的空间维数低于计算特征值 \mathbf{I}_2 的空间, 因此

$$\mathbf{L}_2^n \geq \mathbf{I}_2 \quad (2.21)$$

一般地, 有 $\mathbf{L}_r^n \geq \mathbf{I}_r$ (2.22)

因此 Ritz 特征值是系统真实特征值的上限。Ritz 特征值与实际特征值的接近

程度取决于允许函数 f_r 的数目以及 f_r 本身的特性。一般，较低的特征值比较高特征值更接近于实际的特征值。事实上最低的特征值有最好的近似特性。特征值越高，精度损失也越多。在许多情况下，较高阶的 Ritz 特征值是不可靠的。当式(2.5)中级数的项数 n 增加时，误差将减小（或至少不增加）。另外 f_r 的特性对 Ritz 特征值的精度有很大的影响。由于 f_r 是完备的，因此当 $n \rightarrow \infty$ 时，不同的 f_r 对 Ritz 特征值的影响就不明显了。上面的这些讨论不适用于特征函数，一般来说 Ritz 特征值比特征函数对实际系统有更好的近似。

在应用 Rayleigh-Ritz 法的过程中，用到序列：

$$\begin{aligned} w^1 &= a_1 f_1 \\ w^2 &= a_1 f_1 + a_2 f_2 \\ w^3 &= a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.23)$$

增加级数(2.5)的项数，求解式(2.15)的 Ritz 系统，并观察计算得到特征值改进的程度，直到求得特征值和特征向量达到足够的精度，即 n 再增加计算结果不再有有意义的改进。

Rayleigh-Ritz 法的优点是增加级数(2.5)的项数时，前 $n \times n$ 阶的刚度矩阵和质量矩阵不变，计算 $(n+1) \times (n+1)$ 阶矩阵时，只需计算增加的一列，即

$$K^{n+1} = \begin{bmatrix} & & & \times \\ & [K^n] & & \times \\ & & & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \quad M^{n+1} = \begin{bmatrix} & & & \times \\ & [M^n] & & \times \\ & & & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

设 L^{n+1} 是矩阵 K^{n+1} 和 M^{n+1} 定义的系统 Ritz 特征值，并有 $L_1^{n+1} \leq L_2^{n+1} \leq \dots \leq L_{h+1}^{n+1}$ ，那么有下式成立：

$$L_1^{n+1} \leq L_1^n \leq L_2^{n+1} \leq L_2^n \leq \dots \leq L_h^n \leq L_{h+1}^{n+1} \quad (2.25)$$

即近似的特征值从上面单调地趋近于精确解：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_r^n = L_r \quad (r=1,2,\dots,n) \quad (2.26)$$

解的收敛速度取决于允许函数 f_1, f_2, \dots 的特性。

如何选取允许函数集：

- 1) 从现有函数，即幂函数、三角函数、Bessel 函数、Legendre 多项式、Tchebycheff 多项式等中选择，若函数正交，则可节省计算工作量，也可用 Gram-Schmidt 正交化过程使任何线性独立的函数集正交，但工作量较大，有些函数很难证明其在能量意义上完备，但可作这一假设。
- 2) 从简化的特征值问题求得完备的函数集。
- 3) 直接采用有限元法。

例 2.1 导出图 2.1 所示杆作纵向振动的特征值问题，并求出 $n=1,2,3,4$ 时的 Rayleigh-Ritz 解。

已知系统参数为：

$$\begin{aligned} EA(x) &= \frac{6EA}{5} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] & K &= 0.2 \frac{EA}{L} \\ m(x) &= \frac{6m}{5} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (a)$$

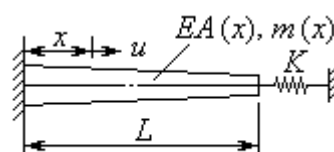


图 2.1

解：动能： $T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \dot{u}^2(x, t) dx$ (b)

势能： $V(t) = \frac{1}{2} \int_0^L EA(x) [u'(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2} Ku^2(L, t)$ (c)

$$W(t) = -V(t) = -\frac{1}{2} \int_0^L EA(x) [u'(x, t)]^2 dx - \frac{1}{2} Ku^2(L, t)$$

由式(1.38)： $\int_{t_1}^{t_2} (d\Gamma + dW) dt = 0 \quad du = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad \text{在 } t = t_1, t_2$

即： $\int_{t_1}^{t_2} [\int_0^L d\{\frac{1}{2} m(x) \dot{u}^2(x, t) - \frac{1}{2} EA(x) [u'(x, t)]^2\} dx - d\frac{1}{2} Ku^2(L, t)] dt = 0$ (d-1)

$$\hat{L}(x, t) = \hat{L}(\dot{u}, u') \quad d\hat{L} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{u}} d\dot{u} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial u'} du'$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{u}} d\dot{u} dt = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{u}} du \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{u}} \right) dt$$

$$\int_0^L \frac{\partial \hat{L}}{\partial u'} du' dx = \frac{\partial \hat{L}}{\partial u'} du \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial u'} \right) dx$$
 (d-2)

$$d\frac{1}{2} Ku^2(L, t) = Ku(x, t) du \Big|_{x=L} \quad (dL_0 = \frac{\partial L_0}{\partial u} du)$$

代入(d-1)

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial u'} \right) \right] dx + \frac{\partial \hat{L}}{\partial u'} du \Big|_0^L - Ku(x, t) du \Big|_{x=L} \right\} dt = 0$$

即 $-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{u}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial u'} \right)$

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial u'} - Ku = 0 \text{ 或 } u = 0 \quad x = L$$

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial u'} = 0 \text{ 或 } u = 0 \quad x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{u}} \right) = m\ddot{u} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial u'} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (EAu'') \quad \frac{\partial \hat{L}}{\partial u'} = -EAu'$$

方程为： $-m\ddot{u} = \frac{\partial}{\partial x} (EAu'')$

$$x = 0 \quad u = 0$$

$$x = L \quad EAU' + Ku = 0$$

设： $u = UF$

$$mU\ddot{F} = F \frac{d}{dx} (EAU')$$

$$\frac{\frac{d}{dx} (EAU')}{mU} = \frac{\ddot{F}}{F} = -I = -\omega^2 \quad (I > 0)$$

$$-\frac{d}{dx} (EAU') = \omega^2 mU$$

$$-\frac{d}{dx}[EA(x)\frac{dU(x)}{dx}] = \mathbf{w}^2 m(x)U(x) \quad 0 < x < L \quad (d)$$

$$U(0) = 0 \quad (e)$$

$$EAU' + KU = 0 \quad x = L \quad (f)$$

$$R(u) = \frac{[U, U]}{(\sqrt{m}U, \sqrt{m}U)} = \frac{\int_0^L EA(x)[U'(x)]^2 dx + KU^2(L)}{\int_0^L m(x)U^2(x) dx} \quad (g)$$

$$\text{设: } U(x) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{f}_i \quad (h)$$

其中, \mathbf{f}_i 为允许函数, 采用简化特征值问题的解作允许函数:

令 $EA(x) = EA = \text{const}$, $m(x) = m = \text{const}$

边界条件中去掉 KU , 则特征值问题由下列方程给出:

$$U'' + \mathbf{b}^2 U = 0 \quad \mathbf{b}^2 = \mathbf{w}^2 m / EA \quad (i)$$

边界条件为: $U(0) = U'(L) = 0$

特征函数: $U_r(x) = A_r \sin[(2r-1)\pi x / 2L]$ ($r = 1, 2, \dots$)

$$\text{因此把 } \phi_i(x) = \sin \frac{(2i-1)\pi x}{2L} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (j)$$

作为允许函数。

由式(2.7), 得

$$\begin{aligned} k_{ij} &= [\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j] = \int_0^L EA(x) \mathbf{f}_i'(x) \mathbf{f}_j'(x) dx + K \mathbf{f}_i(L) \mathbf{f}_j(L) \\ &= \frac{6EA}{5} \frac{(2i-1)\pi}{2L} \frac{(2j-1)\pi}{2L} \int_0^L [1 - \frac{1}{2}(\frac{x}{L})^2] \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2L} \cos \frac{(2j-1)\pi x}{2L} dx \\ &\quad + K \sin \frac{(2i-1)\pi}{2} \sin \frac{(2j-1)\pi}{2} \end{aligned} \quad (k)$$

$$\begin{aligned} m_{ij} &= [\sqrt{m}\mathbf{f}_i, \sqrt{m}\mathbf{f}_j] = \int_0^L m(x) \mathbf{f}_i(x) \mathbf{f}_j(x) dx \\ &= \frac{6m}{5} \int_0^L [1 - \frac{1}{2}(\frac{x}{L})^2] \sin \frac{(2i-1)\pi x}{2L} \sin \frac{(2j-1)\pi x}{2L} dx \end{aligned}$$

由此可得 k_{ij} , m_{ij} 的表达式:

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \frac{EA}{20L} [7 + \frac{5}{2}(2i-1)^2 \pi^2] \quad i = j \\ k_{ij} &= \frac{EA}{5L} (-1)^{i+j} \{1 + \frac{3}{4}(2i-1)(2j-1) [\frac{1}{(i+j-1)^2} - \frac{1}{(i-j)^2}]\} \quad i \neq j \end{aligned} \quad (l)$$

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \frac{ml}{2} [1 - \frac{6}{5} \frac{1}{(2i-1)^2 \pi^2}] \quad i = j \\ m_{ij} &= \frac{3ml}{5\pi^2} (-1)^{i+j-1} [\frac{1}{(i-j)^2} + \frac{1}{(i+j-1)^2}] \quad i \neq j \end{aligned} \quad (m)$$

$$\text{对 } n=1 \quad \mathbf{w}_1^1 = 1.898899 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \quad w_1^1 = \sin \frac{\pi x}{2L} \quad (p)$$

$$n=2 \quad \mathbf{w}_1^2 = 1.897794 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \quad \mathbf{w}_2^2 = 4.884692 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \quad (s)$$

$$\begin{aligned}
n=3 \quad \mathbf{w}_1^3 &= 1.896942 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} & \mathbf{w}_2^3 &= 4.883993 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \\
\mathbf{w}_3^3 &= 7.968519 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} & &
\end{aligned} \tag{t}$$

$$\begin{aligned}
n=4 \quad \mathbf{w}_1^4 &= 1.896424 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} & \mathbf{w}_2^4 &= 4.883993 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \\
\mathbf{w}_3^4 &= 7.965769 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} & \mathbf{w}_4^4 &= 11.082449 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}}
\end{aligned} \tag{u}$$

收敛很快。

2.3 假定模态法

在这种方法中离散化过程在推导方程之前。

设解可用允许函数（只是空间位置的函数）的有限级数表示，但系数是时间的函数，用 Lagrange 方程推导运动方程。

设系统的动能为

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L m \dot{w}^2 dx \tag{2.27}$$

势能：

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{k=0}^p a_k \left(\frac{\partial^k w}{\partial x^k} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{p-1} b_l \left(\frac{\partial^l w}{\partial x^l} \right)^2 \Big|_0^L \tag{2.28}$$

从能量空间 K_G^p 的完备集中选 n 个允许函数 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ 组成一子空间 s^n ，用 w^n 近似 w ：

$$w^n(x, t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i(x) q_i(t) \tag{2.29}$$

其中 $q_i(t)$ 为广义坐标，把式(2.29)代入式(2.27)：

$$\begin{aligned}
T(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L m \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \dot{q}_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{f}_j \dot{q}_j \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{q}_i \dot{q}_j \int_0^L m \mathbf{f}_i \mathbf{f}_j dx \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j
\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\text{其中 } m_{ij} = m_{ji} = \int_0^L m \mathbf{f}_i \mathbf{f}_j dx \quad i, j = 1, 2, \dots, n \tag{2.31}$$

$[m_{ij}]$ 为对称矩阵。

把式(2.29)代入式(2.28)：

$$\begin{aligned}
V(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{k=0}^p a_k \left(\sum_{i=1}^n \frac{d^k \mathbf{f}_i}{dx^k} q_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{d^k \mathbf{f}_j}{dx^k} q_j \right) dx + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{p-1} b_l \left(\sum_{i=1}^n \frac{d^l \mathbf{f}_i}{dx^l} q_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{d^l \mathbf{f}_j}{dx^l} q_j \right) \Big|_0^L \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i q_j \left(\int_0^L \sum_{k=0}^p a_k \frac{d^k \mathbf{f}_i}{dx^k} \frac{d^k \mathbf{f}_j}{dx^k} dx + \sum_{l=0}^{p-1} b_l \frac{d^l \mathbf{f}_i}{dx^l} \frac{d^l \mathbf{f}_j}{dx^l} \Big|_0^L \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j \quad (2.32)$$

$$\text{其中, } k_{ij} = k_{ji} = \int_0^L \sum_{k=0}^p a_k \frac{d^k \phi_i}{dx^k} \frac{d^k \phi_j}{dx^k} dx + \sum_{l=0}^{p-1} b_l \frac{d^l \phi_i}{dx^l} \frac{d^l \phi_j}{dx^l} \Big|_0^L \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.33)$$

$[k_{ij}]$ 为对称矩阵。

式(2.31)和式(2.33)与式(2.7)完全相同, 即由假定模态法得到的质量和刚度矩阵是与 Rayleigh-Ritz 法相同的。

对离散系统利用 Lagrange 方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (2.34)$$

其中, $L = T - V$ 是系统的 Lagrange 函数。把式(2.31)和式(2.33)代入式(2.34), 得到特征值问题:

$$\sum_{j=1}^n (m_{rj} \ddot{q}_j + k_{rj} q_j) = 0 \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (2.35)$$

设解为简谐的, 则 $\ddot{q}_j = -\omega^2 q_j = -\mathbf{L}^n q_j$, 则方程(2.35)得到特征值问题:

$$\sum_{j=1}^n (k_{rj} - \mathbf{L}^n m_{rj}) q_j = 0 \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (2.36)$$

2.4 加权残数法

这种方法适用于变分法不能应用的场合以及非共轭系统。

讨论

$$Lw = \mathbf{I}mw \quad 0 < x < L \quad (2.1a)$$

$$B_i w = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \quad x = 0, L \quad (2.1b)$$

设: 试探函数 $w(x)$ 在 K_B^{2p} 空间中 (是比较函数), 一般不满足方程。误差为 $R(w, x)$, 称为残数。

$$R(w, x) = Lw - \mathbf{I}mw \quad (2.37)$$

v 为来自 K^0 空间的权函数, 则加权残数为:

$$vR = v(Lw - \mathbf{I}mw) \quad (2.38)$$

如果 v 与 R 正交, 则它们的内积为零:

$$(v, R) = \int_0^L v(Lw - \mathbf{I}mw) dx = 0 \quad (2.39)$$

用完备的比较函数集中 n 个函数 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ 的线性组合近似地表示试探函数:

$$w^n = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{f}_j \quad (2.40)$$

$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ 是 K_B^{2p} 的 n 维子空间 s^n 的一维基, 而 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ 是另一组完备比较函数集的 n 个函数, 是子空间 V^n (权函数空间) 的一组基。而系数 $a_j (j = 1, \dots, n)$ 通过迫使 $\mathbf{y}_i (i = 1, \dots, n)$ 与残数正交(或残数用 \mathbf{y}_i 表示时的分量为零)得到:

$$(\mathbf{y}_i, R) = \int_0^L \mathbf{y}_i (Lw^n - \mathbf{L}^n m w^n) dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.41)$$

其中, \mathbf{L}^n 是与 w^n 相对应的近似特征值。

满足式(2.41)就能使 w^n 收敛于方程(2.1)解的原因是:

- 1) \mathbf{y}_i 来自完备的基, 而 R 与每一个 \mathbf{y}_i 正交;
- 2) \mathbf{y}_i 的个数可无限增加, 因而满足式(2.41)意味着 $R \rightarrow 0$ 。即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Lw^n - \mathbf{L}^n m w^n) = Lw - \mathbf{L} m w = 0 \quad (2.42)$$

把式(2.40)代入方程(2.41), 得到代数特征值问题:

$$\begin{aligned} (\mathbf{y}_i, R) &= \int_0^L \mathbf{y}_i \left(\sum_{j=1}^n a_j L \mathbf{f}_j - \mathbf{L}^n \sum_{j=1}^n a_j m \mathbf{f}_j \right) dx \\ &= \sum_{j=1}^n (k_{ij} - \mathbf{L}^n m_{ij}) a_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\text{其中, } k_{ij} = (\mathbf{y}_i, L \mathbf{f}_j) = \int_0^L \mathbf{y}_i L \mathbf{f}_j dx \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.44a)$$

$$m_{ij} = (\mathbf{y}_i, m \mathbf{f}_j) = \int_0^L m \mathbf{y}_i \mathbf{f}_j dx \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.44b)$$

m_{ij} , k_{ij} 是常系数, 一般不对称。引入矩阵形式有:

$$K \mathbf{a} = \mathbf{L}^n M \mathbf{a} \quad (2.45)$$

矩阵 K , M 一般不对称。不同加权残数法之间的区别在于权函数的特点。

1、Galerkin 法

权函数与试探函数相同:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{f}_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.46)$$

$$\text{因而: } k_{ij} = (\mathbf{f}_i, L \mathbf{f}_j) = \int_0^L \mathbf{f}_i L \mathbf{f}_j dx \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.47a)$$

$$m_{ij} = (\mathbf{f}_i, m \mathbf{f}_j) = \int_0^L m \mathbf{f}_i \mathbf{f}_j dx \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.47b)$$

其中 $m_{ij} = m_{ji}$, 而一般 $k_{ij} \neq k_{ji}$ 。

由于函数 $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ 为 K_B^{2p} 中的比较函数, 可对(8.47)作 p 次积分, 把 $2p$ 阶导数阶低到 p 阶。只有对共轭算子 L , 才有 $k_{ij} = k_{ji}$ 成立。

考虑非自共轭系统特征值问题

$$-\frac{d}{dx} \left(s \frac{dw}{dx} \right) + r \frac{dw}{dx} = \mathbf{L} m w \quad 0 < x < L \quad (2.48a)$$

$$w(0) = w'(L) = 0 \quad (2.48b)$$

系数 k_{ij} 可用下式表示:

$$k_{ij} = (\mathbf{f}_i, L \mathbf{f}_j) = \int_0^L \mathbf{f}_i \left[-\frac{d}{dx} \left(s \frac{d\mathbf{f}_j}{dx} \right) + r \frac{d\mathbf{f}_j}{dx} \right] dx \quad (2.49)$$

对式(2.49)做一次分部积分并代入边界条件:

$$k_{ij} = \int_0^L (s \mathbf{f}_i' \mathbf{f}_j' + r \mathbf{f}_i \mathbf{f}_j') dx \quad (2.50)$$

因为 \mathbf{f}_i 和 \mathbf{f}_j 不相等, 它们的一阶导数也不相等, 因此 k_{ij} 不对称。

对自共轭系统:

$$k_{ij} = k_{ji} = [\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j] \quad (2.51)$$

这时函数 \mathbf{f}_i 只需来自能量空间 K_G^p 。对自共轭系统 Galerkin 法和 Rayleigh-Ritz 法得到同样的结果。式(2.50)中 $r = 0$ 就是一个例子。

2、配置法

用得很多的另一种加权残数法是取权函数为空间的 Dirac \mathbf{d} 函数。

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{d}(x - x_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.52)$$

\mathbf{y}_i 来自空间 K^{-1} ，选一个点 $x = x_i$ ，把式(2.52)代入式(2.41)：

$$\begin{aligned} & \int_0^L \mathbf{d}(x - x_i)(Lw^n - \mathbf{L}^n m w^n) dx \\ & = (Lw^n - \mathbf{L}^n m w^n) \Big|_{x=x_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.53)$$

这表明微分方程在域 $0 < x < L$ 中有 n 个预先选定的点 $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 处满足方程。当 $n \rightarrow \infty$ 时，区间中每一点都满足方程，这种方法的近似解即收敛于精确解。

把式(2.52)代入方程(2.44)：

$$k_{ij} = \int_0^L \mathbf{d}(x - x_i) L \mathbf{f}_j dx = L \mathbf{f}_j(x_i) \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.54a)$$

$$m_{ij} = \int_0^L \mathbf{d}(x - x_i) m \mathbf{f}_j dx = m(x_i) \mathbf{f}_j(x_i) \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.54b)$$

因此， $m_{ij} \neq m_{ji}$ ， $k_{ij} \neq k_{ji}$ 。

在两维或三维问题中，边界有无穷多个点，因此出现三种配置法：

- 1) 内部法：试探函数 \mathbf{f}_j 满足边界条件，不满足方程。
- 2) 边界法：试探函数 \mathbf{f}_j 不满足边界条件，但满足方程。
- 3) 混合法：试探函数 \mathbf{f}_j 既不满足边界条件，也不满足方程。

这种方法的优点是易于计算 k_{ij} 和 m_{ij} ，但缺点是对自共轭系统也必须求解非对称特征值问题。

2、最小二乘法

最小二乘法的特点是具有混合特性。它既是变分法，又是加权残数法。这种方法通过使残数 R 模的平方最小获得近似解：

$$\|R\|^2 = \int_0^L R^2 dx = \min \quad (2.55)$$

R 来自式(2.37)，设解为式(2.40)，即 $w^n = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{f}_j$ ，则式(2.55)可写成：

$$\|R(a_1, \dots, a_n)\|^2 = \int_0^L R^2(a_1, \dots, a_n) dx = \min \quad (2.56)$$

系数可从下式得到(这只是满足上式的必要条件，并不充分)：

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \|R\|^2 = 2 \int_0^L \frac{\partial R}{\partial a_i} R dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.57)$$

相当于引入的权函数为：

$$\mathbf{y}_i = \frac{\partial R}{\partial a_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.58)$$

把式(2.40)代入式(2.37)并利用式(2.57)得到：

$$\int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial a_i} \left(\sum_{j=1}^n a_j L \mathbf{f}_j - \mathbf{L}^n \sum_{j=1}^n a_j m \mathbf{f}_j \right) \right] \left(\sum_{j=1}^n a_j L \mathbf{f}_j - \mathbf{L}^n \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{f}_j \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n a_j \int_0^L [(L\mathbf{f}_i)(L\mathbf{f}_j) - \mathbf{L}^n(L\mathbf{f}_i)(m\mathbf{f}_j) - \mathbf{L}^n(m\mathbf{f}_i)(L\mathbf{f}_j) + (\mathbf{L}^n)^2(m\mathbf{f}_i)(m\mathbf{f}_j)] dx \\
&= \sum_{j=1}^n a_j [(L\mathbf{f}_i, L\mathbf{f}_j) - \mathbf{L}^n(L\mathbf{f}_i, m\mathbf{f}_j) - \mathbf{L}^n(m\mathbf{f}_i, L\mathbf{f}_j) + (\mathbf{L}^n)^2(m\mathbf{f}_i, m\mathbf{f}_j)] = 0
\end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, n$ (2.59)

其中, $K = [k_{ij}] = [(L\mathbf{f}_i, L\mathbf{f}_j)]$ $H = [h_{ij}] = [(L\mathbf{f}_i, m\mathbf{f}_j)]$

$$M = [m_{ij}] = [(m\mathbf{f}_i, m\mathbf{f}_j)] \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.60)$$

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T \quad (2.61)$$

特征值问题为:

$$[K - \mathbf{L}^n(H + H^T) + (\mathbf{L}^n)^2 M] \mathbf{a} = 0 \quad (2.62)$$

引入辅助量: $\mathbf{b} = \mathbf{L}^n \mathbf{a}$ (2.63)

并定义 $2n$ 维向量: $\mathbf{a}^* = [\mathbf{b}^T; \mathbf{a}^T]^T$ (2.64)

定义 $2n \times 2n$ 阶矩阵:

$$K^* = \begin{bmatrix} H + H^T & -K \\ -K & 0 \end{bmatrix} \quad M^* = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

特征值问题 (2.62) 就转变成标准的特征值问题:

$$K^* \mathbf{a}^* = \mathbf{L}^n M^* \mathbf{a}^* \quad (2.66)$$

因此, 这种方法需要解矩阵阶数两倍于 Galerkin 法和配置法的特征值问题。

4、子域法

把域 D 分成 n 个较小的子域, $D = \sum_{i=1}^n D_i$, 权函数 \mathbf{y}_i 为:

$$\mathbf{y}_i = \begin{cases} 1 & x \text{ 在 } D_i \text{ 中} \\ 0 & x \text{ 不在 } D_i \text{ 中} \end{cases} \quad (2.67)$$

把式(2.67)代入式(2.41), 并用式(2.40)作试探函数:

$$\int_{D_i} (\sum_{j=1}^n a_j L\mathbf{f}_j - \mathbf{L}^n \sum_{j=1}^n a_j m\mathbf{f}_j) dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.68)$$

因此, 在整个子域中平均残数为零。随着子域的增加, 特征值问题在越来越小的子域中满足, 其极限即整个域中每个点都满足方程, 特征值问题为式(2.43):

$$\sum_{j=1}^n (k_{ij} - \mathbf{L}^n m_{ij}) a_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

其中, $k_{ij} = \int_{D_i} L\mathbf{f}_j dx$ $i, j = 1, 2, \dots, n$ (2.69a)

$$m_{ij} = \int_{D_i} m\mathbf{f}_j dx \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.69b)$$

系数 k_{ij} 、 m_{ij} 是非对称的。这种方法用于振动问题有欠缺。

5、矩法

权函数采用: $\mathbf{y}_i = x^{i-1}$ $i = 1, 2, \dots, n$ (2.70)

把式(2.70)和式(2.40)代入式(2.41):

$$\int_0^L x^{i-1} (\sum_{j=1}^n a_j L \mathbf{f}_j - L^n \sum_{j=1}^n a_j m \mathbf{f}_j) dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.71)$$

$i = 1$ 相当于整个区间平均残数为零, $i = 2, 3, \dots, n$ 指从一阶矩到 $(n-1)$ 阶矩为零。特征值问题相同, 其中 k_{ij} 和 m_{ij} 为:

$$k_{ij} = \int_0^L x^{i-1} L \mathbf{f}_j dx \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.72a)$$

$$m_{ij} = \int_0^L x^{i-1} m \mathbf{f}_j dx \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.72b)$$

一般地, $k_{ij} \neq k_{ji}$, $m_{ij} \neq m_{ji}$, 这种方法已用于边界层问题, 而在振动问题上并未获得应用。

例 2.2 图 2.1 所示的系统用比较函数 $\mathbf{f}_i(x) = \sin \mathbf{b}_i x$, $i = 1, 2, \dots, n$ (a)

作为试探函数, 试用配置法求解特征值问题, 并与 Rayleigh-Ritz 法对比。

解: \mathbf{f}_i 必须满足边界条件: $EA(x) = \frac{d\mathbf{f}_i(x)}{dx} \Big|_{x=L} = -K\mathbf{f}_i(L)$ (b)

把例 2.1 的(a) $EA(x)$ 和 k 代入上式得:

$$\tan \mathbf{b}_i L = -3 \mathbf{b}_i L \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (c)$$

得到: $\mathbf{b}_1 L = 1.758164$ $\mathbf{b}_2 L = 4.781983$

$$\mathbf{b}_3 L = 7.896171 \quad \mathbf{b}_4 L = 11.02577 \quad \dots \quad (d)$$

用式 (2.54a) 得到刚度系数, 其中算子 L 为

$$L = -\frac{d}{dx} [EA(x) \frac{d}{dx}] = \frac{6EA}{5} \left\{ \frac{x}{L^2} \frac{d}{dx} - \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \frac{d^2}{dx^2} \right\} \quad (e)$$

$$k_{ij} = \frac{6EA}{5} \left\{ \frac{x_i}{L^2} \mathbf{b}_j \cos \mathbf{b}_j x_i + \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x_i}{L} \right)^2 \right] \mathbf{b}_j^2 \sin \mathbf{b}_j x_i \right\} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (f)$$

$$m_{ij} = \frac{6m}{5} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x_i}{L} \right)^2 \right] \sin \mathbf{b}_j x_i \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (g)$$

$n = 2$, 选 $x_1 = L/3$, $x_2 = 2L/3$, 得:

$$\mathbf{w}_1^2 = 1.940773 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \quad \mathbf{w}_2^2 = 5.018765 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \quad (i)$$

$n = 4$

$$\mathbf{w}_1^{14} = 1.896730 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \quad \mathbf{w}_2^{14} = 4.889894 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \quad (j)$$

相当于 Rayleigh-Ritz 法 $n = 4$

第 3 章 有限元法

3.1 概述

上一章我们讨论用经典的近似方法求解连续系统的特征值问题, 这些方法中的难点是如何寻找合适的允许函数或比较函数(加权残数法)。对形状复杂、系统参数有突变的情况, 经典的方法就无能为力了。

一种基本原理出自经典的 Rayleigh-Ritz 法, 而具有很强通用性的方法应运而生。它的基本思想是在较小的子域中(有限单元中)定义允许函数, 而不是像经典的方法那样定义在整个域中适用的允许函数。这样, 就能采用非常简单的允许函数, 大多数情况是一些低阶的多项式, 称为插值函数。对复杂形状的结构, 用有限元法处理是很方便的。

有限元法具有很多优点, 但是, 我们在应用有限元法的同时, 也要看到, 对一些形状简单, 参数无突变的结构, 经典的方法有时也是相当有效的, 且比有限元法更好。还有一点要注意的是, 有限元法也带来了一些问题, 如计算机的容量问题, 高阶矩阵运算, 截断引起的积累误差等等, 这些都是值得研究和亟待解决的问题。

本章介绍有限元方法的理论和计算的基本过程。

3.2 二阶问题

弦、杆、轴振动的特征值问题可用二阶微分方程定义:

$$-(sw')' + kw = \mathbf{w}^2 mw \quad 0 < x < L \quad (3.1)$$

典型的边界条件是

$$w(0) = 0 \quad (3.2a)$$

$$sw' + Kw = 0 \quad x = L \quad (3.2b)$$

其中, 式(3.2a)表示几何边界条件, 式(3.2b)表示动力边界条件, 相应于 $x = L$ 端有一刚度为 K 的弹簧约束。

特征值问题为:

$$Lw = \mathbf{I}mw \quad 0 < x < L \quad (3.3a)$$

$$B_1 w = 0 \quad x = 0, L \quad (3.3b)$$

$$\text{其中, } L = -\frac{d}{dx} \left(s \frac{d}{dx} \right) + k; \quad \mathbf{I} = \mathbf{w}^2;$$

$$B_1 = 1, \text{ 在 } x = 0 \text{ 处;} \quad (3.4)$$

$$B_1 = s \frac{d}{dx} + K, \text{ 在 } x = L \text{ 处}$$

显然, L 是二阶算子, L 是自共轭、正定的。

设: 特征值问题的近似解为

$$w^n = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{f}_j \quad (3.5)$$

其中, \mathbf{f}_j 是 n 个来自完备集合的试探函数, 它们成为在 K_B^2 空间中子空间 S^n 的基, 就是说, \mathbf{f}_j 是 n 个独立的比较函数。它们二次可微, 并满足所有的边界条件。

对特征值问题(3.3), Rayleigh 商为:
$$R = \frac{[w, w]}{(\sqrt{mw}, \sqrt{mw})} \quad (3.6)$$

其中, 能量内积为:

$$\begin{aligned} [w, w] &= \int_0^L w \left[-\frac{d}{dx} \left(s \frac{dw}{dx} \right) + kw \right] dx \\ &= \int_0^L -wd \left(s \frac{dw}{dx} \right) + \int_0^L kw^2 dx \\ &= -ws \frac{dw}{dx} \Big|_0^L + \int_0^L s \frac{dw}{dx} \frac{dw}{dx} dx + \int_0^L kw^2 dx \\ &= \int_0^L [s(w')^2 + kw^2] dx + Kw^2(L) \end{aligned} \quad (3.7)$$

加权内积为: $(\sqrt{mw}, \sqrt{mw}) = \int_0^L mw^2 dx \quad (3.8)$

设式(3.5)为变分问题的解, 由于系统自共轭, 因此 f_j 只需要是来自能量空间 K_G^1 的允许函数。如果 f_j 是已知函数, 把式(3.5)代入式(3.6)并利用 Rayleigh 商取驻定值的条件得到代数特征值问题。

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} a_j = \mathbf{L}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} a_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.9)$$

其中:

$$k_{ij} = [f_i, f_j] = \int_0^L s f_i' f_j' dx + \int_0^L k f_i f_j dx + K f_i(L) f_j(L) \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.10a)$$

$$m_{ij} = (\sqrt{m} f_i, \sqrt{m} f_j) = \int_0^L m f_i f_j dx \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.10b)$$

从式(3.10)中可看到如果 s 和 m 是 x 的复杂函数, 那么即使允许函数是简单的三角级数, k_{ij} , m_{ij} 的计算也是相当复杂的, 因此要寻找计算工作量小的允许函数。

由于在特征值问题(3.3)中, 算子 L 是自共轭的, 因此 f 只需属于能量空间 K_G^1 , 这表示它必须是连续的, 因此这排除了分段常数的函数, 而分段线性函数是许可的, 而且这些分段线性的函数只需要在某一个子域中定义, 其它地方为零, 这称为局部基。有限元法就是要构造尽可能简单的局部基 f_j 。

设整个域 L 可分成 n 个子域, 或称单元, 最简单的是选每个单元的长度都为 $h = L/n$, 单元之间的边界称为节点。

线性单元

采用如图 3.1 所示的跨越两个子域的线性函数 f_j (屋顶函数) 作为允许函数。由于 f_j 在域 $(j-1)h \leq x \leq (j+1)h$ 中是由两条直线构成, 而在其它域中为零, 因此它是接近正交的, 即 f_j 与除了 $i = j \pm 1$ 以外的所有 f_i 正交, 而

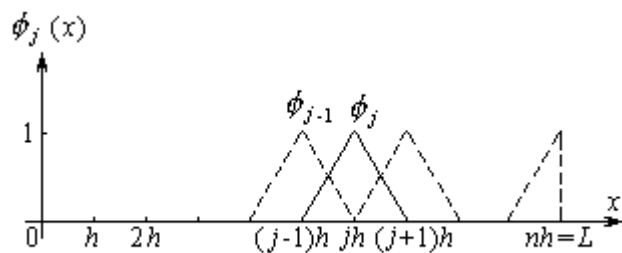


图 3.1

且对不论什么权函数都成立。所有的 f_j 具有单位幅值, 因此它们是正则化的, 这一点具有重要的物理意义。这时试探函数 $w^n(x)$ 中与第 j 个节点对应的是系数

a_j , 而 a_j 就是第 j 点的位移, 如图 3.2 所示。有限元法与经典的 Rayleigh-Ritz 法明显的区别就在于系数 a_j 在有限元中有明显的物理意义, 而在经典的 Rayleigh-Ritz 法中只有数学上的意义。有限元法与 Rayleigh-Ritz 法的另一个区别在于, 当 n 改为 $n+1$ 时, 整个允许函数集 f_j 都将改变, 而在经典的 Rayleigh-Ritz 法中只是增加了一个 f_{n+1} 而已, 其它的 f_j ($j=1,2,\dots,n$) 不变。因此, 有限元中单元数 n 变化时, 刚度矩阵与质量矩阵中所有的元素 k_{ij} 和 m_{ij} 都将发生变化。由于单元很小, 加上允许函数本身是低阶多项式, 且在除了单元 j 和 $j+1$ 外, 其它单元上为零, 因此, k_{ij} 和 m_{ij} 的计算具有规范化的格式, 单元数量的增加不会引起计算工作很大的困难。加上数字计算机的发展, 更使有限元法能发展成结构分析强有力的工具。

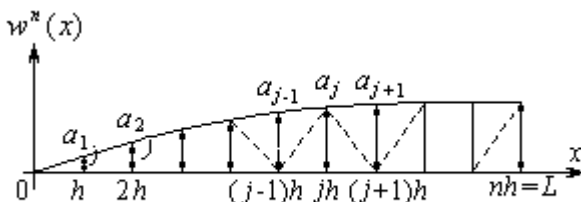


图 3.2

为了简化 k_{ij} 和 m_{ij} 的计算, 考虑第 j 个单元, 先计算单元对 Rayleigh 商的贡献, 然后把结果组合, 这在有限元法中称为组装。当域分成 n 个单元时, Rayleigh 商为:

$$R = \sum_{j=1}^n N_j / \sum_{j=1}^n D_j \quad (3.11)$$

$$\text{其中: } N_j = \int_{(j-1)h}^{jh} [s(w')^2 + kw^2] dx + \mathbf{d}_{jn} K w^2(L) \quad j=1,2,\dots,n \quad (3.12a)$$

$$D_j = \int_{(j-1)h}^{jh} m w^2 dx \quad j=1,2,\dots,n \quad (3.12b)$$

在区间 $(j-1)h \leq x \leq jh$ 中的位移 $w(x)$ 可用节点位移 a_{j-1} 和 a_j 表示 (见图 3.3):

$$w(x) = \frac{jh-x}{h} a_{j-1} + \frac{x-(j-1)h}{h} a_j \quad j=1,2,\dots,n \quad (3.13)$$

其中 $a_0 = 0$ (边界条件)

$$\text{引入记号: } \frac{jh-x}{h} = j - \frac{x}{h} = \mathbf{x} \quad (3.14a)$$

$$\frac{x-(j-1)h}{h} = 1 - j + \frac{x}{h} = 1 - \mathbf{x} \quad (3.14b)$$

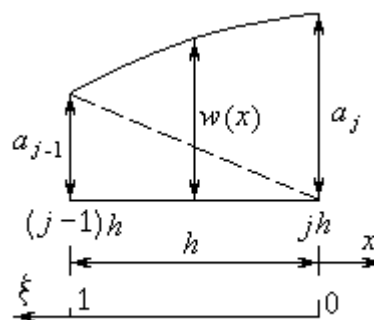


图 3.3

在有限元中 x 称为局部坐标或自然坐标, 它是无量纲的。记

$$L_1 = \mathbf{x} \quad L_2 = 1 - \mathbf{x} \quad (3.15)$$

位移函数 $w(x)$ 可以写成如下形式:

$$w(x) = L_1 a_{j-1} + L_2 a_j \quad (3.16)$$

L_1 和 L_2 起了单元 j 中允许函数的作用。由于每一节点一般为两个单元所共有, 因此实际上一个单元中只有一个允许函数。 L_1 和 L_2 称为线性插值函数或形函数。对线性单元它们与自然坐标一致。把式(3.15)和式(3.16)代入式(3.12), 得:

$$N_j = \begin{bmatrix} a_{j-1} \\ a_j \end{bmatrix}^T K_j \begin{bmatrix} a_{j-1} \\ a_j \end{bmatrix} \quad j=1,2,\dots,n \quad (3.17a)$$

组装后, 得到:

$$K = \frac{s}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \text{对称} & & & 2 & -1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} + \frac{hk}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \text{对称} & & & 4 & 1 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \text{对称} & & & 0 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23a)$$

$$M = \frac{hm}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \text{对称} & & & 4 & 1 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} \quad (3.23b)$$

例 3.1 用有限元法的线性单元解特征值问题 3.1, 确定与例 2.1 用经典的 Rayleigh-Ritz 法有同样精度时划分有限单元的数量。

利用式(3.18)可导出单元质量矩阵和刚度矩阵。对比例 2.1 式(d)和式(3.1), 可得到:

$$s(\mathbf{x}) = \frac{6EA}{5} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{L} \right)^2 (j - \mathbf{x})^2 \right] \quad K = \frac{EA}{5L}$$

$$m(\mathbf{x}) = \frac{6m}{5} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{L} \right)^2 (j - \mathbf{x})^2 \right] \quad (a)$$

把(a)代入式(3.18)并积分, 得单元矩阵:

$$K_j = \frac{6EA}{5} \left[n - \frac{1}{6n} (1 - 3j + 3j^2) \right] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{d}_{jn} \frac{EA}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (b)$$

$$M_j = \frac{mL}{5n} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{mL}{100n} \begin{bmatrix} 2(6 - 15j + 10j^2) & 3 - 10j + 10j^2 \\ 3 - 10j + 10j^2 & 2(1 - 5j + 10j^2) \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(c)

其中: $L/n = h$, 利用式(3.20)的组装方式, 且划去 K_1 、 M_1 的第一行第一列, 则整体刚度矩阵和质量矩阵为:

$$K = \frac{6EA_n}{5L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \text{对称} & & & 2 & -1 \\ & & & & & 1 + 1/6n \end{bmatrix}$$

$$-\frac{EA}{5Ln} \begin{bmatrix} 8 & -7 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & 26 & -19 & \dots & 0 & 0 \\ & & 56 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ & \text{对称} & & & 2(4-4n+3n^2) & -(1-3n+3n^2) \\ & & & & & 1-3n+3n^2 \end{bmatrix} \quad (d)$$

$$M = \frac{mL}{5n} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & 4 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ & \text{对称} & & & 4 & 1 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{mL}{100n^3} \begin{bmatrix} 44 & 23 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & 164 & 63 & \dots & 0 & 0 \\ & & 364 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ & \text{对称} & & & 2(37-50n+20n^2) & 3-10n+10n^2 \\ & & & & & 2(1-5n+10n^2) \end{bmatrix} \quad (e)$$

$$n = 30 \text{ 时, } \mathbf{w}_1^{30} = 1.894771 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \quad \mathbf{w}_2^{30} = 4.888352 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \quad (f)$$

3.3 高阶单元 插值函数

上一节用了最简单的多项式作为试探函数。那么能否应用高阶多项式作为试探函数来获得更高的近似呢？为了回答这个问题，先回顾一下 3.2 节的线性单元，并讨论插值函数的一般形式：

$$L_i = c_{i1} + c_{i2}\mathbf{x} \quad i = 1, 2 \quad (3.24)$$

其中 L_1 表示 f_{j-1} 的右边，而 L_2 表示 f_j 的左边（见图 3.1），因此，在节点 $\mathbf{x} = 1$ 时 $L_1 = 1$ ， $\mathbf{x} = 0$ 时 $L_1 = 0$ 。

$$\mathbf{x} = j - x/h \quad (3.25)$$

是无量纲的自然坐标。为了使上面的式子成立，

$$\begin{aligned} L_1(1) = c_{11} + c_{12} = 1 & \quad L_1(0) = c_{11} = 0 \\ L_2(0) = c_{21} = 1 & \quad L_2(1) = c_{21} + c_{22} = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

可得

$$L_1 = \mathbf{x}, \quad L_2 = 1 - \mathbf{x} \quad (3.27)$$

结果与 3.2 节相同。

二次单元的插值函数能从下面的表达式产生：

$$L_i = c_{i1} + c_{i2}\mathbf{x} + c_{i3}\mathbf{x}^2 \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.28)$$

单元只有两个节点，而式(3.28)有三个未知数，因此必须引入一个内部节点。这

时，称原来的节点为外部节点。为了简单，取内部节点为 $\mathbf{x} = 1/2$ ，每一个二次单元的插值函数在一个节点为 1，而其它每个节点为零，因此有：

$$\begin{aligned} L_1(1) = c_{11} + c_{12} + c_{13} = 1, \quad L_1(1/2) = c_{11} + \frac{1}{2}c_{12} + \frac{1}{4}c_{13} = 0, \quad L_1(0) = c_{11} = 0 \\ L_2(1) = c_{21} + c_{22} + c_{23} = 0, \quad L_2(1/2) = c_{21} + \frac{1}{2}c_{22} + \frac{1}{4}c_{23} = 1, \quad L_2(0) = c_{21} = 0 \quad (3.29) \\ L_3(1) = c_{31} + c_{32} + c_{33} = 0, \quad L_3(1/2) = c_{31} + \frac{1}{2}c_{32} + \frac{1}{4}c_{33} = 0, \quad L_3(0) = c_{31} = 1 \end{aligned}$$

解出 $c_{ik} (i, k = 1, 2, 3)$ ，并把这些系数代入式(3.28)得：

$$\begin{aligned} L_1 &= \mathbf{x}(2\mathbf{x}-1) \\ L_2 &= 4\mathbf{x}(1-\mathbf{x}) \\ L_3 &= 1-3\mathbf{x}+2\mathbf{x}^2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

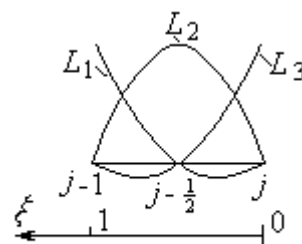


图 3.4

插值函数 L_1, L_2, L_3 如图 3.4。

下面计算二次单元的刚度矩阵和质量矩阵，二次单元的位移函数可表示为：

$$w = L_1 a_{j-1} + L_2 a_{j-1/2} + L_3 a_j = \mathbf{L}^T \mathbf{a}_j \quad (3.31)$$

其中 \mathbf{L} 和 \mathbf{a}_j 为三维向量：

$$\mathbf{L} = [L_1, L_2, L_3]^T \quad (3.32a)$$

$$\mathbf{a}_j = [a_{j-1}, a_{j-1/2}, a_j]^T \quad (3.32b)$$

由于 $L_i (i = 1, 2, 3)$ 是 \mathbf{x} 的函数，我们能写：

$$\frac{dw}{dx} = \frac{d\mathbf{L}^T}{dx} \mathbf{a}_j = -\frac{1}{h} \frac{d\mathbf{L}^T}{d\mathbf{x}} \mathbf{a}_j = -\frac{1}{h} \mathbf{L}'^T \mathbf{a}_j \quad (3.33)$$

其中 $\mathbf{L}' = \frac{d\mathbf{L}}{d\mathbf{x}}$ ，把式(3.25)、式(3.31)和式(3.33)代入方程(3.12)，有：

$$N_j = \mathbf{a}_j^T \mathbf{K}_j \mathbf{a}_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.34a)$$

$$D_j = \mathbf{a}_j^T \mathbf{M}_j \mathbf{a}_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.34b)$$

其中， \mathbf{K}_j 和 \mathbf{M}_j 为单元刚度和质量矩阵 (3×3)

$$\mathbf{K}_j = h \int_0^1 \left(\frac{S}{h^2} \mathbf{L}'^T \mathbf{L}'^T + k \mathbf{L} \mathbf{L}^T \right) d\mathbf{x} + \mathbf{d}_j^n \mathbf{K} \mathbf{L}(0) \mathbf{L}^T(0) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.35a)$$

$$\mathbf{M}_j = h \int_0^1 m \mathbf{L} \mathbf{L}^T d\mathbf{x} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.35b)$$

整体刚度矩阵和质量矩阵可按如下方式组装：

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & & & & & \\ & \mathbf{K}_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \mathbf{K}_{n-1} & & \\ & & & & \mathbf{K}_n & \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & & & & & \\ & \mathbf{M}_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \mathbf{M}_{n-1} & & \\ & & & & \mathbf{M}_n & \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

内部节点相对应的对角元素为非重叠元素。 \mathbf{K} 和 \mathbf{M} 带宽为 4。把 s, k 和 m

当作常数的情况，把式(3.30)－式(3.32)代入式(3.35)得到单元矩阵：

$$K_j = \frac{s}{3h} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} + \frac{hk}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \mathbf{d}_j K \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.37a)$$

$$M_j = \frac{hm}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.37b)$$

组装时，划去 K_1 、 M_1 中的第一行第一列就得总体刚度矩阵。

用同样的方法可以得到三次单元，这时要取两个内部节点，每个单元有四个节点。插值函数为

$$L_i = c_{i1} + c_{i2}\mathbf{x} + c_{i3}\mathbf{x}^2 + c_{i4}\mathbf{x}^3 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \text{利用条件: } L_1(1) = 1 \quad L_1\left(\frac{2}{3}\right) = L_1\left(\frac{1}{3}\right) = L_1(0) = 0 \\ L_2\left(\frac{2}{3}\right) = 1 \quad L_2(1) = L_2\left(\frac{1}{3}\right) = L_2(0) = 0 \\ L_3\left(\frac{1}{3}\right) = 1 \quad L_3(1) = L_3\left(\frac{2}{3}\right) = L_3(0) = 0 \\ L_4(0) = 1 \quad L_4(1) = L_4\left(\frac{2}{3}\right) = L_4\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

可得到如下的插值函数(图 3.5)：

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2}\mathbf{x}(2 - 9\mathbf{x} + 9\mathbf{x}^2) & L_2 &= -\frac{9}{2}\mathbf{x}(1 - 4\mathbf{x} + 3\mathbf{x}^2) \\ L_3 &= \frac{9}{2}\mathbf{x}(2 - 5\mathbf{x} + 3\mathbf{x}^2) & L_4 &= 1 - \frac{11}{2}\mathbf{x} + 9\mathbf{x}^2 - \frac{9}{2}\mathbf{x}^3 \end{aligned} \quad (3.40)$$

位移 w 可表示为：

$$w = L_1 a_{j-1} + L_2 a_{j-\frac{2}{3}} + L_3 a_{j-\frac{1}{3}} + L_4 a_j = \mathbf{L}^T \mathbf{a}_j \quad (3.41)$$

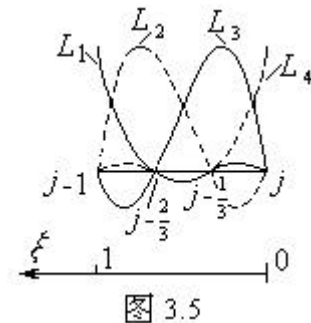


图 3.5

单元矩阵为 4×4 的方阵。一般来说单元的阶次越高，近似程度越好。当单元内有点负荷或不连续分布载荷时，出现导数不连续的情况，即单元内部出现奇异。为了使解能收敛，建议把奇异点取作外部节点。

例 3.2 用二次单元和三次单元解例 3.1 的特征值问题。

从式(3.30)可得插值函数为：

$$\mathbf{L} = [\mathbf{x}(2\mathbf{x}-1) \quad 4\mathbf{x}(1-\mathbf{x}) \quad 1-3\mathbf{x}+2\mathbf{x}^2]^T \quad (a)$$

把式(a)代入式(3.35)，并用例 3.1 的参数得到单元刚度和质量矩阵

$$K_j = \frac{2EAn}{5L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 + \mathbf{d}_j n/2 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{EA}{25Ln} \begin{bmatrix} 23-55j+35j^2 & -26+60j-40j^2 & 3-5j+5j^2 \\ -26+60j-40j^2 & 32-80j+80j^2 & -6+20j-40j^2 \\ 3-5j+5j^2 & -6+20j-40j^2 & 3-15j+35j^2 \end{bmatrix} \quad j=1,2,\dots,n \quad (b)$$

$$M_j = \frac{mL}{25n} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} - \frac{mL}{700n^3} \begin{bmatrix} 44-98j+56j^2 & 24-56j+28j^2 & -5+14j-14j^2 \\ 24-56j+28j^2 & 64-224j+224j^2 & -4+28j^2 \\ -5+14j-14j^2 & -4+28j^2 & 2-14j+56j^2 \end{bmatrix} \quad j=1,2,\dots,n \quad (c)$$

用式(3.36)的格式组装得:

$$K = \frac{2EAn}{5L} \begin{bmatrix} 16 & -8 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & 14 & -8 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & 16 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 14 & -8 & 1 \\ & & & & & 16 & -8 \\ & & & & & & 7+\frac{1}{2}n \end{bmatrix}$$

$$-\frac{EA}{25Ln} \begin{bmatrix} 36 & -26 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & 26 & -6 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & 32 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 76-140n+70n^2 & -26+60n-40n^2 & 3-5n+5n^2 \\ & & & & & 32-80n+80n^2 & -6+20n-40n^2 \\ & & & & & & 3-15n+35n^2 \end{bmatrix} \quad (d)$$

$$M = \frac{mL}{25n} \begin{bmatrix} 16 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & 8 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & 16 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 8 & 2 & -1 \\ & & & & & 16 & 2 \\ & & & & & & 4 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{mL}{700n^3} \begin{bmatrix} 64 & 28 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & 116 & 24 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & 512 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \text{对称} & & & 116 - 224n + 112n^2 & 24 - 56n + 28n^2 & -5 + 14n - 14n^2 \\ & & & & & 64 - 224n + 224n^2 & -4 + 28n^2 \\ & & & & & & 2 - 14n + 56n^2 \end{bmatrix} \quad (e)$$

矩阵 K 和 M 具有 $2n$ 阶。解特征值问题，当 $n=12$ 时，与例(2.1) $n=4$ 精度接近。

$$\mathbf{w}_1^{24} = 1.894544 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}}, \quad \mathbf{w}_2^{24} = 4.883427 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \quad (f)$$

$$\text{用三阶单元 } n=4 \text{ 时: } \mathbf{w}_1^{12} = 1.894544 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}}, \quad \mathbf{w}_2^{12} = 4.883386 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \quad (h)$$

可见经典的 Rayleigh-Ritz 法优于三次单元，三次单元优于二次单元，二次单元优于一次单元。

3.4 四阶问题

考虑旋转的直升机叶片的弯曲振动，忽略旋转惯性，方程为：

$$\frac{d^2}{dx^2}(EIw'') - \frac{d}{dx} \left[\left(\int_x^L m \mathbf{W}^2 \mathbf{x} dx \right) w' \right] = \mathbf{I}mw \quad \mathbf{I} = \mathbf{w}^2 \quad 0 < x < L$$

$$\text{边界条件: } w(0) = w'(0) = 0, \quad EIw''|_{x=L} = 0, \quad -\frac{d}{dx}(EIw'')|_{x=L} = 0$$

$$\text{Rayleigh 商为: } R = \frac{[w, w]}{(\sqrt{mw}, \sqrt{mw})} \quad (3.6)$$

$$L = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(P \frac{d}{dx} \right)$$

$$\begin{aligned} [w, w] &= \int_0^L w \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2}{dx^2} w \right) dx - \int_0^L w \frac{d}{dx} \left(P \frac{dw}{dx} \right) dx \\ &= w \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2}{dx^2} w \right) \Big|_0^L - \frac{dw}{dx} EI \frac{d^2}{dx^2} w \Big|_0^L + \int_0^L EI \left(\frac{d^2}{dx^2} w \right) dx - wP \frac{dw}{dx} \Big|_0^L + \int_0^L P \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \\ &= \int_0^L [EI \left(\frac{d^2}{dx^2} w \right)^2 + P \left(\frac{dw}{dx} \right)^2] dx \\ \therefore [w, w] &= \int_0^L [EI(w'')^2 + P(w')^2] dx \quad (3.42) \end{aligned}$$

其中 EI 是弯曲刚度， P 为轴向力。

$$(\sqrt{mw}, \sqrt{mw}) = \int_0^L mw^2 dx \quad (3.8)$$

因此， w 必须是来自 K_G^2 的允许函数，二阶可微。对于弯曲振动，在单元外节点处必须使位移 w 和它的一阶导数 $\frac{dw}{dx} = \mathbf{q}$ 连续(图 3.6)，因此插值函数至少有四个未

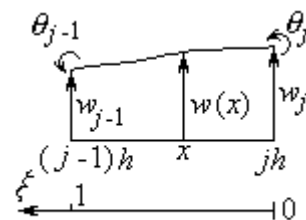


图 3.6

知常数，即三次函数

$$w = L_1 w_{j-1} + L_2 h \mathbf{q}_{j-1} + L_3 w_j + L_4 h \mathbf{q}_j \quad (j-1)h \leq x \leq jh \quad (3.43)$$

引入无量纲的自然坐标 $\mathbf{x} = j - \frac{x}{h}$ ，用 \mathbf{x} 的三次多项式作为插值函数：

$$L_i = c_{i1} + c_{i2} \mathbf{x} + c_{i3} \mathbf{x}^2 + c_{i4} \mathbf{x}^3 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.44)$$

其中， c_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4$) 由 w 和 w' 在 $x = (j-1)h$ (或 $\mathbf{x} = 1$) 及 $x = jh$ (或 $\mathbf{x} = 0$)

时分别取 w_{j-1} 、 \mathbf{q}_{j-1} 和 w_j 、 \mathbf{q}_j 来确定，即：

$$\begin{aligned} L_1(1) &= 1 & L'_1(1) &= L_1(0) = L'_1(0) = 0 \\ L'_2(1) &= -1 & L_2(1) &= L_2(0) = L'_2(0) = 0 \\ L_3(0) &= 1 & L_3(1) &= L'_3(1) = L'_3(0) = 0 \\ L'_4(0) &= -1 & L_4(1) &= L'_4(1) = L_4(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

所以插值函数(图 3.7)为：

$$\begin{aligned} L_1 &= 3\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x}^3 & L_2 &= \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^3 \\ L_3 &= 1 - 3\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x}^3 & L_4 &= -\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^3 \end{aligned} \quad (3.46)$$

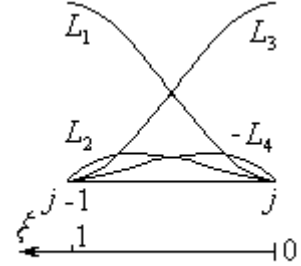


图 3.7

称为 Hermite 三次多项式。

把 w 写成下面的形式：

$$w = \mathbf{L}^T \mathbf{a}_j \quad (j-1)h \leq x \leq jh \quad (3.47)$$

$$\mathbf{L} = [L_1, L_2, L_3, L_4]^T \quad (3.48a)$$

$$\mathbf{a}_j = [w_{j-1}, h \mathbf{q}_{j-1}, w_j, h \mathbf{q}_j]^T \quad (3.48b)$$

沿用上一节的过程：

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{h} \mathbf{L}'^T \mathbf{a}_j \quad \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{1}{h^2} \mathbf{L}''^T \mathbf{a}_j \quad (j-1)h \leq x \leq jh \quad (3.49)$$

因此，Rayleigh 商的分子可写成下式：

$$\begin{aligned} [w, w] &= \int_0^L [EI \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 + P \left(\frac{dw}{dx}\right)^2] dx \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{(j-1)h}^{jh} EI \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 + P \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j^T \mathbf{K}_j \mathbf{a}_j \end{aligned} \quad (3.50a)$$

$$[\sqrt{mw}, \sqrt{mw}] = \int_0^L mw^2 dx = \sum_{j=1}^n \int_{(j-1)h}^{jh} mw^2 dx = \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j^T \mathbf{M}_j \mathbf{a}_j \quad (3.50b)$$

$$\text{其中：} \mathbf{K}_j = h \int_0^1 \left(\frac{EI_j}{h^4} \mathbf{L}'' \mathbf{L}''^T + \frac{P_j}{h^2} \mathbf{L}' \mathbf{L}'^T \right) d\mathbf{x} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.51a)$$

$$\mathbf{M}_j = h \int_0^1 m_j \mathbf{L} \mathbf{L}^T d\mathbf{x} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.51b)$$

其中， \mathbf{L}' 是 \mathbf{L} 对 \mathbf{x} 的一阶导数。

作为例子，考虑 $EI = \text{const}$ ， $m = \text{const}$ ，这时轴向力为：

$$P(x) = \int_x^L m \mathbf{W}^2 \mathbf{z} d\mathbf{z} = \frac{1}{2} m \mathbf{W}^2 L^2 \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) \quad (3.52)$$

$$\text{或 } P_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} m \mathbf{W}^2 L^2 \left[1 - \left(\frac{h}{L}\right)^2 (j - \mathbf{x})^2\right] \quad 0 \leq \mathbf{x} \leq 1 \quad (3.53)$$

把式(3.46)和式(3.53)代入式(3.51), 得到单元刚度矩阵为:

$$K_j = \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} m \mathbf{W}^2 L n \left\{ \frac{1}{30} \left[1 - \left(\frac{j}{n} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + \frac{j}{30n^2} \begin{bmatrix} 36 & 0 & -36 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & -1 \\ -36 & 0 & 36 & -6 \\ 6 & -1 & -6 & 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{210n^2} \begin{bmatrix} 72 & -6 & -72 & -15 \\ -6 & 18 & 6 & -3 \\ -72 & 6 & 72 & 15 \\ -15 & -3 & 15 & 4 \end{bmatrix} \right\} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.54a)$$

质量矩阵为:

$$M_j = \frac{mL}{420n} \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 \\ 22 & 4 & 13 & -3 \\ 54 & 13 & 156 & -22 \\ -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix} \quad 5 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.54b)$$

由于 $w(0) = w'(0) = 0$, 必须从矩阵 K_1 和 M_1 中划去前两列、两行, 因此带宽为 6 的总刚度矩阵和总质量矩阵如式(3.55)所示:

$$K = \left[\begin{array}{c} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ \vdots \\ K_{n-1} \\ K_n \end{array} \right] \quad M = \left[\begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{array} \right] \quad (3.55)$$

3.5 二维域

二维域比一维域更复杂, 往往由于复杂的边界形状, 使封闭解不能找到, 因此必须通过有限元法寻找其近似解。可是, 对一个光滑边界, 很难找到一种单元, 使它在边界处处处都能与边界吻合(图 3.8)。

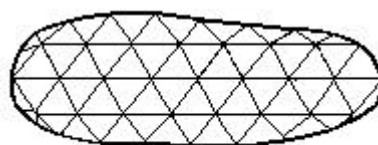


图 3.8

二维域带来的问题还有节点的选择与编号次序(它决定了刚度矩阵和质量矩阵的带宽)及单元的选择。三角形单元和四边形单元是二维域中常用的单元, 各有利弊。

3.5.1 三角形单元

二维域问题的处理与一维域有着同样的模式, 尽管有些细节不同。对二阶问题, 如膜振动, 采用三角形单元。

设解可以写成下面的一般形式:

$$w^n(x, y) = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{f}_j(x, y) \quad (3.56a)$$

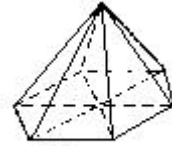


图 3.9

对线性单元， $\mathbf{f}_j(x, y)$ 有棱锥函数的形式(图 3.9)，是屋顶函数二维的对应物。取棱锥的高为 1，那么系数 a_j 可定义为节点的位移。

同样地，可以先计算单元的质量矩阵和刚度矩阵，然后通过组装形成总体刚度矩阵。

二维问题公式推导过程中，先采用笛卡尔坐标，然后再引入自然坐标。在直角坐标系 oxy 中，有一个三角形单元(图 3.10)，三个顶点为 1、2 和 3，定义原点 o 到三个顶点的向量分别为 \vec{r}_1 、 \vec{r}_2 和 \vec{r}_3 ， $P(x, y)$ 是三角形内任意一点。用 \vec{r} 表示原点到 P 点的向量，由于这些向量在同一个平面中，因此有：

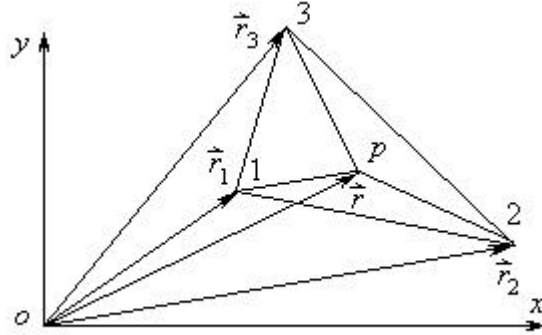


图 3.10

$$c_1(\vec{r} - \vec{r}_1) + c_2(\vec{r} - \vec{r}_2) + c_3(\vec{r} - \vec{r}_3) = \vec{0} \quad (3.56b)$$

可以从式(3.56b)解出 \vec{r} ：

$$\vec{r} = \frac{c_1 \vec{r}_1 + c_2 \vec{r}_2 + c_3 \vec{r}_3}{c_1 + c_2 + c_3} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{x}_i \vec{r}_i \quad (3.57)$$

$$\text{其中: } \mathbf{x}_i = \frac{c_i}{\sum_{j=1}^3 c_j} \quad i=1,2,3 \quad (3.58)$$

由式(3.57)和式(3.58)可得：

$$x_1 \mathbf{x}_1 + x_2 \mathbf{x}_2 + x_3 \mathbf{x}_3 = x \quad (3.59a)$$

$$y_1 \mathbf{x}_1 + y_2 \mathbf{x}_2 + y_3 \mathbf{x}_3 = y \quad (3.59b)$$

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = 1 \quad (3.59c)$$

式(3.59)写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

解式(3.60)得：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

或写成：

$$\mathbf{x}_1(x, y) = \frac{1}{D} [x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

$$\mathbf{x}_2(x, y) = \frac{1}{D} [x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \quad (3.62)$$

$$\mathbf{x}_3(x, y) = \frac{1}{D} [x_1 y_2 - x_2 y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]$$

其中

$$D = (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad (3.63)$$

函数 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 有很有趣的几何解释。

当 $x = x_1, y = y_1$ 时, $\mathbf{x}_1 = 1, \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3 = 0$; 类似地, 当 $x = x_2, y = y_2$ 时, $\mathbf{x}_2 = 1, \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_3 = 0$; $x = x_3, y = y_3$ 时, $\mathbf{x}_3 = 1, \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = 0$ 。所以, 三角形三个顶点 1, 2, 3, 可用 $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ 表示, 因此 $\mathbf{x}_i (i=1,2,3)$ 可用作坐标(图 3.11)。如,

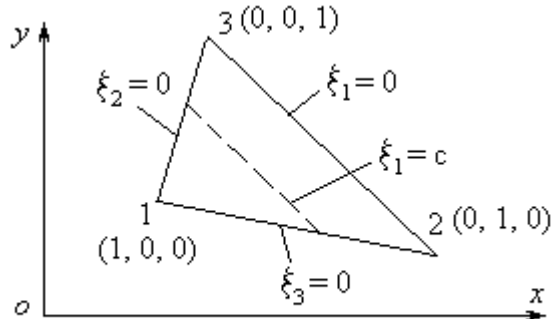


图 3.11

边 2, 3 定义为 $\mathbf{x}_1 = 0$; 在顶点 1, $\mathbf{x}_1 = 1$; 与边 2, 3 平行的直线由 $\mathbf{x}_1 = c$ 描述, c 正比于直线到边 2, 3 的距离。因此 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 定义为三角形的自然坐标。 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 也称为面积坐标, 这是由于 $D = 2A$, A 是三角形的面积, 在式 (3.63) 中, 让 $x_i = x, y_i = y (i=1,2,3)$, 并与式 (3.62) 比较, 可得结论:

$$\mathbf{x}_i = \frac{A_i}{A} \quad i=1,2,3 \quad (3.64)$$

其中 A_i 是顶点 i 相对的边与 P 点组成的三角形面积(图 3.12)。

自然坐标 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 可用于描述单元的允许函数, 假定:

$$L_i = \mathbf{x}_i \quad (i=1,2,3) \quad (3.65)$$

是三角形单元的线性插值函数(见图 3.13)。设 $w_i (i=1,2,3)$ 为节点位移, 那么单元 e 中任一点的位移能写成:

$$w(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \sum_{i=1}^3 L_i w_i = \mathbf{L}^T \mathbf{w}_e \quad (3.66)$$

对于膜振动, 特征值问题为:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\mathbf{I} m w$$

在 D 域内

$$T \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad T \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{在域的边界 (自由边界条件)}$$

能量内积为:

$$[w, w] = \sum_{e=1}^n [w, w]_e \quad (3.67)$$

当张力 T 为常数时:

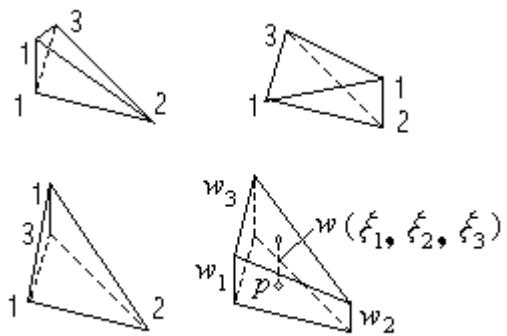
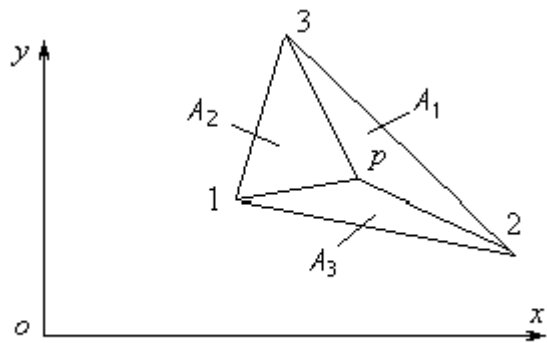


图 3.13

$$[w, w]_e = T \int_{A_e} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dA_e \quad (3.68)$$

是单元 e 对能量内积的贡献，其中 A_e 是单元面积。加权内积为：

$$(\sqrt{mw}, \sqrt{mw}) = \sum_{e=1}^n (\sqrt{mw}, \sqrt{mw})_e \quad (3.69)$$

当质量密度 m 为常数时：

$$(\sqrt{mw}, \sqrt{mw})_e = m \int_{A_e} w^2 dA_e \quad (3.70)$$

为了计算式(3.68)和式(3.70)，用自然坐标来表示被积函数。用式(3.62)、式(3.65)和式(3.66)，可写：

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}_1} \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}_2} \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}_3} \frac{\partial \mathbf{x}_3}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2A_e} \left[\frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial \mathbf{x}_1} (y_2 - y_3) + \frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial \mathbf{x}_2} (y_3 - y_1) + \frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial \mathbf{x}_3} (y_1 - y_2) \right] \mathbf{w}_e \\ &= \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \mathbf{w}_e \end{aligned} \quad (3.71a)$$

$$\begin{aligned} \text{类似地：} \quad \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}_1} \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}_2} \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}_3} \frac{\partial \mathbf{x}_3}{\partial y} \\ &= \frac{1}{2A_e} \left[\frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial \mathbf{x}_1} (x_3 - x_2) + \frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial \mathbf{x}_2} (x_1 - x_3) + \frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial \mathbf{x}_3} (x_2 - x_1) \right] \mathbf{w}_e \\ &= \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \mathbf{w}_e \end{aligned} \quad (3.71b)$$

把式(3.71)代入式(3.68)：

$$[w, w]_e = \mathbf{w}_e^T K_e \mathbf{w}_e \quad (3.72)$$

其中 K_e 为单元刚度矩阵：

$$K_e = \frac{T}{4A_e^2} \int_{A_e} \left\{ \begin{bmatrix} y_2 - y_3 \\ y_3 - y_1 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 \\ y_3 - y_1 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}^T \right\} dA_e \quad (3.73)$$

在式(3.73)中的被积函数未包括自然坐标。

把式(3.66)代入式(3.70)得：

$$(\sqrt{mw}, \sqrt{mw})_e = \mathbf{w}_e^T M_e \mathbf{w}_e \quad (3.74)$$

$$\text{其中 } M_e = m \int_{A_e} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix}^T dA_e \quad (3.75)$$

式(3.73)和式(3.75)中的积分能用下面的公式计算：

$$\int_{A_e} \mathbf{x}_1^m \mathbf{x}_2^n \mathbf{x}_3^p dA_e = \frac{m! n! p!}{(m+n+p+2)!} 2A_e \quad (3.76)$$

在式(3.73)的情况中， $m = n = p = 0$ ，因此有：

$$K_e = \frac{T}{4A_e} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3)^2 & (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) & (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) \\ + (x_3 - x_2)^2 & + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) & + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) \\ & (y_3 - y_1)^2 & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) \\ & + (x_1 - x_3)^2 & + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) \\ & & (y_1 - y_2)^2 \\ & & + (x_2 - x_1)^2 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

对称

利用式(3.76)和式(3.75)得:

$$M_e = \frac{mA_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

在作 K 和 M 的组装之前, 必须确定膜的形状和边界条件以及有限单元的划分。假定膜是长方形的, 且各边都是自由的, 三角形单元的划分见图 3.14。为了方便, 把各节点参数和单元参数列于表 3-1 和表 3-2。

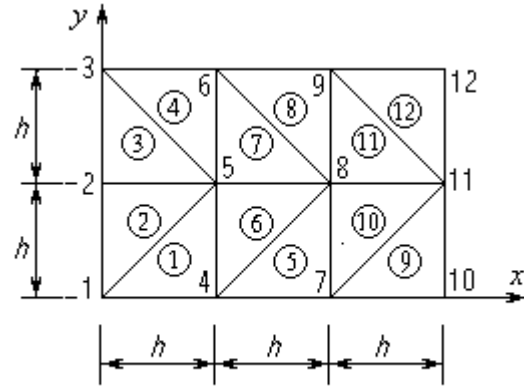


图 3.14

表 3-1. 节点坐标

节点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	0	0	0	H	h	h	$2h$	$2h$	$2h$	$3h$	$3h$	$3h$
y	0	h	$2h$	0	h	$2h$	0	h	$2h$	0	h	$2h$

表 3-2. 单元数据

单元号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
节点号	1	1	2	3	4	4	5	6	7	7	8	9
	4	5	5	5	7	8	8	8	10	11	11	11
	5	2	3	6	8	5	6	9	11	8	9	12

$$\therefore K_e = \frac{T}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad e = 1,5,9 \quad (3.79a)$$

$$K_e = \frac{T}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad e = 2,4,6,8,10,12 \quad (3.79b)$$

$$K_e = \frac{T}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e = 3,7,11 \quad (3.79c)$$

$$\text{质量矩阵 } M_e = \frac{mh^2}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad e = 1,2,\dots,12 \quad (3.80)$$

由于节点向量没有相同的次序结构, 二维域的组装比一维域更复杂。整体

$$L_1(1,0,0) = 1 \quad L_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = L_1(0,1,0) = L_1\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = L_1(0,0,1) = L_1\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$L_2(0,1,0) = 1, \quad L_3(0,0,1) = 1, \quad L_4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = 1, \quad L_5\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1, \quad L_6\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = 1 \quad (3.84)$$

其余为零。把式(3.84)代入式(3.83)得到:

$$L_1 = -x_1 + 2x_1^2,$$

$$L_2 = -x_2 + 2x_2^2,$$

$$L_3 = -x_3 + 2x_3^2,$$

$$L_4 = 4x_1x_2, \quad L_5 = 4x_2x_3, \quad L_6 = 4x_1x_3 \quad (3.85)$$

函数 L_1 和 L_4 表示在图 3.16(a)和(b)中。更高次的三角形单元将不作讨论。



图 3.16

3.5.2 四边形单元 (矩形单元)

自然坐标为 x_1, x_2 (图 3.17), 由于有四个节点, 最低阶的多项式为双线性多项式, 即:

$$L_i(x_1, x_2) = c_{i1} + c_{i2}x_1 + c_{i3}x_2 + c_{i4}x_1x_2$$

$$i = 1, \dots, 4 \quad (3.86)$$

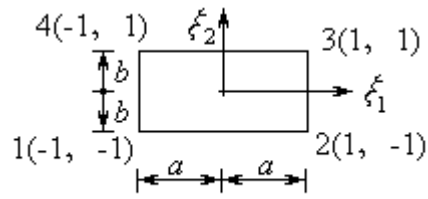


图 3.17

其中系数 $c_{ij} (j=1, 2, 3, 4)$ 由下列条件获得:

$$L_1(-1, -1) = 1, \quad L_1(1, -1) = L_1(1, 1) = L_1(-1, 1) = 0$$

$$L_2(1, -1) = 1, \quad L_2(-1, -1) = L_2(1, 1) = L_2(-1, 1) = 0$$

$$L_3(1, 1) = 1, \quad L_3(-1, -1) = L_3(1, -1) = L_3(-1, 1) = 0$$

$$L_4(-1, 1) = 1, \quad L_4(-1, -1) = L_4(1, -1) = L_4(1, 1) = 0 \quad (3.87)$$

把式(3.87)代入式(3.86), 可得到双线性插值函数的表达式为:

$$L_1 = \frac{1}{4}(1-x_1)(1-x_2), \quad L_2 = \frac{1}{4}(1+x_1)(1-x_2)$$

$$L_3 = \frac{1}{4}(1+x_1)(1+x_2), \quad L_4 = \frac{1}{4}(1-x_1)(1+x_2) \quad (3.88)$$

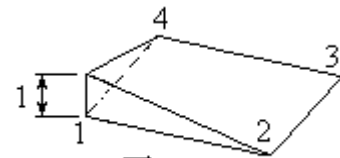


图 3.18

插值函数 L_1 如图 3.18。

作为例子, 用双线性矩形单元导出膜振动问题的单元刚度矩阵和质量矩阵。设位移

$$w(x_1, x_2) = L^T w_e \quad (3.89)$$

其中 $L = [L_1 \ L_2 \ L_3 \ L_4]^T$ 是插值函数向量, 各分量见式(3.88), w_e 为节点位移向量, $w_e = [w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4]^T$ 。

考虑图 3.19 的矩形单元, 直角坐标与局部自然坐标 x_1 和 x_2 之间的关系为:

$$x_1 = 1 - 2j + \frac{2x}{h} \quad (j-1)h \leq x \leq jh \quad (j=1,2,3) \quad (3.90a)$$

$$x_2 = 1 - 2j + \frac{2y}{h} \quad (j-1)h \leq y \leq jh \quad (j=1,2,3) \quad (3.90b)$$

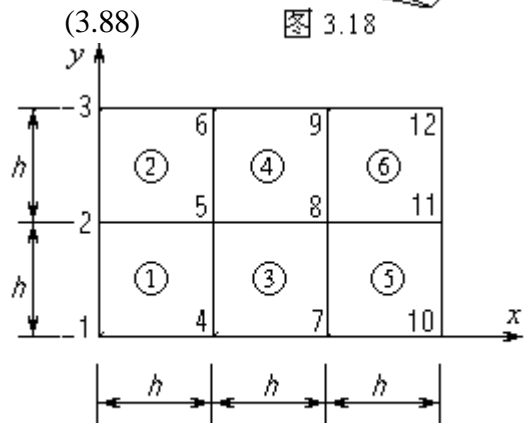


图 3.14

从式(3.88)~式(3.90)得:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2}{h} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}_1} = \frac{2}{h} \frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{w}_e = \frac{1}{2h} [-(1-\mathbf{x}_2) \quad 1-\mathbf{x}_2 \quad 1+\mathbf{x}_2 \quad -(1+\mathbf{x}_2)] \mathbf{w}_e \quad (3.91a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2}{h} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}_2} = \frac{2}{h} \frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial \mathbf{x}_2} \mathbf{w}_e = \frac{1}{2h} [-(1-\mathbf{x}_1) \quad -(1+\mathbf{x}_1) \quad 1+\mathbf{x}_1 \quad 1-\mathbf{x}_1] \mathbf{w}_e \quad (3.91b)$$

把式(3.91)代入式(3.68), 可得到式(3.72), 其中,

$$\begin{aligned} K_e &= \frac{4T}{h^2} \int_{A_e} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{x}_1} \frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial \mathbf{x}_1} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{x}_2} \frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial \mathbf{x}_2} \right) dA_e \\ &= \frac{T}{16} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \begin{bmatrix} -(1-\mathbf{x}_2) \\ 1-\mathbf{x}_2 \\ 1+\mathbf{x}_2 \\ -(1+\mathbf{x}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(1-\mathbf{x}_2) \\ 1-\mathbf{x}_2 \\ 1+\mathbf{x}_2 \\ -(1+\mathbf{x}_2) \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} -(1-\mathbf{x}_1) \\ -(1+\mathbf{x}_1) \\ 1+\mathbf{x}_1 \\ 1-\mathbf{x}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(1-\mathbf{x}_1) \\ -(1+\mathbf{x}_1) \\ 1+\mathbf{x}_1 \\ 1-\mathbf{x}_1 \end{bmatrix}^T \right\} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \\ &= \frac{T}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.92)$$

式(3.88)~式(3.89)代入式(3.70), 得到式(3.74), 其中,

$$\begin{aligned} M_e &= m \int_{A_e} \mathbf{L} \mathbf{L}^T dA_e \\ &= \frac{mh^2}{64} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \begin{bmatrix} (1-\mathbf{x}_1)(1-\mathbf{x}_2) \\ (1+\mathbf{x}_1)(1-\mathbf{x}_2) \\ (1+\mathbf{x}_1)(1+\mathbf{x}_2) \\ (1-\mathbf{x}_1)(1+\mathbf{x}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-\mathbf{x}_1)(1-\mathbf{x}_2) \\ (1+\mathbf{x}_1)(1-\mathbf{x}_2) \\ (1+\mathbf{x}_1)(1+\mathbf{x}_2) \\ (1-\mathbf{x}_1)(1+\mathbf{x}_2) \end{bmatrix}^T \right\} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \\ &= \frac{mh^2}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.93)$$

表 3-3 单元信息

单元	1	2	3	4	5	6
节点	1	2	4	5	7	8
	4	5	7	8	10	11
	5	6	8	9	11	12
	2	3	5	6	8	9

单元信息如表 3-3。

通过组装可以得到整体刚度矩阵和质量矩阵, 各元素可通过下面的方法得到, 如:

K_{55} : 找到与节点 5 有关的单元, 并将单元刚度矩阵中与节点 5 相对应的对角元素相加。
 $K_{133} + K_{222} + K_{344} + K_{411} = 16$

第4章 大自由度系统

4.1 引言

有限元法的发展使复杂结构的动力分析能用规范化的格式形成标准形式,但同时也产生了大自由度的问题(与单元划分和节点数的多少有关),矩阵的阶次有时能达到1万阶之高。由于计算机运算过程中的截断误差等等,使计算精度大大下降。

这一章的目的是恰当地缩减系统自由度的阶数,或只求有限个前 n 阶的特征值和特征向量,以减小计算工作量,提高计算精度。

4.2 静态缩聚

考虑特征值问题:

$$K\mathbf{u} = \mathbf{I}M\mathbf{u} \quad (4.1)$$

其中刚度矩阵 K 为对称矩阵,质量矩阵 M 为对角矩阵(集中质量矩阵),其中有些零对角元素, \mathbf{u} 为节点位移列阵。整理这些矩阵,把质量矩阵 M 中的零对角元集中到最后的 n 个行和列中,特征值问题可写成分块矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

写成两个方程:

$$K_{11}\mathbf{u}_1 + K_{12}\mathbf{u}_2 = \mathbf{I}M_{11}\mathbf{u}_1 \quad (4.3a)$$

$$K_{21}\mathbf{u}_1 + K_{22}\mathbf{u}_2 = 0 \quad (4.3b)$$

从式(4.3b)中解出 \mathbf{u}_2 :

$$\mathbf{u}_2 = -K_{22}^{-1}K_{21}\mathbf{u}_1 \quad (4.4)$$

把式(4.4)代入式(4.3a)中得:

$$K_{11}\mathbf{u}_1 - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}\mathbf{u}_1 = \mathbf{I}M_{11}\mathbf{u}_1$$

写成如下形式:

$$K_1\mathbf{u}_1 = \mathbf{I}M_1\mathbf{u}_1 \quad (4.5)$$

其中:

$$K_1 = K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}, \quad M_1 = M_{11} \quad (4.6)$$

解特征值问题(4.5), 得到 \mathbf{l}_i 和 \mathbf{u}_{ii} , \mathbf{u} 中的其他分量可从式(4.4)得到。

4.3 质量缩聚

结构上与某些节点位移有关的惯性力较小,它们在整个解中的重要性相对小些,因此在特征值问题中忽略这些自由度,以牺牲计算的精度来换取计算工作量的减小。

把那些重要的位移称为主位移 Master, 而不重要的位移称为次位移 Slave。设系统的势能和动能分别为:

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T K \mathbf{q} \quad (4.7a)$$

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}} \quad (4.7b)$$

把位移向量 \mathbf{q} 分成主位移 \mathbf{q}_1 和次位移 \mathbf{q}_2 两部分,

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T & \mathbf{q}_2^T \end{bmatrix}^T \quad (4.8)$$

把质量矩阵和刚度矩阵写成分块的形式, 则势能和动能分别为:

$$V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \mathbf{q}_2^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \quad (4.9a)$$

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1^T \\ \dot{\mathbf{q}}_2^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} \quad (4.9b)$$

其中: $K_{21} = K_{12}^T$, $M_{21} = M_{12}^T$ 。设次位移方向没有力或对次位移势能有最小值:

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_2} = K_{21} \mathbf{q}_1 + K_{22} \mathbf{q}_2 = 0 \quad (4.10)$$

上式相当于系统在次位移方向静平衡。从式(4.10)中解出 \mathbf{q}_2 :

$$\mathbf{q}_2 = -K_{22}^{-1} K_{21} \mathbf{q}_1 \quad (4.11)$$

这用来消去特征值问题中的次位移 \mathbf{q}_2 。

式(4.11)可当作一个约束方程, 因此位移向量 \mathbf{q} 能用主位移向量 \mathbf{q}_1 表示:

$$\mathbf{q} = C \mathbf{q}_1 \quad (4.12)$$

其中 C 是矩形约束矩阵:

$$C = \begin{bmatrix} I \\ -K_{22}^{-1} K_{21} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

其中 I 是与主位移 \mathbf{q}_1 维数相同的单位矩阵。把式(4.12)代入式(4.7):

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{q}_1^T K_1 \mathbf{q}_1 \quad (4.14a)$$

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_1^T M_1 \dot{\mathbf{q}}_1 \quad (4.14b)$$

其中:

$$K_1 = C^T K C = K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21} \quad (4.15a)$$

$$M_1 = C^T M C = M_{11} - K_{21}^T K_{22}^{-1} M_{21} - M_{12} K_{22}^{-1} K_{21} + K_{21}^T K_{22}^{-1} M_{22} K_{22}^{-1} K_{21} \quad (4.15b)$$

M_1 称为缩聚的质量矩阵。

比较式(4.11)和式(4.4), 可以认为质量缩聚技术等价于静态缩聚技术。区别是静态缩聚中没有作任何近似的处理, 而质量缩聚中有近似。那么质量缩聚过程中忽略了什么项? 讨论缩聚前的特征值问题, 并写成分块形式:

$$K_{11} \mathbf{q}_1 + K_{12} \mathbf{q}_2 = \mathbf{I} (M_{11} \dot{\mathbf{q}}_1 + M_{12} \dot{\mathbf{q}}_2) \quad (4.16a)$$

$$K_{21} \mathbf{q}_1 + K_{22} \mathbf{q}_2 = \mathbf{I} (M_{21} \dot{\mathbf{q}}_1 + M_{22} \dot{\mathbf{q}}_2) \quad (4.16b)$$

从式(4.16b)中解出 \mathbf{q}_2 得:

$$\mathbf{q}_2 = (K_{22} - \mathbf{I} M_{22})^{-1} (\mathbf{I} M_{21} - K_{21}) \mathbf{q}_1 \quad (4.17)$$

把式(4.17)代入式(4.16a)得:

$$\begin{aligned} (K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21}) \mathbf{q}_1 &= \mathbf{I} (M_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} M_{21} - M_{12} K_{22}^{-1} K_{21} + K_{12} K_{22}^{-1} M_{22} K_{22}^{-1} K_{21}) \dot{\mathbf{q}}_1 \\ &+ \mathbf{I}^2 (M_{12} K_{22}^{-1} M_{21} - M_{12} K_{22}^{-1} M_{22} K_{22}^{-1} K_{21} - K_{12} K_{22}^{-1} M_{22} K_{22}^{-1} M_{21} \\ &+ K_{12} K_{22}^{-1} M_{22} K_{22}^{-1} M_{22} K_{22}^{-1} K_{21}) \dot{\mathbf{q}}_1 + o(\mathbf{I}^3) \end{aligned} \quad (4.18)$$

把式(4.18)与式(4.15)相比较,可以知道相当于把式(4.18)中 \mathbf{I} 的二次项及高于二次的项都忽略了。如果 \mathbf{I}^2 , \mathbf{I}^3 项的系数比 \mathbf{I} 的系数小得多,那么这种方法是可行的。即要使 M_{12} 和 M_{22} 中的元素比 K_{12} 和 K_{22} 中的元素小,从物理概念上讲就是要选高刚度、低质量区域的位移作为次位移。值得一提的是,保留 \mathbf{I}^2 项的做法并不可取,因为它仍然是对原特征值问题的近似,而且计算工作量并不减少很多。

4.4 同步迭代

同步地进行给定数量特征值和特征向量的迭代,从最低阶开始,逐渐增加到较高阶次。

考虑特征值问题

$$AX_i = \mathbf{I}_i X_i \quad i=1, \dots, n \quad (4.19)$$

其中 A 是 $n \times n$ 的实对称矩阵, $X_i (i=1, \dots, n)$ 是一个 n 维的实向量,假定 X 是正则化的振型矩阵。满足

$$X_j^T X_i = \mathbf{d}_{ij} \quad (i, j=1, \dots, n) \quad (4.20)$$

设, m 个 n 维试探向量 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$, $m < n$, 并排成 $n \times m$ 矩阵:

$$U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m] \quad (4.21)$$

用 A 左乘 U 矩阵得 V 矩阵:

$$V = AU \quad (4.22)$$

其中, $V = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m]$ (4.23)

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ 也是 m 个 n 维向量。

讨论 $m \times m$ 矩阵 B 来研究 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ 和 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ 的关系。

$$B = U^T V = U^T A U \quad (4.24)$$

B 是实对称矩阵,一般不是对角矩阵。如果 \mathbf{u}_i 是矩阵 A 的特征向量,而且是正则化的特征向量,那么矩阵 B 就是非零对角元等于特征值的对角矩阵。当然,如果 U_i 是特征向量的线性组合, B 也是对角矩阵。因此 B 是对角矩阵只是 \mathbf{u}_i 是特征向量的必要条件,而不是充分条件。

对于任意的 $\mathbf{u}_i (i=1, \dots, n)$, B 矩阵的对角元素提供了 \mathbf{u}_i 与正交向量的距离。

同步迭代的步骤:

$$U_{k+1} = A U_k \quad i=1, 2, \dots \quad (4.25)$$

它能使 U_{k+1} 的列接近于第一阶特征向量,而不可能收敛于高阶特征,因此要在迭代过程采用 Gram-Schmidt 正交过程,即:

$$\hat{U}_k = U_k L_k^T \quad (4.26)$$

\hat{U}_k 是正交化的试探向量矩阵, L_k 是下三角矩阵,因此实际的迭代过程表达式为:

$$U_{k+1} = \hat{A} U_k \quad k=1, 2, \dots \quad (4.27)$$

正交化过程:

若有向量 X_1, X_2, \dots, X_m , 它们是线性独立的或几何相关的。正交化过程为:

$$\hat{Y}_1 = \hat{X}_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|}$$

其中, $\|X_i\|$ 为数积的模, \hat{Y}_1 为正则化的向量, 接着对所有向量 $X_j (j=2, \dots)$ 进行修正:

$$X_i^{(1)} = X_i - (\hat{Y}_1, X_i) \hat{Y}_1 \quad i = 2, 3, \dots, m$$

即, 使所有的 $X_i^{(1)}$ 与 \hat{Y}_1 正交。

$$\hat{Y}_2 = \frac{X_2^{(1)}}{\|X_2^{(1)}\|} \quad X_i^{(2)} = X_i^{(1)} - (\hat{Y}_2, X_i^{(1)}) \hat{Y}_2 \quad i = 3, 4, \dots, m$$

$$\hat{Y}_j = \frac{X_j^{(j-1)}}{\|X_j^{(j-1)}\|} \quad X_i^{(j)} = X_i^{(j-1)} - (\hat{Y}_j, X_i^{(j-1)}) \hat{Y}_j \quad i = j+1, \dots, m$$

$$\text{直至 } \hat{Y}_m = \frac{X_m^{(m-1)}}{\|X_m^{(m-1)}\|}$$

迭代过程收敛于:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{U}_{k+1} = \hat{X}_m \quad \lim_{k \rightarrow \infty} L_k^T = L^m \quad (4.28)$$

其中 X_m 是 $n \times m$ 矩阵, 它是由前 m 个特征向量 X_i 组成的, 而 L^m 是一个由前 m 个特征值组成的对角矩阵。收敛特性类似于 Power 法。

当特征值问题形式为

$$KX_i = \mathbf{I}_i M X_i \quad i = 1, \dots, n \quad (4.29)$$

迭代过程的形式为:

$$KU_{k+1} = M \hat{U}_k \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.30)$$

式(4.30)表示了 m 个联列的代数方程, 可用高斯消去法求解。而 \hat{U}_{k+1} 通过 U_{k+1} 对 M 的正交化获得。或

$$W_{k+1} = \mathbf{I} K^{-1} M W_k \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.31)$$

例 4.1 求下列特征值问题的最低两个特征值和特征向量。

$$KX = MXL \quad (a)$$

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (b)$$

初始试探矩阵为:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{23} & 1/\sqrt{7} \\ 2/\sqrt{23} & 2/\sqrt{7} \\ 3/\sqrt{23} & -1/\sqrt{7} \end{bmatrix} \quad (c)$$

把式(c)代入式(4.30)得 U_2 :

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1.876626 & 0.377965 \\ 3.544738 & 0.377965 \\ 4.170280 & 0 \end{bmatrix} \quad (d)$$

$$\hat{U}_2 = \begin{bmatrix} 0.263117 & 0.670821 \\ 0.49700 & 0.521749 \\ 0.584705 & -0.372677 \end{bmatrix}$$

$$\hat{Y}_1 = \begin{bmatrix} 1.876626 \\ 3.544738 \\ 4.170280 \end{bmatrix} / \sqrt{1.876626^2 m_{11} + 3.544738^2 m_{22} + 4.170280^2 m_{33}}$$

$$X_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.377965 \\ 0.377965 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.263117 \\ 0.497000 \\ 0.584705 \end{bmatrix} (0.377965 \times 0.263117 + 0.377965 \times 0.497000)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.3023721 \\ 0.235178 \\ -0.1679843 \end{bmatrix}$$

$$\hat{Y}_2 = X_2^{(1)} / \sqrt{X_2^{(1)T} [M] X_2^{(1)}} = X_2^{(1)} \times 2.2185273$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{X_1^{(1)T} M X_1^{(1)}}} & 0 \\ -\frac{X_1^{(1)T} M X_2^{(1)}}{X_1^{(1)T} M X_1^{(1)}} & \frac{1}{\sqrt{X_2^{(1)T} M X_2^{(1)}}} \end{bmatrix}$$

继续进行可得 \hat{U}_3 , L_3 和 \hat{U}_4 , L_4 直至 \hat{U}_9 , L_9 。

$$\hat{U}_9 = \begin{bmatrix} 0.269108 & 0.877790 \\ 0.500758 & 0.223975 \\ 0.581731 & -0.299433 \end{bmatrix}$$

$$L_9 = \begin{bmatrix} 0.139194 & 0 \\ 0 & 0.1745900 \end{bmatrix}$$

4.5 子空间迭代

讨论下式描述的同步迭代过程：

$$K U_{k+1} = M \hat{U}_k \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.32)$$

U_{k+1} 的正交化过程可这样进行，先求解缩减的特征值问题

$$K_{k+1} P_{k+1} = M_{k+1} P_{k+1} L_{k+1}^m \quad (4.33)$$

其中 K_{k+1} 和 M_{k+1} 为 $m \times m$ 实对称矩阵，

$$K_{k+1} = U_{k+1}^T K U_{k+1} \quad (4.34a)$$

$$M_{k+1} = U_{k+1}^T M U_{k+1} \quad (4.34b)$$

P_{k+1} 是特征向量矩阵, 而 L_{k+1}^m 是缩减的特征值矩阵。若 P_{k+1} 对 M_{k+1} 是正则正交化的, 则有:

$$P_{k+1}^T U_{k+1}^T U_{k+1} P_{k+1} = I = \hat{U}_{k+1}^T \hat{M} \hat{U}_{k+1} \quad (4.35)$$

因此可用式(4.36)正交化。

$$\hat{U}_{k+1} = U_{k+1} P_{k+1} \quad (4.36)$$

迭代过程收敛于:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{U}_{k+1} = \hat{X}^m \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{L}_{k+1}^m = \hat{L}^m \quad (4.37)$$

特点是缩减了特征值问题的阶次, 但增加了求解的次数, 随着 k 的增加, M 、 K 趋向于对角化, 求解较容易。

例 4.2 用子空间迭代法求解例 4.1 的特征值问题

第一步用例 4.1 的结果。

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1.876626 & 0.377965 \\ 3.544738 & 0.377965 \\ 4.170280 & 0 \end{bmatrix} \quad (a)$$

正交化过程, 形成 K_2 和 M_2 :

$$K_2 = U_2^T K U_2 = \begin{bmatrix} 7.086929 & 0.236433 \\ 0.236433 & 0.428573 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = U_2^T M U_2 = \begin{bmatrix} 50.869364 & 2.049086 \\ 2.049086 & 0.285715 \end{bmatrix} \quad (b)$$

解特征值问题:

$$K_2 P_2 = M_2 P_2 L_2^2 \quad (c)$$

得:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.139498 & -0.090469 \\ 0.017506 & 2.218458 \end{bmatrix}$$

$$L_2^2 = \begin{bmatrix} 0.139196 & 0 \\ 0 & 2.072345 \end{bmatrix} \quad (d)$$

$$\hat{U}_2 = U_2 P_2 = \begin{bmatrix} 0.268402 & 0.668723 \\ 0.591101 & 0.517813 \\ 0.581746 & -0.377280 \end{bmatrix} \quad (e)$$

$$\text{从 } K U_3 = M \hat{U}_2 \Rightarrow U_3 = K^{-1} M \hat{U}_2 \quad (f)$$

$$= \begin{bmatrix} 1.932996 & 0.431976 \\ 3.597590 & 0.195229 \\ 4.179337 & -0.182051 \end{bmatrix}$$

进而可得

$$K_3 = U_3^T K U_3 = \begin{bmatrix} 7.184208 & 0.000196 \\ 0.000196 & 0.525907 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = U_3^T M U_3 = \begin{bmatrix} 51.612844 & 0.015656 \\ 0.015656 & 0.290216 \end{bmatrix} \quad (g)$$

解特征值问题

$$K_3 P_3 = M_3 P_3 L_3^2 \quad (h)$$

得:

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.139194 & -0.000035 \\ 0.000989 & 1.856265 \end{bmatrix}$$

$$L_3^2 = \begin{bmatrix} 0.139194 & 0 \\ 0 & 1.812155 \end{bmatrix} \quad (i)$$

$$\hat{U}_3 = U_3 P_3 = \begin{bmatrix} 0.269061 & 0.801862 \\ 0.500762 & 0.362397 \\ 0.581737 & -0.337935 \end{bmatrix} \quad (j)$$

比较例 4.1 的过程, 可见子空间迭代过程的收敛较快。缺点是对初值较敏感。

4.6 截断法(分段法)

这种方法用于搜索给定区间的特征值。它综合了带移频的迭代, 在小区间内的搜索和缩减的特征值问题的求解。它特别适合于特征值密集的情况。

讨论特征值问题

$$KX_i = \mathbf{I}_i M X_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.38)$$

其中, M 是正定的, 目的是计算在区间 (\mathbf{a}, \mathbf{b}) 中所有的特征值 \mathbf{I}_k , 并且有 $\mathbf{I}_1 \leq \mathbf{I}_2 \leq \dots \leq \mathbf{I}_m$ 。寻找 m 个特征组成的向量集 Y_1, Y_2, \dots, Y_m , 它属于由 X_1, X_2, \dots, X_m 定义的子空间 E_n^m 。设 $Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_m]$, $X = [X_1, X_2, \dots, X_m]$ 为 $n \times m$ 矩阵,

$$Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_m] \quad X = [X_1, X_2, \dots, X_m] \quad (4.39)$$

那么必定存在某个系数矩阵 Z , 使

$$Y = XZ \quad (4.40)$$

假定 Y 已经找到, 且矩阵 Y 和 X 是正则正交的, 即它们满足

$$Y^T M Y = X^T M X = I \quad (4.41)$$

那么, 要求的特征值 \mathbf{I}_k 和 Z 矩阵的列 Z_k 必定满足缩减的特征值问题

$$\bar{K} Z_k = \mathbf{I}_k Z_k \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (4.42)$$

其中,

$$\bar{K} = Y^T K Y \quad (4.43)$$

下面求 Y 。

考虑矩阵

$$H = K - \mathbf{m}M \quad \mathbf{a} < \mathbf{m} < \mathbf{b} \quad (4.44)$$

\mathbf{m} 的选择使 H 为非奇异, 然后从某初始向量开始:

$$Y^{(1)} = \sum_{i=1}^n a_i X_i \quad (4.45)$$

迭代过程有如下形式:

$$H Y^{(j+1)} = W^{(j)} \quad j = 1, 2 \quad (4.46)$$

其中

$$W^{(j)} = M Y^{(j)} / \|Y^{(j)}\| \quad j = 2, 3, \dots \quad (4.47)$$

其中 $\|Y^{(j)}\|$ 是 $Y^{(j)}$ 的欧拉模。注意，方程(4.46)可用高斯消去法求解。

下面引入记号：

$$P_j = \|Y^{(j)}\| \cdot \|Y^{(j-1)}\| \cdots \|Y^{(2)}\| \cdot \|Y^{(1)}\| \quad (4.48)$$

$$\text{和 } h = \mathbf{I}_k - \mathbf{m} \quad (4.49)$$

其中，

$$|\mathbf{I}_k - \mathbf{m}| = \min |\mathbf{I}_i - \mathbf{m}| \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.50)$$

注意 h 取绝对值，因为 h 可以是负的。

可以证明

$$P_j W^{(j)} = \frac{1}{h^{j-1}} \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{r}_i^{j-1} M X_i \quad j = 2, 3 \quad (4.51)$$

$$\text{和 } P_j Y^{(j+1)} = \frac{1}{h^j} \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{r}_i^j X_i \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.52)$$

$$\text{其中： } \mathbf{r}_i = \frac{h}{\mathbf{I}_i - \mathbf{m}} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.53)$$

$$\text{观察：对 } \mathbf{s} = \min(\mathbf{b} - \mathbf{m}, \mathbf{m} - \mathbf{a}) \quad (4.54)$$

$$\text{有 } |\mathbf{r}_i| \leq \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq m \\ |h/\mathbf{s}| < 1 & m \leq i \leq n \end{cases} \quad (4.55)$$

加上 h 的估计，可找到一组在子空间 E_n^m 中的向量。选 \mathbf{m} 在区间 (\mathbf{a}, \mathbf{b}) 的中心或 $\mathbf{m} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$ ，则对一个预选的数 \mathbf{g} ， $0 < \mathbf{g} < 1$ ，有三种可能性：

- 1) $|h|$ 的估计收敛于比 \mathbf{s} 大的值，那时 $m = 0$ ，因此在区间 $\mathbf{a} \leq \mathbf{m} \leq \mathbf{b}$ 中无特征值。
- 2) $|h|$ 的估计收敛于 \mathbf{a} ， \mathbf{a} 小于 $\mathbf{g}\mathbf{s}$ 。在这种情况下，迭代过程到 $Y^{(j)}$ 进入 E_n^m 空间才结束。注意迭代以 $|h/\mathbf{s}|^p < \mathbf{g}^p$ 的速率收敛。
- 3) $|h|$ 的估计收敛于 $\mathbf{g}\mathbf{s} < |h| < \mathbf{s}$ ，在这种情况下，在范围 $\mathbf{m} - \mathbf{g}\mathbf{s} < \mathbf{l} < \mathbf{m} + \mathbf{g}\mathbf{s}$ 中无特征值。在这种情况下，我们分别研究两个区间 $(\mathbf{a}, \mathbf{m} - \mathbf{g}\mathbf{s})$ 和 $(\mathbf{m} + \mathbf{g}\mathbf{s}, \mathbf{b})$ 。所以我们用同样的过程而不用不同的移位 \mathbf{m} 。

Jensen 证明了序列 $\|Y^{(j)}\|^{-1}$ 收敛于 $|h|$ 。

对于给定的 \mathbf{m} ，参数 \mathbf{g} 控制了算法的有效性。但收敛并不依赖于 \mathbf{g} ， \mathbf{g} 的值几乎不控制迭代循环的长度。事实上，如果 \mathbf{g} 选得很小，在 \mathbf{m} 的附近无特征值，那么需要换一个 \mathbf{m} 。如果 \mathbf{g} 是一个大数，移位最小，但收敛较慢，因为在这种情况下， \mathbf{m} 不必如此靠近一个特征值。数值例子可参考文献 J2：

Jensen P. S. "The Solution of Large Symmetric Eigenproblems by Sectioning", SIAM J. of Numerical Analysis, Vol. 9, No. 4, 1972, pp. 534-545。

第 5 章 子结构综合

5.1 引言

在寻找分析复杂结构新方法的过程中，产生了有限元法。同时，也出现一些其它的方法，如 Hurty 提出的分量模态综合，Gladwell 提出的分支模态综合，及其扩展的形式，分量模态置换法。在这些方法中，结构被当作子结构的集(群)，按照 Rayleigh-Ritz 原理，每一个子结构的运动能用分量模态的线性组合表示，并假定分量模态是从解子结构特征值问题产生的。

所谓子结构综合法就是把整个结构当作是用恰当的允许函数有限子集表示的子结构组装而成的结构。

5.2 分量模态综合

一个结构如果能当作一些子结构组成的群，那么首先对每一个子结构推导其运动方程，然后通过那些反映不同子结构之间相互作用力的约束来连接这些方程。

所谓分量是指给定子结构。每一个子结构的运动用分量模态来描述，分量模态包括三部分：即刚体模态、约束模态和正则模态。子结构的运动由乘上时变广义坐标的分量模态的线性组合表示。沿每一个子结构的积分，可导出子结构的 Lagrange 方程，然后整个结构的运动方程可用系统的广义坐标通过组装得到。这种方法基本上是 Rayleigh-Ritz 型离散过程，同时与子结构中的截断相结合。它用有限自由度来描述一个复杂结构。

设子结构为 S ， S 上任一点 $P(x, y, z)$ 的总位移向量 $\mathbf{u}_s(x, y, z, t)$ 有如下形式：

$$\mathbf{u}_s(x, y, z, t) = \mathbf{u}_s^R(x, y, z, t) + \mathbf{u}_s^C(x, y, z, t) + \mathbf{u}_s^N(x, y, z, t) \quad (5.1)$$

其中，等式右边三项分别为刚体位移、约束位移和正则位移，正则位移是指相对于固定约束的位移。这几种位移可用图形表示，其中图 5.1a 为无位移、无变形的子结构，它们有一组约束（由箭头表示）。六个用数字 1-6 编号的约束是一组静定约束，其余用 i, j, k 表示的约束为超静定约束。所有的约束是可运动的，由于它们是通过约束连接到本身在运动的相邻子结构上的。图 5.1b 中实线是子结构作为一个刚体位移的结果，它的位置由六个静定约束的任意位移唯一确定。在这个过程中，子结构中的 P 点有了刚体位移 \mathbf{u}_s^R 。约束位移 \mathbf{u}_s^C 代表来自超静定约束相对于刚体运动的位移，即每一个超静定约束的任意位移使 P 点产生位移的线性组合。静定和超静定的运动为所有可运动约束的任意位移提供了条件。除了这些位移外，还必须为子结构上任一点相对于约束的位移提供条件。这个运动用 \mathbf{u}_s^N 表示。

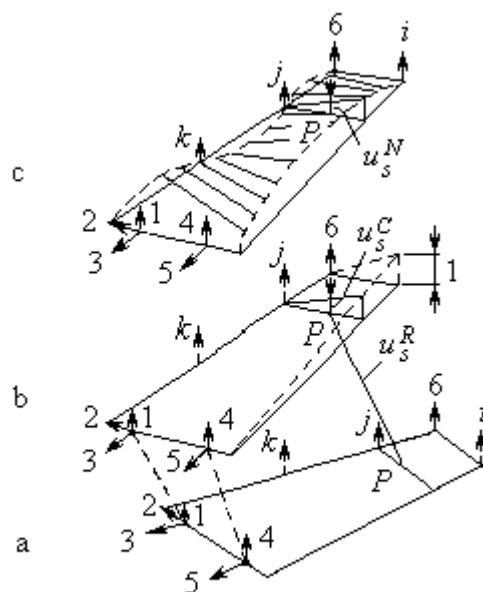


图 5.1

这些位移可以写成只依赖于位置的函数与只依赖于时间的函数之积：

$$\mathbf{u}_s^R = \mathbf{F}_s^R(x, y, z)\mathbf{z}_s^R(t) \quad (5.2a)$$

$$\mathbf{u}_s^C = \mathbf{F}_s^C(x, y, z)\mathbf{z}_s^C(t) \quad (5.2b)$$

$$\mathbf{u}_s^N = \mathbf{F}_s^N(x, y, z)\mathbf{z}_s^N(t) \quad (5.2c)$$

其中 \mathbf{F}_s^R , \mathbf{F}_s^C 和 \mathbf{F}_s^N 一般是矩形矩阵, \mathbf{z}_s^R , \mathbf{z}_s^C 和 \mathbf{z}_s^N 是向量。通常 \mathbf{F}_s^R 是 3×6 刚体模态矩阵, \mathbf{z}_s^R 是与刚体模态对应的 6 维广义坐标向量, 在子结构受外部约束的情况, 它有少于六个刚体模态。

当子结构没有外部约束时, 能很方便地取三个移动和三个旋转模态为刚体模态, 它在运动学上相当于图 5.1 用数字 1-6 编号的六个位移。矩阵 \mathbf{F}_s^C 称为约束模态, 它有三行, 并有与超静定约束数相同的列。很清楚, 广义超静定约束向量 \mathbf{z}_s^C 的维数必定与 \mathbf{F}_s^C 的列数相同。

最后, \mathbf{F}_s^N 是振动固有模态, 它有三行。理论上, 分布参数子结构有无穷多个固有模态, 因此有无穷多列, 固有模态向量 \mathbf{z}_s^N 也必须有无穷多个自由度。实际上, 只考虑有限多个固有模态, 因此 \mathbf{z}_s^N 是有限维的。由于位移 \mathbf{u}_s^N 是相对于约束度量的, 因此固有模态必须作为固定约束模态。 \mathbf{z}_s^R 和 \mathbf{z}_s^C 维数之和表示子结构的外自由度数, 而 \mathbf{z}_s^N 的维数表示其内自由度数。引入矩阵:

$$\mathbf{F}_s = [\mathbf{F}_s^R \quad \mathbf{F}_s^C \quad \mathbf{F}_s^N] \quad (5.3)$$

和向量

$$\mathbf{z}_s = [(\mathbf{z}_s^R)^T \quad (\mathbf{z}_s^C)^T \quad (\mathbf{z}_s^N)^T]^T \quad (5.4)$$

式(5.1)和式(5.2)可写成:

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{F}_s \mathbf{z}_s \quad (5.5)$$

同子结构 S 相联系的动能有一般的表达式:

$$T_s = \frac{1}{2} \int_{D_s} m_s \dot{\mathbf{u}}_s^T \dot{\mathbf{u}}_s dD_s \quad (5.6)$$

其中 m_s 是质量密度, 而 D_s 是子结构所占据的域。把式(5.5)代入式(5.6), 得到离散化的动能表达式:

$$T_s = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{z}}_s^T M_s \dot{\mathbf{z}}_s \quad (5.7)$$

其中

$$M_s = \int_{D_s} m_s \mathbf{F}_s^T \mathbf{F}_s dD_s \quad (5.8)$$

M_s 称为子结构质量矩阵。类似地, Rayleigh 耗散函数为

$$F_s = \frac{1}{2} \int_{D_s} c_s \dot{\mathbf{u}}_s^T \dot{\mathbf{u}}_s dD_s \quad (5.9)$$

其中 c_s 是分布的阻尼系数。用式(5.5), 可得:

$$F_s = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{z}}_s^T C_s \dot{\mathbf{z}}_s \quad (5.10)$$

其中

$$C_s = \int_{D_s} c_s \mathbf{F}_s^T \mathbf{F}_s dD_s \quad (5.11)$$

用能量内积 $[\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_s]$ 的形式写势能:

$$V_s = \frac{1}{2}[\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_s] \quad (5.12)$$

其中, $[\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_s]$ 是一个三维能量积分, 由式(1.103)给出。

把方程(5.5)代入式(5.12), 能写

$$V_s = \frac{1}{2} \mathbf{z}_s^T K_s \mathbf{z}_s \quad (5.13)$$

其中

$$K_s = [\mathbf{F}_s, \mathbf{F}_s] \quad (5.14)$$

K_s 称为子结构刚度矩阵。

最后, 除阻尼力外, 其它非保守力对子结构的虚功可写成

$$dW_s = \int_{D_s} \mathbf{f}_s^T d\mathbf{u}_s dD_s \quad (5.15)$$

其中 \mathbf{f}_s 为均布力向量, 包括外力和约束力。用式(5.5)可得

$$dW_s = \mathbf{P}_s^T d\mathbf{z}_s \quad (5.16)$$

其中

$$\mathbf{P}_s = \int_{D_s} \mathbf{f}_s^T dD_s \quad (5.17)$$

\mathbf{P}_s 为子结构的广义力向量 (除了阻尼力以外)。

子结构的运动方程能用 Lagrange 方程得到

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_s}{\partial \dot{\mathbf{z}}_s} \right) - \frac{\partial T_s}{\partial \mathbf{z}_s} + \frac{\partial F_s}{\partial \mathbf{z}_s} + \frac{\partial V_s}{\partial \mathbf{z}_s} = \mathbf{P}_s \quad (5.18)$$

把式(5.7), 式(5.10), 式(5.13)代入方程(5.18), 得:

$$M_s \ddot{\mathbf{z}}_s(t) + C_s \dot{\mathbf{z}}_s(t) + K_s \mathbf{z}_s(t) = \mathbf{P}_s(t) \quad (5.19)$$

下面开始组装。引入矩阵:

$$\begin{aligned} M^d &= \text{分块对角矩阵} [M_s] & C^d &= \text{分块对角矩阵} [C_s] \\ K^d &= \text{分块对角矩阵} [K_s] & & s = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.20)$$

以及向量:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= [\mathbf{z}_1^T(t) \quad \mathbf{z}_2^T(t) \quad \dots \quad \mathbf{z}_s^T(t) \quad \dots]^T \\ \mathbf{P}(t) &= [\mathbf{P}_1^T(t) \quad \mathbf{P}_2^T(t) \quad \dots \quad \mathbf{P}_s^T(t) \quad \dots]^T \end{aligned} \quad (5.21)$$

子结构群的运动方程为:

$$M^d \ddot{\mathbf{z}}(t) + C^d \dot{\mathbf{z}}(t) + K^d \mathbf{z}(t) = \mathbf{P}(t) \quad (5.22)$$

方程(5.22)为未经连接的子结构方程组, 用上标 d 表示。未经连接是指坐标向量 $\mathbf{z}(t)$ 中包含一定数量的多余分量, 这些多余分量相应于不同的约束。消除多余坐标的过程是把不相连的子结构方程连接到一起的过程。假定向量 $\mathbf{z}(t)$ 有 m 维, 有 c 个约束, 那么独立的广义坐标数是 $n = m - c$, n 是系统的自由度数, 用 $\mathbf{q}(t)$ 表示 n 维独立的广义坐标向量, 我们能写 $\mathbf{z}(t)$ 和 $\mathbf{q}(t)$ 之间的关系:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{b} \mathbf{q}(t) \quad (5.23)$$

其中 \mathbf{b} 是一个 $m \times n$ 的变换矩阵, 依赖于约束的特性。把式(5.23)代入式(5.22), 并且左乘 \mathbf{b}^T , 得到耦合的系统运动方程。

$$M \ddot{\mathbf{q}}(t) + C \dot{\mathbf{q}}(t) + K \mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}(t) \quad (5.24)$$

$$\text{其中 } M = \mathbf{b}^T M^d \mathbf{b}, \quad C = \mathbf{b}^T C^d \mathbf{b}, \quad K = \mathbf{b}^T K^d \mathbf{b} \quad (5.25)$$

M 、 C 和 K 是实对称矩阵，分别为质量、阻尼和刚度矩阵，而

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{b}^T \mathbf{P}(t) \quad (5.26)$$

$\mathbf{Q}(t)$ 是系统的 n 维广义力向量。在连接子结构的过程中，约束力消失，因此，向量 $\mathbf{Q}(t)$ 只包含外力的影响。

矩阵 \mathbf{b} 反映了边界点的某种相容性条件，例如，如果一个点为子结构 r 和 s 所共有，由于这一点不管它在结构 r 或 s 上有相同的位移，我们有

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_s \quad (5.27)$$

其中 \mathbf{u} 代表位移向量。加上如果在同一点，不可能有角度的变化，因此

$$\mathbf{q}_r = \mathbf{q}_s \quad (5.28)$$

其中 \mathbf{q} 代表转角向量，它包含小转动假设。消去由约束引起的多余自由度类似于静态缩聚过程。实际上，如果以一般形式来写约束方程：

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = 0 \quad (5.29)$$

其中 A 为 $c \times m$ 矩阵，把向量 \mathbf{z} 分成包含 n 维独立变量的向量 \mathbf{q} 和 c 维不独立变量向量 \mathbf{z}_d 之和，可把矩阵 A 分块成：

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2] \quad (5.30)$$

其中， \mathbf{A}_2 是非奇异的 $c \times c$ 阶矩阵，而 \mathbf{A}_1 是 $n \times c$ 阶矩阵，那么方程(5.29)能写成：

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{q} + \mathbf{A}_2 \mathbf{z}_d = 0 \quad (5.31)$$

从方程(5.31)可得：

$$\mathbf{z}_d = -\mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{q} \quad (5.32)$$

因此：
$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{z}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (5.33)$$

其中， \mathbf{I} 是 n 阶单位矩阵，比较式(5.23)和式(5.33)得：

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

上面的讨论中明确地区分了静定和超静定约束。实际上，所有的边界约束应该同等处理。这是 Craig 和 Bampton 方法的基础。他们建议所有的约束作为边界约束处理，而不必专门识别刚体模态。这是一种具有吸引力的思想，其实，图 5.1 中的刚体模态和约束模态都由边界位移给出，因此，只须区分外自由度和内自由度。

所谓约束模态是某一个边界点有单位位移，而其它各点都被约束时的振型。Craig 和 Bampton 用有限元而不是分布参数系统来分析子结构，他们简单地认为约束位移是边界的节点位移。另一方面，内部模态就简单地是边界节点全部约束时子结构的正则模态。这种方法的细节可参考文献 C5。

上述方法一般称为固定约束（界面）模态法，因为用于描述运动的模态相应于固定约束条件。

有关分量模态法的讨论及发展可参考文献 D1。

5.3 分支模态综合法

另一个基于子结构综合思想的方法称为分支模态综合。它与分量模态综合几乎同时提出，并有些类似的特点。研究的系统具有链式结构，链式结构中每一个子结构与另外两个子结构相连接，每边一个。这种方法能拓展到一系列子结构在

同一点连接的情况。子结构能被分组成为子集，子集称为分支。每一个分支的运动用分支模态表示，分支模态一般是每一个分支单独的振动模态。每个分支取多少模态的问题由读者自定。分支模态定义为：让分支中的某子结构是弹性的，而其它子结构都固定或自由时的模态。在后一种情况下，子结构会有刚体模态。（图 5.2）

注意，相容条件为 $\mathbf{q}_{b2} = \mathbf{q}_{c2}$ ，而在第一种情况 $\mathbf{q}_{b2} = \mathbf{q}_{c2} = 0$ 。分支边界也可能有其它可能的形式，如图 5.2 b 的左边可看作是固定而不是自由。Gladwell 以集中质量系统为例表示了这种方法，但他未讨论超静定约束。

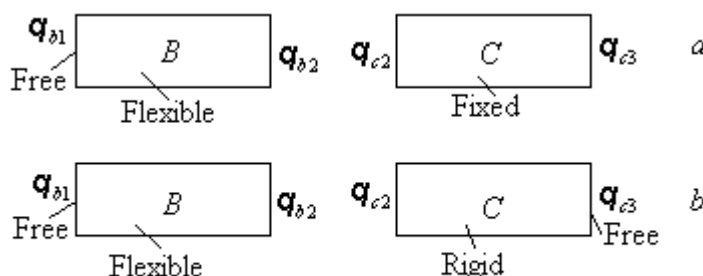


图 5.2

设 n 个自由度的系统动能和势能为：

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}} \quad (5.35a)$$

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T K \mathbf{q} \quad (5.35b)$$

运用 Lagrange 方程可导出 n 个联列的普通微分方程及 n 阶的特征值问题。当 n 很大的时候，希望将自由度减小为 m ， $m \ll n$ 。用分支模态综合法导出的 m 自由度系统能很好地近似原高阶系统。每一个分支运动都由减小的振型表示。这种方法与分量模态综合类似，主要区别在于模态的定义。

设系统由分支 B, C, \dots, S 组成，分支的运动可用 m_b, m_c, \dots, m_s 个模态表示。那么缩减系统的自由度数为 $m = m_0 + m_b + \dots + m_s$ ，其中 m_0 是整个系统的刚体模态数。让 $X_0, X_b, X_c, \dots, X_s$ 是 $n \times m_0, n \times m_b, n \times m_c, n \times m_s$ 的刚体模态和分支模态矩阵，并组合成 $n \times m$ 阶矩阵：

$$X = [X_0 \quad X_b \quad X_c \quad \dots \quad X_s] \quad (5.36)$$

n 维的位形向量 \mathbf{q} 可写成如下形式：

$$\mathbf{q} = X \mathbf{u} \quad (5.37)$$

其中 \mathbf{u} 为 m 维缩减了的位形向量，把式(5.37)代入式(5.35)得到：

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T M^* \dot{\mathbf{u}} \quad (5.38a)$$

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T K^* \mathbf{u} \quad (5.38b)$$

其中， $M^* = X^T M X$ (5.39a)

$$K^* = X^T K X \quad (5.39b)$$

称为缩减的质量和刚度矩阵。相应的特征值问题是：

$$K^* U = M^* U L^m \quad (5.40)$$

其中 L^m 是估计的特征值对角矩阵，而 U 是减小的特征值问题的特征向量矩阵。用 $\mathbf{u}_i (i=1, 2, \dots, m)$ 表示减小的特征值问题的特征向量，用方程(5.37)，可得：

$$\mathbf{q}_i = X \mathbf{u}_i \quad i=1, 2, \dots, m \quad (5.41)$$

当然，只能获得 m 个最低阶的系统模态。

系统有 m_0 个刚体模态，因此特征值中前 m_0 个是零。所以问题能通过类似于静态缩聚的过程消除刚体模态而进一步缩减。把矩阵 X 分块：

$$X = [X_0 : X_a] \quad (5.42)$$

其中，

$$X_a = [X_b : X_c : \dots : X_s] \quad (5.43)$$

是一个 $n \times (m - m_0)$ 的分支模态矩阵。矩阵 M^* 和 K^* 也能分块：

$$M^* = \begin{bmatrix} M_{00} & M_{0a} \\ M_{a0} & M_{aa} \end{bmatrix} \quad (5.44a)$$

$$K^* = \begin{bmatrix} K_{00} & K_{0a} \\ K_{a0} & K_{aa} \end{bmatrix} \quad (5.44b)$$

其中，

$$M_{00} = X_0^T M X_0, \quad M_{0a} = X_0^T M X_a = M_{a0}^T, \quad M_{aa} = X_a^T M X_a \quad (5.45a)$$

$$K_{00} = X_0^T K X_0, \quad K_{0a} = X_0^T K X_a = K_{a0}^T, \quad K_{aa} = X_a^T K X_a \quad (5.45b)$$

类似地，把矩阵 U 和 L^m 也分块：

$$U = \begin{bmatrix} U_{00} & U_{0a} \\ U_{a0} & U_{aa} \end{bmatrix} \quad (5.46a)$$

$$L^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L^{m-m_0} \end{bmatrix} \quad (5.46b)$$

其中 L^{m-m_0} 是非零特征值的对角矩阵，把式(5.44)－式(5.46)代入式(5.40)，得到：

$$0 = (M_{00} U_{0a} + M_{0a} U_{aa}) L^{m-m_0} \quad (5.47a)$$

$$K_{aa} U_{aa} = (M_{a0} U_{0a} + M_{aa} U_{aa}) L^{m-m_0} \quad (5.47b)$$

此外，由于 U_{a0} 是刚体模态矩阵的部分，因而 $K_{aa} U_{a0} = 0$ ，从式(5.47b)可解出 U_{0a} ：

$$U_{0a} = -M_{00}^{-1} M_{0a} U_{aa} \quad (5.48)$$

把式(5.48)代入式(5.47b)时得到进一步减小的特征值问题：

$$K_{aa} U_{aa} = (M_{aa} - M_{a0} M_{00}^{-1} M_{0a}) U_{aa} L^{m-m_0} \quad (5.49)$$

剩下的问题是如何产生在式(5.37)中用到的变换矩阵，这个矩阵可通过求解分支特征值问题获得。例如，在图 5.2a 的情况下，矩阵 X_b 通过解与分支 B 有关的特征值问题得到，分支 B 的左边自由而右边固定。Gladwell 的文章中有数值例子。

当处理固定、固定系统时，系统至少要分成三个分支。

5.4 分量模态置换

设系统由 a 和 b 两个子结构组成，而 \bar{q}_a 和 \bar{q}_b 表示界面位移向量， \hat{q}_a 和 \hat{q}_b 为内部位移向量(图 5.3)。因此，子结构位移向量为：

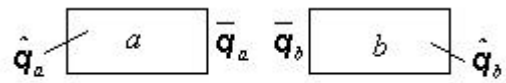


图 5.3

$$\mathbf{q}_a = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_a^T & \hat{\mathbf{q}}_a^T \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{q}_b = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_b^T & \hat{\mathbf{q}}_b^T \end{bmatrix}^T \quad (5.50)$$

用 $\bar{\mathbf{P}}_a$, $\hat{\mathbf{P}}_a$, $\bar{\mathbf{P}}_b$, $\hat{\mathbf{P}}_b$ 表示相应的力向量:

$$\mathbf{P}_a = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_a^T & \hat{\mathbf{P}}_a^T \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{P}_b = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_b^T & \hat{\mathbf{P}}_b^T \end{bmatrix}^T \quad (5.51)$$

子结构 b 的力与位移之间的关系有:

$$\mathbf{P}_b = K_b \mathbf{q}_b \quad (5.52)$$

其中 K_b 为子结构 b 的刚度矩阵, 式(5.52)写成分块的形式有:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_b \\ \hat{\mathbf{P}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{b11} & K_{b12} \\ K_{b21} & K_{b22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_b \\ \hat{\mathbf{q}}_b \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

由于内部点的力为零, 因此:

$$K_{b21} \bar{\mathbf{q}}_b + K_{b22} \hat{\mathbf{q}}_b = 0 \quad (5.54)$$

可把式(5.54)写成:

$$\hat{\mathbf{q}}_b \Big|_{\hat{\mathbf{P}}_b=0} = \hat{\mathbf{q}}_{cb} = T_{cb} \bar{\mathbf{q}}_b \quad (5.55)$$

$$\text{其中 } T_{cb} = -K_{b22}^{-1} K_{b21} \quad (5.56)$$

$$\text{因此 } \mathbf{q}_b \Big|_{\hat{\mathbf{P}}_b=0} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_b \\ \hat{\mathbf{q}}_{cb} \end{bmatrix} = T_{rb} \bar{\mathbf{q}}_b \quad (5.57)$$

其中, T_{rb} 是变换矩阵,

$$T_{rb} = \begin{bmatrix} I \\ T_{cb} \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

式(5.54) - 式(5.58)就是前面讲过的静态缩聚过程。

子结构 b 的势能为:

$$V_b = \frac{1}{2} \mathbf{q}_b^T K_b \mathbf{q}_b \quad (5.59)$$

用式(5.57), 势能可写成受约束的形式

$$V_{cb} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}_b^T \bar{K}_b \bar{\mathbf{q}}_b \quad (5.60)$$

$$\text{其中 } \bar{K}_b = T_{rb}^T K_b T_{rb} \quad (5.61)$$

\bar{K}_b 称为缩减的刚度矩阵。类似地, 如果子结构的动能为

$$T_b = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_b^T M_b \dot{\mathbf{q}}_b \quad (5.62)$$

那么约束后的动能是

$$T_{cb} = \frac{1}{2} \dot{\bar{\mathbf{q}}}_b^T \bar{M}_b \dot{\bar{\mathbf{q}}}_b \quad (5.63)$$

其中:

$$\bar{M}_b = T_{rb}^T M_b T_{rb} \quad (5.64)$$

未经连接的子结构 a 和 b 总势能为

$$V_b = \frac{1}{2} \mathbf{q}_a^T K_a \mathbf{q}_a + \frac{1}{2} \mathbf{q}_b^T K_b \mathbf{q}_b \quad (5.65)$$

由于两个子结构通过界面约束连接在一起，因此有

$$\bar{\mathbf{q}}_a = \bar{\mathbf{q}}_b \quad (5.66)$$

假定要在同样的坐标系下表示 $\bar{\mathbf{q}}_a$ 和 $\bar{\mathbf{q}}_b$ ，因此，需要从局部坐标向总体坐标的转换，转换矩阵是方向余弦矩阵。

为了用式(5.66)连接子结构 a 和 b ，坐标变换为：

$$\bar{\mathbf{q}}_b = T_L \mathbf{q}_a \quad (5.67)$$

$$\text{其中, } T_L = [I \quad 0] \quad (5.68)$$

把式(5.60)和式(5.67)代入式(5.65)，得到约束系统的总势能为：

$$V^a = \frac{1}{2} \mathbf{q}_a^T K^a \mathbf{q}_a \quad (5.69)$$

$$\text{其中, } K^a = K_a + T_L^T \bar{K}_b T_L \quad (5.70)$$

K^a 为约束的刚度矩阵。

类似地，约束系统的总动能是：

$$T^a = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_a^T M^a \dot{\mathbf{q}}_a \quad (5.71)$$

其中，

$$M^a = M_a + T_L^T \bar{M}_b T_L \quad (5.72)$$

M^a 为约束系统质量矩阵。

约束系统的运动方程具有紧凑的矩阵形式

$$M^a \ddot{\mathbf{q}}_a + K^a \mathbf{q}_a = 0 \quad (5.73)$$

设 \mathbf{F}_a 是系统的模态矩阵，它由解(5.73)的特征值问题得到，位移 \mathbf{q}_a 能写成：

$$\mathbf{q}_a(t) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_a \\ \hat{\mathbf{q}}_a \\ \mathbf{q}_a \end{bmatrix} = \mathbf{F}_a \mathbf{x}_a(t) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_a \\ \hat{\mathbf{F}}_a \\ \mathbf{F}_a \end{bmatrix} \mathbf{x}_a(t) \quad (5.74)$$

其中 $\mathbf{x}_a(t)$ 是广义位移向量。

一般，存在两个以上的子结构，子结构 b 可当作以分支形式连接在一起的系统所有其它子结构。

设子结构 b 的非界面位移能表示成约束模态和固定约束模态的线性组合（定义同 5.2 节），则约束位移 $\hat{\mathbf{q}}_{cb}$ 基本上是约束模态的线性组合。因此，由式(5.56)表示矩阵 T_{cb} 的列代表了约束模态。用 $\hat{\mathbf{q}}_{nb}$ 表示相对于约束位移的非界面位移向量。因此有

$$\hat{\mathbf{q}}_b = \hat{\mathbf{q}}_{cb} + \hat{\mathbf{q}}_{nb} \quad (5.75)$$

用式(5.55)，可写

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_a \\ \hat{\mathbf{q}}_a \\ \bar{\mathbf{q}}_b \\ \hat{\mathbf{q}}_b \\ \mathbf{q}_b \end{bmatrix} = T_1^c \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_a \\ \hat{\mathbf{q}}_a \\ \bar{\mathbf{q}}_b \\ \hat{\mathbf{q}}_b \\ \mathbf{q}_{nb} \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

其中：

$$T_1^c = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & T_{cb} & I \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

由于 $\bar{\mathbf{q}}_a = \bar{\mathbf{q}}_b$ ，从式(5.76)右边的向量中消去 $\bar{\mathbf{q}}_b$ ，得到

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_a \\ \hat{\mathbf{q}}_a \\ \bar{\mathbf{q}}_b \\ \hat{\mathbf{q}}_{nb} \end{bmatrix} = T_2^c \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_a \\ \hat{\mathbf{q}}_a \\ \hat{\mathbf{q}}_{nb} \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

$$\text{其中, } T_2^c = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

所以式(5.76)可写成:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_a \\ \hat{\mathbf{q}}_a \\ \bar{\mathbf{q}}_b \\ \hat{\mathbf{q}}_b \end{bmatrix} = T_3^c \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_a \\ \hat{\mathbf{q}}_a \\ \hat{\mathbf{q}}_{nb} \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

$$\text{其中 } T_3^c = T_1^c T_2^c \quad (5.81)$$

位移 $\hat{\mathbf{q}}_{nb}$ 是子结构 b 固定约束模态的迭加，固定界面运动方程有矩阵形式:

$$M_{b22} \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_b + K_{b22} \hat{\mathbf{q}}_b = 0 \quad (5.82)$$

解得:

$$\hat{\mathbf{q}}_b(t) \Big|_{\bar{\mathbf{q}}_b=0} = \hat{\mathbf{q}}_{nb}(t) = \hat{\mathbf{F}}_b^x \mathbf{x}_b^c(t) \quad (5.83)$$

其中，固定约束模态矩阵 $\hat{\mathbf{F}}_b^x$ 通过解与方程(5.82)相联的特征值问题得到。利用式(5.74)和式(5.83)有

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_a \\ \hat{\mathbf{q}}_a \\ \bar{\mathbf{q}}_b \\ \hat{\mathbf{q}}_{nb} \end{bmatrix} = T_4^c \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b^c \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

$$\text{其中, } T_4^c = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_a & 0 \\ \hat{\mathbf{F}}_a & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{F}}_b^x \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

最后，把子结构 a 和 b 的位移与广义坐标向量 \mathbf{x}_a 和 \mathbf{x}_b^c 联系起来，把式(5.80)和(5.84)联系在一起:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{q}}_a \\ \hat{\mathbf{q}}_a \\ \overline{\mathbf{q}}_b \\ \hat{\mathbf{q}}_b \end{bmatrix} = T_5^c \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b^c \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

其中,

$$T_5^c = T_3^c \cdot T_4^c = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{F}}_a & 0 \\ \hat{\mathbf{F}}_a & 0 \\ \overline{\mathbf{F}}_a & 0 \\ T_{cb} \overline{\mathbf{F}}_a & \hat{\mathbf{F}}_b^c \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

下面来推导系统模态,事实上,无连接系统的势能为:

$$V_T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a^T \\ \mathbf{q}_b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_a & 0 \\ 0 & K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_b \end{bmatrix} \quad (5.88)$$

用式(5.86)得联接后系统的势能为

$$V_{ab} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a^T \\ \mathbf{x}_b^T \end{bmatrix} K^c \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} \quad (5.89)$$

$$\text{其中 } K^c = (T_5^c)^T \begin{bmatrix} K_a & 0 \\ 0 & K_b \end{bmatrix} T_5^c \quad (5.90)$$

类似地,连接后系统的动能为

$$T_{ab} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_a^T \\ \dot{\mathbf{x}}_b^T \end{bmatrix} M^c \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_a \\ \dot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} \quad (5.91)$$

其中

$$M^c = (T_5^c)^T \begin{bmatrix} M_a & 0 \\ 0 & M_b \end{bmatrix} T_5^c \quad (5.92)$$

系统的模态能通过解(5.93)的特征值问题得到:

$$K^c \mathbf{F}_m^c = M^c \mathbf{F}_m^c \mathbf{L}_m^c \quad (5.93)$$

其中, Φ_m^c 为系统模态矩阵, \mathbf{L}_m^c 是对角矩阵, 对角元素为频率平方。

为求系统的特征值问题, 要解三次特征值问题(5.73)、(5.82)和(5.93)。

这种方法利用约束的子结构—分支模态计算系统模态。同样可导出利用自由—自由子结构模态计算系统模态, 详细的可参考文献 B4。

5.5 子结构综合

前面的三种方法有两个共同点: 一是都把结构当作子结构的组合, 而每一个子结构的运动用分量模态的迭加表示, 它们的区别在于用哪一种模态作为分量模态。

本节与前面三种方法的区别是它利用在能量空间完备的允许函数表示子结构的运动, 而不是用分量模态。

5.5.1 单点内边界（即子结构之间单点连接）

各子结构之间在某一点相互连接，连接点的几何相容条件能通过运动学上的处理自动满足。子结构的运动用局部参考坐标系的刚体运动来描述，而子结构的变形定义为相对于这个局部参考系统的运动。因此它适用于旋转子结构，处理陀螺系统，如带旋转零件的直升飞机和宇宙飞船。

设子结构 C 为中心结构，而 A 是某一个典型的子结构，设原点为 o 的惯性坐标系为 xyz 。中心子结构的参考坐标系 $x_c y_c z_c$ ，原点为 C ，它是子结构 C 上的任何点，例如子结构未变形状态时的质量中心，从 o 点到 C 点的向量为 W_{oc} ，子结构上任何一点未变形时相对于

x_c, y_c, z_c 的位置用 r_c 表示，它相对于 x_c, y_c, z_c 的位移为 u_c ，参考系统 x_c, y_c, z_c 的角速度为 W_c ， W_c 为子结构 C 上一点相对于惯性坐标的位置(图 5.4)，则这一点的绝对速度为：

$$\dot{W}_c = T_{co} \dot{W}_{oc} - (\tilde{r}_c + \tilde{u}_c) W_c + \dot{u}_c \quad (5.94)$$

其中， T_{co} 是惯性坐标系 xyz 和坐标系 $x_c y_c z_c$ 之间的方向余弦矩阵； $\tilde{r}_c + \tilde{u}_c$ 是各项等于 $r_c + u_c$ 分量的反对称矩阵； $(\tilde{r}_c + \tilde{u}_c) W_c$ 是简化的向量叉积

$(r_c + u_c) \times W_c$ 矩阵表达式；速度向量 \dot{W}_{oc} 和 W_c 是子结构 C 的刚体位移，而 u_c 是子结构上任何一点的变形。类似地，设子结构 A 的参考坐标系为 $x_A y_A z_A$ 。原点在子结构 A 与子结构 C 的连接点 A 。子结构 A 上任一点的绝对速度为：

$$\dot{W}_A = T_{Ac} \dot{W}_{cA} - (\tilde{r}_A + \tilde{u}_A) W_A + \dot{u}_A \quad (5.95)$$

W_A 是参考坐标系 $x_A y_A z_A$ 的角速度，它的表达式为：

$$W_A = T_{Ac} W_c + L_A \dot{b}_{cA} + w_A \quad (5.96)$$

其中， W_c 是牵连角速度， T_{Ac} 是 $x_c y_c z_c$ 与 $x_A y_A z_A$ 之间的方向余弦， L_A 是 $x_A y_A z_A$ 与 $x_{cA} y_{cA} z_{cA}$ 之间的方向余弦， \dot{b}_{cA} 是结构 c 在 A 点变形产生的角速度， w_A 是在结构 C 上的 A 点 $x_A y_A z_A$ 相对于 $x_{cA} y_{cA} z_{cA}$ 的角速度，坐标 $x_{cA} y_{cA} z_{cA}$ 的角速度包括 W_c 和 \dot{b}_{cA} 。 T_{Ac} 和 L_A 使 \dot{W}_A 和 W_A 可用 $x_A y_A z_A$ 的分量表示。

如果子结构 A 与 C 在 A 点是固定的，那么 $w_A = 0$ 。如果是铰接，那么 w_A 表示子结构 A 相对于子结构 C 的旋转。直升机翼的运动就是一个例子。

对于链式系统，这种描述运动的方式很合适，当有一个子结构 B 在 B 点与子结构 A 相连接时， \dot{W}_B 和 W_B 的表达式只要把式(5.95)和式(5.96)中的 A 改为 B ，然后 C 改为 A 。当有一系列子结构以单点相继链接时，可用同样的方法处理。当在 A 点有多个子结构与子结构 C 相链接时，也可同样处理。可以把直升机叶片当作连接于转子的同一点，这是这类问题的实例。

下面推导系统的 Lagrange 方程。如果子结构 A 是一个典型的外围子结构，且其它外围子结构与 A 有同样的形式。那么系统动能可写成：

$$T = \frac{1}{2} \int_{m_c} \dot{W}_c^T \dot{W}_c dm_c + \frac{1}{2} \int_{m_A} \dot{W}_A^T \dot{W}_A dm_A \quad (5.97)$$

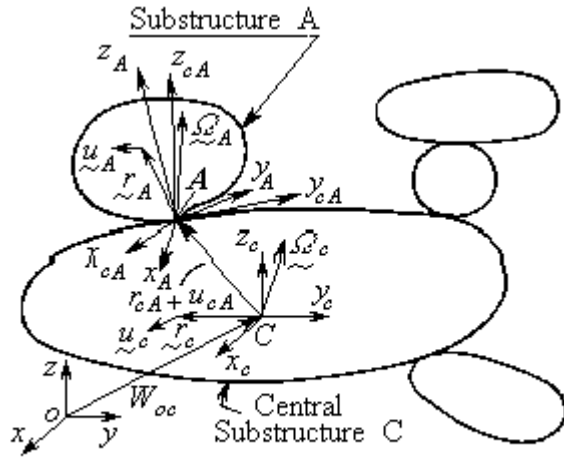


图 5.4

假定处于平衡状态时子结构 A 以均匀的角速度 w_A 相对于子结构 C 绕 z_A 轴旋转, 而其它运动是零。那么, 有

$$W_c = Q_c \dot{q}_c \quad (5.98a)$$

$$w_A = w_A L_A + Q_A \dot{q}_A \quad (5.98b)$$

其中 L_A 是子结构未变形时 z_A 与 $x_{cA}y_{cA}z_{cA}$ 之间的方向余弦向量。 Θ_c 和 Θ_A 是依赖于 q_{ci} 和 q_{Ai} ($i=1,2,\dots,n$) 的 3×3 矩阵。一般, q_{ci} 和 q_{Ai} 可以任意大, 但不能用向量表示, 而角速度能用向量 \dot{q}_c 和 \dot{q}_A 表示。因此动能可写成:

$$T = T(\dot{W}_{oc}, q_{ci}, \dot{q}_c, u_c, \dot{u}_c, u_{cA}, \dot{u}_{cA}, q_{Ai}, \dot{q}_A, u_A, \dot{u}_A, t) \quad (5.99)$$

如果势能完全是由弹性产生, 包括子结构之间的约束, 我们可用一般形式写系统的势能:

$$V = U(q_{A1}, q_{A2}) + \frac{1}{2}[u_c, u_c] + \frac{1}{2}[u_A, u_A] \quad (5.100)$$

其中, 式(5.100)右边的三项分别为约束子结构 A 垂直于 z_A 轴角运动产生的 A 点扭转弹簧势能, 子结构 c 的能量内积和子结构 A 的能量内积。

利用式(5.99)和式(5.100), 可导出 Lagrange 运动方程, 方程组有混合的形式, 其中有些是普通的微分方程, 而有些是偏微分方程。方程也可能是非线性或有时变系数。假定只研究平衡位置附近的小运动, 并且只考虑具有惯性对称的旋转结构, 运动方程能简化为具有非时变系数的线性运动方程。但方程组仍然是混合的 (兼有普通微分方程和偏微分方程)。

系统能用 Rayleigh - Ritz 法离散化, 用允许函数把弹性运动表示成分离变量的形式:

$$u_c = F_c h_c \quad (5.101a)$$

$$u_A = F_A h_A \quad (5.101b)$$

F_c 和 F_A 是对子结构 C 和 A 的 $3 \times N_c$ 和 $3 \times N_A$ 的允许函数, 它们是空间位置的函数。 h_c 和 h_A 是 N_c 维和 N_A 维依赖于时间的广义坐标向量。允许函数的意思是函数必须满足由运动过程要求的几何边界条件。引入广义位置向量:

$$q = [q_{c1}, q_{c2}, q_{A1}, q_{A2}, h_c^T, h_A^T]^T \quad (5.102)$$

系统的动能可写为:

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} + q^T F \dot{q} + \frac{1}{2} q^T K_T q \quad (5.103)$$

$$\text{其中, } M = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^2}, F = \frac{\partial^2 T}{\partial q \partial \dot{q}}, K_T = \frac{\partial^2 T}{\partial q^2} \quad (5.104)$$

M 、 F 和 K 为常数系数方阵。类似地, 势能可写成:

$$V = \frac{1}{2} q^T K_V q \quad (5.105)$$

其中, K_V 为分块对角矩阵:

$$K_V = \text{分块对角} [0 : \partial^2 U / \partial q_A^2 : [F_c, F_c] : [F_A, F_A]] \quad (5.106)$$

系统的 Lagrange 方程能写成:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (5.107)$$

其中 $L = T - V$ 是系统的 Lagrange 函数, 把式(5.103)和式(5.105)代入式(5.107), 得运动方程为:

$$M \ddot{\mathbf{q}} + G \dot{\mathbf{q}} + K \mathbf{q} = 0 \quad (5.108)$$

其中, M 是对称的质量矩阵,

$$G = F^T - F \quad (5.109)$$

G 为反对称陀螺矩阵,

$$K = K_V - K_T \quad (5.110)$$

K 是对称的刚度矩阵 (它包括了弹性和离心效应)。这一类的方程已经在本书其它地方多次讨论。如果系统中无旋转子结构, 那么公式仍然适用, 只要把陀螺项去掉即可。

如何选择允许函数, 前面已经讨论过了, 有限元法中的单元插值函数可当作特殊类型的允许函数来描述子结构的运动。

5.5.2 无限多点内部边界 (子结构之间用无限多点连接)

前面介绍的子结构综合法利用运动学原理来自动满足几何相容条件。在连续的二维和三维问题中, 内部边界由线和面组成, 有无限多个内部点。因此前面介绍的方法不再适用, 几何相容条件必须通过其它方法来保证。在这类问题中, 把结构当作未经连接的子结构的组装, 而每一个子结构的运动用有限个允许函数来表示, 然后通过一些几何相容条件, 使结构象一个整体一样运动, 把这些几何相容条件减少成施加在未连接位移向量上的约束。

内部边界要在无穷多个点满足相容条件是不可能做到的。因为这意味着需要无穷多个约束方程, 而采用的允许函数集是有限的, 这将使内部边界的处理与域内的处理过程不一致, 因此必须放松内部边界的约束条件。

考虑内部边界不能精确满足的情况, 结构在内部边界上只在有限个点的地方相连接, 这种结构作为完全不连接的结构与实际结构之间的一种近似, 称为中间结构。对于中间结构, Rayleigh-Ritz 法是有效的。

可用不同的方法在有限个点强加几何相容条件, 这里将采用加权残数法。这时, 中间结构代表了由所用加权函数和它们的数目定义的数学方法 (工具), 随着加权函数的增加, 中间结构必须从极限上趋近于实际结构。

讨论两个典型的毗邻子结构 r 和 s , 并假设每一个子结构的能量内积中含有位移的 p 阶导数, 即指几何相容条件含有从零到 $p-1$ 阶导数。例如, 对 $p=2$, 几何相容必须使

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_s \quad (5.111a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \mathbf{n}_r} = \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial \mathbf{n}_s} \quad (5.111b)$$

在 r 和 s 共有的内边界 S_{rs} 上的每一点都满足。 $\frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \mathbf{n}_r}$ 是位移向量 \mathbf{u}_r 对子结构 r 内边界外法线 \mathbf{n}_r 的偏导数。显然, 对一般的边界, 对一般的子结构允许函数, 方程(5.111)只能近似地满足。因此我们研究加权残数法和权函数 $g_{rsi} (i=1, 2, \dots, M_{rs})$, 设在边界 S_{rs} 上加权平均误差为零:

$$\int_{S_{rs}} g_{rsi} (\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_s) dS_{rs} = 0 \quad i=1, 2, \dots, M_{rs} \quad (5.112a)$$

$$\int_{S_{rs}} g_{rsi} \left(\frac{\partial u_r}{\partial n_r} - \frac{\partial u_s}{\partial n_s} \right) dS_{rs} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, M_{rs} \quad (5.112b)$$

公式(5.112)代表把不相连的子结构连接在一起，形成中间结构的约束方程。当权函数趋向无穷多时，几何相容条件(5.111)将在边界 S_{rs} 的每一点都满足。所取的加权函数来自完备集。它们本身是线性独立的，所以，当 M_{rs} 趋向无穷时，中间结构趋向于实际结构。但对实际情况， M_{rs} 必须取有限个。在某些特殊的场合， g_{rsi} 是空间的 Dirac δ 函数时，式(5.112)保证在边界 S_{rs} 上 M_{rs} (有限) 个点满足边界条件(5.111)，因此，在这种情况下，中间结构通过把实际边界用有限离散点集代替而获得。中间结构的特征值给出了未经连接的子结构特征值的上界 (由于在 M_{rs} 个点上有了约束)，而不是实际结构特征值的上界，所以可能存在中间结构计算的特征值低于实际结构的特征值。中间结构特征值问题的收敛过程必须考虑两个极限过程，一是子结构允许函数增加，另一个是内边界加权函数的增加。

附录：

(1) Power 法

$$KX = \mathbf{w}^2 MX \quad \frac{1}{\mathbf{w}^2} X = K^{-1}MX = AX$$

设: $X^{(1)} = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n$,

X_1, X_2, \dots, X_n 是矩阵 A 的特征向量, 也是相应于特征值问题 $KX = \mathbf{w}^2 MX$ 的特征向量, 它们相应的频率为 $\mathbf{w}_1 < \mathbf{w}_2 < \dots < \mathbf{w}_n$, $\frac{1}{\mathbf{w}_1^2} > \frac{1}{\mathbf{w}_2^2} > \dots > \frac{1}{\mathbf{w}_n^2}$

希望通过 p 次迭代使 $X^{(p)} \rightarrow X_1$

迭代计算式:

$$\begin{aligned} X^{k+1} &= A^k X^k = A^{k-1} AX = A^{k-1} [c_1 AX_1 + c_2 AX_2 + \dots + c_n AX_n] \\ &= A^{k-1} [c_1 \frac{1}{\mathbf{w}_1^2} X_1 + c_2 \frac{1}{\mathbf{w}_2^2} X_2 + \dots + c_n \frac{1}{\mathbf{w}_n^2} X_n] \\ &= c_1 (\frac{1}{\mathbf{w}_1^2})^k X_1 + c_2 (\frac{1}{\mathbf{w}_2^2})^k X_2 + \dots + c_n (\frac{1}{\mathbf{w}_n^2})^k X_n \end{aligned}$$

Power 法可利用来求解最大或最小特征值和特征向量。

(1) 同步迭代法

从 $AX_i = \mathbf{I}_i X_i$ 出发, 其中 $\mathbf{I}_i = \frac{1}{\mathbf{w}_i^2} A = K^{-1}M$

设: $U^{(1)} = [u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_m^{(1)}]$

而 $u_1^{(1)} = c_{11} X_1 + c_{12} X_2 + \dots + c_{1m} X_m$

$u_2^{(1)} = c_{21} X_1 + c_{22} X_2 + \dots + c_{2m} X_m$

.....

$u_m^{(1)} = c_{m1} X_1 + c_{m2} X_2 + \dots + c_{mm} X_m$

迭代式: $U_{k+1} = AU_k \quad k=1, 2, \dots, p$

第一次迭代:

$$U_2 = \left[\begin{aligned} &(c_{11} \frac{1}{\mathbf{w}_1^2} X_1 + c_{12} \frac{1}{\mathbf{w}_2^2} X_2 + \dots + c_{1m} \frac{1}{\mathbf{w}_m^2} X_m), (c_{21} \frac{1}{\mathbf{w}_1^2} X_1 + c_{22} \frac{1}{\mathbf{w}_2^2} X_2 + \dots + c_{2m} \frac{1}{\mathbf{w}_m^2} X_m), \\ &\dots, (c_{m1} \frac{1}{\mathbf{w}_1^2} X_1 + c_{m2} \frac{1}{\mathbf{w}_2^2} X_2 + \dots + c_{mm} \frac{1}{\mathbf{w}_m^2} X_m) \end{aligned} \right]$$

如果每次都只用 $U_{k+1} = AU_k$, 则所有 U_k 都趋向于第一振型, 因此只有采用正交化, 才能使 u_i 趋向于第 i 个振型。

正交化过程:

向量 X_1, X_2, \dots, X_m 线性独立或线性相关, 则正交化过程为:

(1) $\hat{Y}_1 = \hat{X}_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|}$, 其中 $\|X_1\|$ 为数积的模, \hat{y}_1 为正则化向量。

(2) 修正: $X_i^{(1)} = X_i - (\hat{Y}_1, X_i) \hat{Y}_1, \quad i=2, 3, \dots, m$, 使所有的 $X_i^{(1)}$ 与 \hat{Y}_1 正交。

(3) 正则化: $\hat{Y}_2 = \frac{X_2^{(1)}}{\|X_2^{(1)}\|}$

(4) 修正: $X_i^{(2)} = X_i^{(1)} - (\hat{Y}_2, X_i^{(1)}) \hat{Y}_2, \quad i=3, 4, \dots, m$, 使所有 $X_i^{(2)}$ 与 \hat{Y}_2 正交。

$$(5) \hat{Y}_j = \frac{\hat{X}_j^{(j-1)}}{\|\hat{X}_j^{(j-1)}\|}, \quad X_i^{(j)} = X_i^{(j-1)} - (\hat{Y}_j, X_i^{(j-1)})\hat{Y}_j, \quad i = j+1, \dots, m,$$

$$\text{直至 } \hat{Y}_m = \frac{\hat{X}_m^{(m-1)}}{\|\hat{X}_m^{(m-1)}\|} \circ$$

如果 U_2 中的第一个向量已经符合条件为 X_1 的 \mathbf{I}_1 倍，则正交化过程中所乘的 $\|u_1^{(2)}\| = \mathbf{I}_1^{-1} = \mathbf{w}_1^2$ ，而 $\hat{Y}_1 = X_1$ ，修正步骤 (2) 为

$$u_2^{(2)} = c_{21} \frac{1}{\mathbf{w}_1^2} X_1 + c_{22} \frac{1}{\mathbf{w}_2^2} X_2 + \dots + c_{2m} \frac{1}{\mathbf{w}_m^2} X_m$$

它与 $\hat{Y}_1 = X_1$ 的数积为 $c_{21} \frac{1}{\mathbf{w}_1^2}$ ，因为 X_1 与 X_2, \dots, X_m 正交，因此修正步骤相当于

从 $u_2^{(2)}$ 中除去与 \mathbf{w}_1^2 有关的项。以此类推，每作一次修正，即意味着把低阶振型彻底清除，这样，当再进行一次 $U_{k+1} = AU_k$ 时，其中的 u_j^k 就会接近相应的第 j 阶振型，而不是第一主振型。而正交化过程中正则化时的系数将趋近于特征值（频率平方），因此迭代式修正为 $U_{k+1} = A\hat{U}_k$ 。

对 $KX = \mathbf{w}^2 MX$ 的问题：

$$U_{k+1} = A\hat{U}_k = K^{-1}M\hat{U}_k$$

$$\therefore KU_{k+1} = M\hat{U}_k$$

所有过程适用，只是正交化时

$$\|\hat{X}_j^{(j-1)}\| = \sqrt{X_j^{(j-1)\top} M X_j^{(j-1)}},$$

而 $(\hat{Y}_j, X_i^{(j-1)}) = \hat{Y}_j^\top M X_i^{(j-1)}$ 。

总结

0. 引言

1. 方程

离散系统

Lagrange 方程

连续系统

Hamilton 原理（变分原理），
自共轭系统，非自共轭系统，
内积，能量内积

2. 连续系统的离散化方法

Rayleigh-Ritz 法，假定模态法，加权残数法（包括 Galerkin 法，配置法，最小二乘法，子域法和矩法）

3. 有限元法

本质上是 Rayleigh-Ritz 法，但自成体系，特点是对复杂边界收敛慢。

4. 具有大自由度系统，缩减的方法

静态缩聚，质量缩聚，同步迭代，子空间迭代，分段法

5. 子结构综合

分量模态综合，分支模态综合，分量模态置换，子结构综合