

数字通信原理

— 基于 Matlab 仿真计算

曾峰

zf0579@sina.com

You can distribute this document freely, please DO NOT change it in any way.

January 06

前言

写书动机

本书前言我也不知道该说些什么，先说说为啥写这本书吧。写这本书的创作冲动源于用 Verilog 写完卷积码编解码以后，那时想不来用 Verilog 再做些什么？Verilog 功能强劲，但是面对庞大复杂的通信系统，用它也只能做其中某些的事情。所以放下 Verilog，还是想读些通信书籍，温故而知新，所谓拳不离手，曲不离口。可读书不练，难以学得深入，然后想到仿真，而在读研时，也学过 Matlab 仿真课程，这就是就是本书的由来。

长期学习通信类书籍或许源于心底的愿望。原毕业于通信专业院校，在校期间学过通信原理、数字信号处理等通信专业课程。可现在回顾以往的工作经历，在通信行业工作多年却始终未能从事通信信号处理有关的研发。愿望与现实的失配让人难受，我想这种感受的很多人都会有，做自己想做的事情是一种幸福。既然难以在工作中实现个人愿望，那只好在通信理论、仿真软件中实现，这也就是写这本书的动机之一。

写这本书的另外一个动机或许是因为身为人父，这种感觉给我坚持写完这本书的动力。很难说清楚这种感觉，可能潜意识里希望孩子是个有毅力的人，那我首先希望自己是个体有毅力的人。白天在公司上班，晚上在家写书，但只能用部分业余时间写书。如果我还是单身，我也许会选择晚上看电视，早上睡到将要迟到才起床，做事只有两三天的热情，这样生活很是懒散惬意，可惜离我很远了。

这就是我写这本书的两个动机。如果读者觉得本书写得还可以，那么请写信给我些建议、工作机会。如果觉得写得不行，那么请写信给我些批评。我在这里先谢谢了。

本书将分为三部分上载，第一部分主要讲解调制技术，第二部分主要讲解解调技术，第三部分主要讲解信道信源编解码技术。现在上载的是第一部分，其余部分以后写完也会上载。

本书说明：

为了节省篇幅，本书中的代码都不提供参数解释，但是代码会提供英文注释（Matlab 不支持中文注释）。也希望读者能使用 Matlab 运行程序，切实体会一下，多查帮助文档。

本书也将尽量使用 Matlab 的基本语法来实现算法，这样可以避免将所要实现的功能隐藏在函数之下，而让读者不知道是如何实现的。当然某些不是很重要的内容，例如随机数的生成等，还是使用 Matlab 已提供的函数。

学习本书最好以前使用过 Matlab，如果没有使用过，推荐学习张智勇老师编写的《Matlab6.5》。另外最好也学习过概率论、随机过程、数字信号处理等内容。

本书读者对象：

希望本书适合做为在校学习通信专业的本科生、研究生的教学辅导资料，也适合做为在职工程师学习、掌握通信处理技术的辅导资料。

本书特色：

本书将通信处理技术用代码的形式表现出来，这样学习本书的读者可以通过代码来加深对理论知识的理解。避免学习通信理论知识，却无法在实践中应用。通信技术是在实践中不断发展完善起来的，也应该在实践中学习使用。只是没有人能够有如此幸运，能够在工程实践中接触到通信技术的所有方面。现在 Matlab 提供了强劲的运算平台，可以在这个平台上进行仿真运算。

此外，从事工程应用的工程师可以将代码转换成 C、Verilog 等语言，以运行于不同的环境下。目前 Matlab 也在加强对其它语言的支持，能够将 Matlab 的语言自动翻译成 C 或者 Verilog。

联系方式：

关于本书，有任何建议、批评，欢迎写信到 zf0579@sina.com，谢谢！

目录

第一章 基础知识.....	1
1.1 概率论.....	1
1.1.1 样本空间与概率.....	1
1.1.1.1 概率基本运算.....	2
1.1.2 随机变量及其统计特性.....	3
1.1.2.1 随机变量的统计特征.....	5
1.1.2.2 常用分布函数.....	6
1.2 随机过程.....	12
1.2.1 随机过程定义及其统计特征.....	13
1.2.2 高斯随机过程.....	14
1.2.3 平稳随机过程.....	16
1.2.4 马尔可夫随机过程.....	17
1.3 信号与系统.....	19
1.3.1 信号分类、运算与系统描述.....	19
1.3.2 离散系统时域分析.....	25
1.3.3 离散系统频域分析.....	27
第二章 通信信号设计.....	35
2.1 信号交织.....	35
2.1.1 分组交织器.....	35
2.1.2 卷积交织器.....	37
2.2 脉冲成型.....	38
2.2.1 奈奎斯特准则.....	39
2.2.2 升余弦滤波器.....	42
2.2.3 部分响应.....	46
2.3 扩频序列.....	49
2.3.1 m 序列.....	52
第三章 调制技术.....	54
3.1 幅度调制.....	54
3.1.1 BASK.....	54
3.1.2 MASK.....	59
3.1.3 QAM.....	60
3.2 频率调制.....	61
3.1.1 BFSK.....	61
3.1.2 MFSK.....	62
3.1.3 CPFSK.....	63
3.1.4 MSK.....	65
3.1.5 OFDM.....	67
3.3 相位调制.....	69
3.3.1 PSK.....	69
3.3.2 OQPSK.....	70

第一章 基础知识

本书主要讨论基本的数字通信技术，但在讨论数字通信技术之前，有必要回顾一下有关的基础知识。对基础知识的回顾将非常有助于对数字通信技术的理解，我们从第二章开始讨论数字通信技术。

本章主要讨论数字通信中需要使用的基础知识，这包括概率论、随机过程、信号与系统等基础知识。如果以前学习过上述基础知识，可以跳过本章。

概率论是信号判决的基础理论知识，例如似然判决，MAP 算法等都需要使用概率论知识。随机过程会在通信信号处理中遇到，例如传输信号的发送，加性高斯白噪声都是随机过程，又例如 Viterbi 解码可以认为是马尔可夫随机过程。信号与系统是可以用于对接收的信号进行滤波，信道估计、均衡、频率分析等方面。

另外，本章也将介绍一些常用的 Matlab 函数，利用这些函数可以生成随机数，并对这些随机数做一阶、二阶统计分析。

1.1 概率论

本节分为两部分，第一部分简要介绍概率及其运算，第二部分讨论随机变量及其统计特性。

1.1.1 样本空间与概率

我们能接触到的各种事件，可以分为两类，一类是事先就可以预知的，会确定发生的，例如四季更替，春种秋收；另一类是无法事先预知的，随机发生的，例如掷骰子、抛硬币等。我们把前一类称为确定事件，后一类称为随机事件。一个随机事件的所有可能取值集合称为**样本空间**。例如掷骰子，可能得到从 1 到 6 点，那么其样本空间用集合表示就是 $[1, 6]$ ，具体是那个数值，则无法事先知道。通信也是一个随机性事件，因为不可能预知送到发射机的下一比特是 0 还是 1。如果能预知，那么各种复杂而又昂贵的通信设备就不需要了。既然样本空间可以用集合表示，那么集合的运算也适用于样本空间，这些运算包括求和运算，交集运算，包含关系等。

虽然无法事先确定掷骰子所得到的点数，但是取其中某个值的可能性却是可以知道的，为 $1/6$ ，我们称这个为概率。用 $\Omega = [1, 6]$ 表示掷骰子所有取值的集合， A 表示其中一个取值，则 $P(A) = 1/6$ ， $P(A)$ 就是概率，以下就是概率的古典定义。

如果一个随机事件由有限个基本事件组成，每个事件的发生是等可能的，那么基本事件的全体就记为 Ω ，如果随机事件重复 n 次，其中 k 次为相同的基本事件，用 A 代表，则事件 A 的概率，记作 $P(A)$ 。当重复次数 n 足够大，则 $P(A) = k/n$ 。

```
%Sample Space
omega = [1, 6];

%Generate 1 row, 100 column random number for sample space
number = 100;
s = randint(1, number, omega);

%Get the sum of random number equals to 6
total = sum(s == 6);

%Calculate the Probability
P1 = total/number;

%Same as the previous, but 1 row, 1000 column
```

```

number = 1000;
s = randint(1, number, omega);
total = sum(s == 6);
P2 = total/number;

```

概率有如下性质

1. $0 \leq P(A) \leq 1$

随机事件 A 发生的概率介于 0 与 1 之间，如果等于 0，表示不可能事件；如果等于 1，表示必然事件

2. 若 $A \subseteq B$ ，则 $P(A) \leq P(B)$

如果随机事件 A 包含在随机事件 B 中，即随机事件 B 发生，则随机事件 A 必然发生，但是随机事件 A 发生，随机事件 B 不一定发生。那么随机事件 A 发生的概率必然小于随机事件 B 发生的概率

3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

两个随机事件 A 、 B 发生的概率等于 A 发生的概率加上 B 发生的概率减去 A 、 B 同时发生的概率。如果 A 、 B 不可能同时发生，则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

1.1.1.1 概率基本运算

条件概率

在已知随机事件 B 发生的情况下，求随机事件 A 发生的概率称为条件概率。

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (P(B) > 0)$$

$$P(A|B) = 0 \quad (P(B) = 0)$$

由上述公式可以看出，如果 $P(B)$ 大于零，则 $P(A|B)$ 等于 A 、 B 都发生的概率除以 B 发生的概率。

独立性公式

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

如果，随机事件 A 、 B 同时发生的概率等于 A 发生的概率乘以 B 发生的概率，则称随机事件 A 、 B 相互独立。

全概率公式

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i) \quad \left(B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j; \bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega \right)$$

如果已知随机事件 A 与 B_i 的条件概率，随机事件 B_i 的概率，则可以通过求和运算得到随机事件 A 的概率。

贝叶斯公式

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)} \quad \left(B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j; \bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega \right)$$

由上式可以看出其分母使用全概率公式计算出 $P(A)$ ，分子是条件概率的变形求出 A 、 B 同时发生的概率。

在数字通信中，可以将 $P(A)$ 理解为在接收端观察到的某个信号发生概率。如果已知某个信号在接收端的概率，则可以通过上式求出 $P(B_i|A)$ ，这里称 $P(B_i|A)$ 为**后验概率**，因为这个概率是通过接收端的信号发生概率反推出发送端的信号发生概率，取概率最大的信号认为是在发送端输出的信号。

上式中概率 $P(A|B_i)$ ，称为**似然概率**，表示如果在发送端发送信号 B_i ，通过信道干扰后，在接收端收到信号 A 的概率。如果 $P(A|B_i)$ 等于 1，表示接收端收到的信号 A 就是发送端发送的信号 B_i ，不过如此理想的似然概率在现实世界中很少存在，特别是在无线环境下。

另外，还有一个概率 $P(B_i)$ ，称为**先验概率**，表示在发送端发送信号 B_i 的概率。通常在接收端认为发送信号 B_i 是先验等概的。

现在举例来说明，设有下图所示的一个二进制对称信道，图左边圆圈代表发送端，右边圆圈代表接收端，直线上的小数分别代表从发送端到接收端的似然概率。假设现在收到信号 $A1$ ，那么我们来求其后验概率。

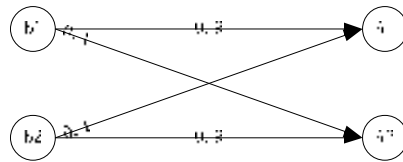


图 1-1

PB1 = 0.5; %Probability of sending B1

PB2 = 0.5; %Probability of sending B2

PA1B1 = 0.9; %Probability of Send B1, Receiving A1

PA2B2 = 0.9; %Probability of Send B2, Receiving A2

PA2B1 = 0.1; %Probability of Send B1, Receiving A2

PA1B2 = 0.1; %Probability of Send B2, Receiving A1

%Calculate the Probability of Receiving PA1

denominator = PB1.*PA1B1 + PB2.*PA1B2;

%Calculate the Post-Probability of B1

PB1A1 = PB1.*PA1B1/denominator;

%Calculate the Post-Probability of B2

PB2A1 = PB2.*PA1B2/denominator;

运算后可以得到 $PB1A1$ 要大于 $PB2A1$ ，这说明在发送端发送 $B1$ 的可能性要远大于 $B2$ ，从而我们可以判决接收到的信号为 $B1$ ，恢复出信源发送的信息。

另外，观察对 $PB1A1$ 、 $PB2A1$ 的计算可以看出，由于 $PB1$ 、 $PB2$ 先验等概，分母都是相同的，所以 $PB1A1$ 、 $PB2A1$ 是似然函数 $PA1B1$ 、 $PA1B2$ 的等比例缩放。也就是说，在先验等概的情况下，利用求最大后验概率做判决等价与使用最大似然概率做判决。

1.1.2 随机变量及其统计特性

上节所述都是从概率的角度来叙述的，本节我们引入随机变量的概念。

每次试验的结果都可以用一个变量 x 来表示，这个变量的取值是随机变化的，但是又服从一定的概率分布，这个变量就称为**随机变量**。例如上例中的二进制对称信道模型中 $A1$ 、 $A2$ 都是随机变量，其取值可能是 $B1$ 或 $B2$ ，但取 $B1$ 、 $B2$ 的可能性却不同。

在定义随机变量后，我们可以定义分布函数，进而定义概率密度。

给定随机变量，其取值小于 X 等于实数 x 的概率 $P(x \leq X)$ 是关于 x 的函数，称为随机变量 X 的**分布函数**，一般记作 $F(x)$ ， $F(x) = P(x \leq X)$ ($-\infty < x < \infty$)。

分布函数具有如下性质：

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

If you have any suggestion or criticism, please email to zf0579@sina.com

$$2. \quad P(a < \zeta \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$3. \quad \text{如果 } x_1 < x_2, \text{ 则 } F(x_1) \leq F(x_2)$$

分布函数可以分为两类，当随机变量 x 是离散型随机变量时，这类分布函数被称为**离散分布函数**；当随机变量 x 是连续型随机变量式时，这类分布函数被称为**连续分布函数**。

当随机变量 x 是离散型随机变量，设 x 可能取值为 $x_k (k = 1, 2, \mathbf{L})$ ，则 x 取其中某个值的概率为 $P(x = x_k) = p_k$ 。 p_k 被称为**概率分布**，它具有如下性质：

$$1. \quad p_k \geq 0$$

$$2. \quad \sum_k p_k = 1$$

$$3. \quad F(x) = \sum_{x_k < x} p_k$$

如果随机变量 x 连续型随机变量，则其分布函数 $F(x) = \int_{-\infty}^x p(t)dt$ ，其中 $p(t)$ 被称为**概率密度**。概率密度具有如下性质：

$$1. \quad p(t) \geq 0$$

$$2. \quad \int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = 1$$

$$3. \quad P\{x_1 < x \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(t)dt$$

$$4. \quad p(t) = \frac{dF(x)}{dx}$$

以上都是头论当随机变量只有一个的情况，当随机变量有两个或两个以上的时，就要引入联合分布函数的概念。

每次试验的结果都可以用 n 个变量 $x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n (n \geq 2)$ 来表示，每个变量的取值是随机变化的，但是又服从一定的概率分布，这个变量就称为 **n 维随机变量**。

若 $(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n)$ 是 n 维样本空间中的一点，且 $x_1 \leq x_1, x_2 \leq x_2, \mathbf{L}, x_n \leq x_n$ ，则 $F(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n) = P(x_1 \leq x_1, x_2 \leq x_2, \mathbf{L}, x_n \leq x_n)$ 称为**联合分布函数**。

$$\text{如果 } F(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n) = P(x_1 \leq x_1, x_2 \leq x_2, \mathbf{L}, x_n \leq x_n) = P(x_1 \leq x_1)P(x_2 \leq x_2) \mathbf{L} P(x_n \leq x_n),$$

则 $x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n$ 是**相互独立的**。

如果保留 $m(m < n)$ 个随机变量，而对联合分布函数中的其余随机变量求和，所得的分布函数被称为 **m 维边缘分布函数**， $F_m(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_m) = F(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_m, \infty \mathbf{L}, \infty)$ 。

当 (x, h) 是二维离散型随机变量，其联合分布函数为 $P(x, h)$ ， x 的取值是 $x_i (i = 1, 2, \mathbf{L}, n)$ ，

h 的取值是 $y_k (k=1,2,\dots,n)$, 则 $x = x_i$ 的概率 $P(x = x_i) = \sum_k P(x = x_i, h = y_k)$, 其条件分布

$$P(x = x_i | h = y_k) = \frac{P(x = x_i, h = y_k)}{P(h = y_k)} = \frac{P(x = x_i, h = y_k)}{\sum_i P(x = x_i, h = y_k)}$$

当 (x, h) 是二维连续型随机变量, 其联合分布密度函数为 $f(x, y)$, 则 $x = x_i$ 的概率

$$P(x \leq x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x \leq x_i, y) dy, \quad P(x \leq x_i | h \leq y_k) = \frac{P(x \leq x_i, h \leq y_k)}{P(h \leq y_k)} = \frac{\int_{-\infty}^{x_i} f(x, h \leq y_k) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, h \leq y_k) dx}$$
 是条件

分布。

1.1.2.1 随机变量的统计特征

虽然随机变量的变化没有规律, 但是从统计观点来看, 还是具有统计特征的。

均值是求随机变量的统计平均值, 用 $E(x)$ 来表示均值。对于离散型、连续型随机变量有不同的定义。

$$E(x) = \sum_k (x = x_k) p_k \quad (\text{离散型随机变量})$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x = x) p(x) dx \quad (\text{连续型随机变量})$$

方差用来表示随机变量与均值差异的平均值, 用 $D(x)$ 来表示。方差小表示随机变量的取值范围就在均值附近, 反差大表示随机变量的取值范围可能偏离均值很远。

$$D(x) = E((x - E(x))^2) = \sum_k (x_k - E(x))^2 p_k \quad (\text{离散型随机变量})$$

$$D(x) = E((x - E(x))^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 p(x) dx \quad (\text{连续型随机变量})$$

与均值、方差有关的几个公式

1. $D(x) = E(x^2) - (E(x))^2$
2. $E(cx) = cE(x) \quad D(cx) = c^2 D(x)$
3. $E(x + h) = E(x) + E(h)$
4. $E(xh) = E(x)E(h) - E((x - E(x))(h - E(h)))$, 如果 x, h 相互独立, 则 $E(xh) = E(x)E(h)$
5. $D(x + h) = D(x) + D(h) + 2E((x - E(x))(h - E(h)))$, 如果 x, h 相互独立, 则

$$D(x + h) = D(x) + D(h)$$

以上相关定义了方差的计算公式, 现在定义协方差的计算公式, 如果将方差中的平方运算换成两个随机变量减去各自均值后相乘的均值, 则所求得的就是**协方差**。协方差定义如下:

$$S_{x_1x_2} = E((x_1 - E(x_1))(x_2 - E(x_2)))$$

定义了协方差后，就可以定义相关系数，相关系数的定义如下：

$$r_{x_1x_2} = \frac{S_{x_1x_2}}{\sqrt{D(x_1)D(x_2)}}$$

1.1.2.2 常用分布函数

本节将介绍一些常用的分布函数，除二项分布是离散型分布以外，其余都是连续型分布。

1 二项分布

如果随机变量取值只能是 a , b 两个值中的一个，设取 a 的概率为 p ，取 b 的概率为 q ，在 n 个结果中，如果 k 个结果等于 a ，则其分布函数如下：

$$P_B(x = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n, p + q = 1)$$

其均值、方差分别为

$$E(x) = np, \quad D(x) = npq$$

下面的代码用于绘制其分布函数、密度函数，生成二项式分布随机变量，并求其均值、方差。

```
%Parameters Setting
N = 1;
P = 1/2;

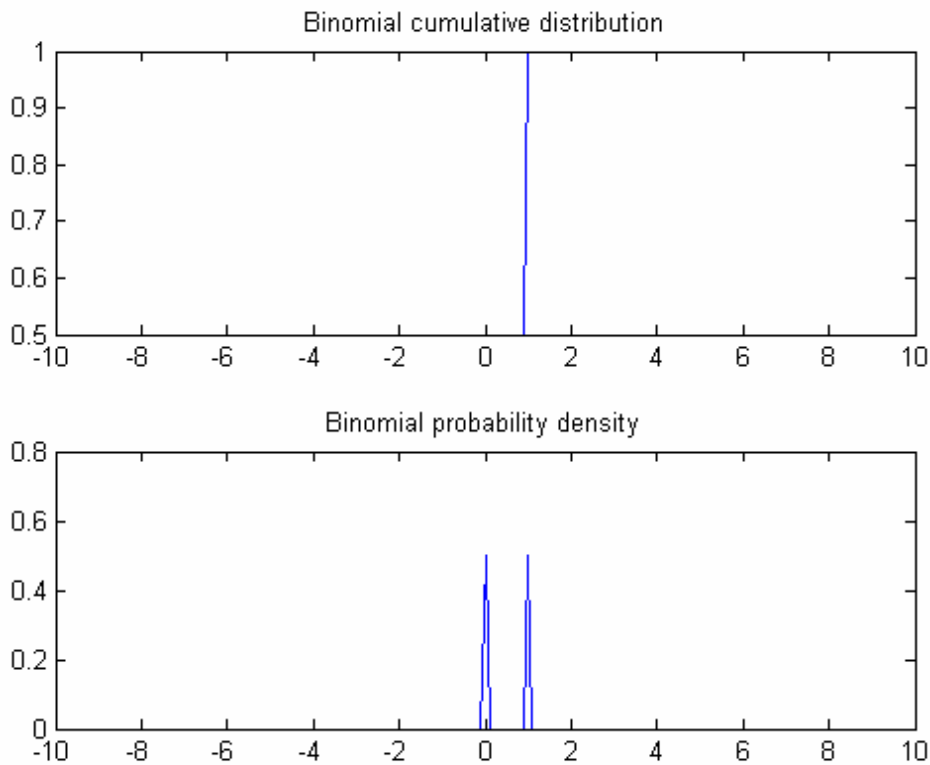
% X axis
x = -10:0.1:10;

%Get Binomial cumulative distribution and drawing
cdf = binocdf(x,N,P);
subplot(2, 1, 1);
plot(x, cdf);
title('Binomial cumulative distribution');

% Get Binomial probability density and drawing
pdf = binopdf(x, N, P);
subplot(2, 1, 2);
plot(x, pdf);
title('Binomial probability density');

%Generate the Random numbers from the binomial distribution
R = binornd(N, P, 1, 1000);
%Get the average value
E = mean(R);
%Get the Covariance value
D = cov(R);
```

通过手工计算可以得到均值为 0.5，方差为 0.25，这与运行结果很接近。



2 均匀分布

如果随机变量在样本空间上均匀分布，取其中任何一个值都是等概率的，则其分布具有如下的概率密度函数：

$$p_u(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (a \leq x \leq b) \\ 0 & (x < a, x > b) \end{cases}$$

其均值、方差分别为

$$E(x) = \frac{a+b}{2}, \quad D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

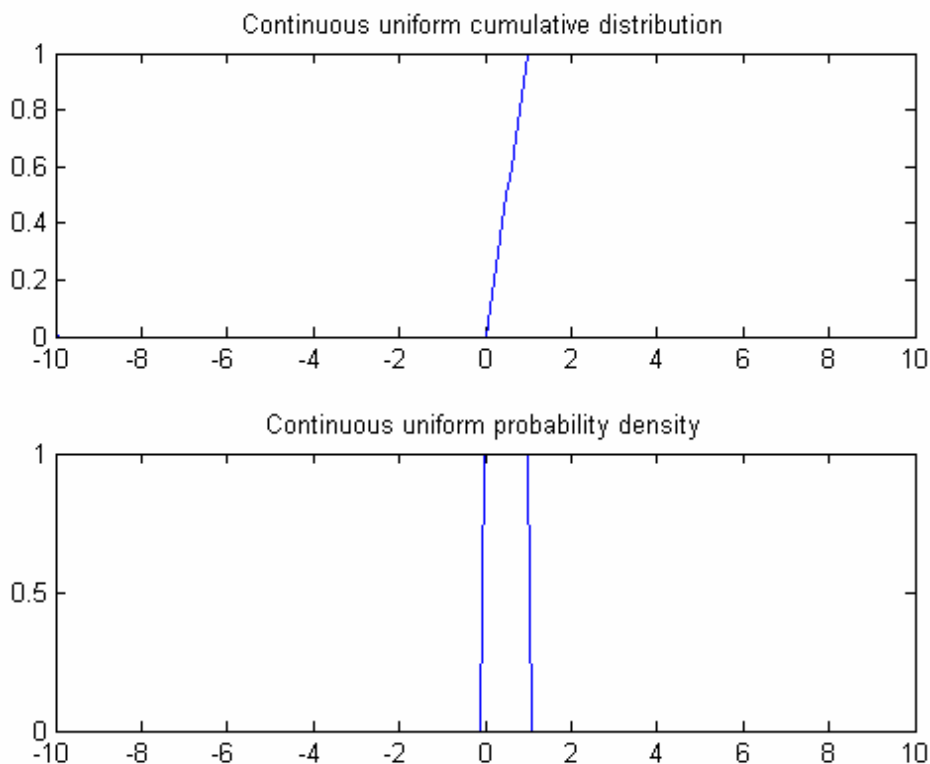
下面的代码用于生成均匀分布随机变量，并求其均值、方差。

```
%Parameters Setting  
a = 0;  
b = 1;  
  
% X axis  
x = -10:0.1:10;  
%Get Continuous uniform cumulative distribution and drawing  
cdf = unifcdf(x, a, b);  
subplot(2, 1, 1);  
plot(x, cdf);  
title('Continuous uniform cumulative distribution');  
  
%Get Continuous uniform probability density and drawing
```

```
pdf = unifpdf(x, a, b);
subplot(2, 1, 2);
plot(x, pdf);
title('Continuous uniform probability density')
```

```
%Generate the Random numbers from the continuous uniform distribution
R = unifrnd(0, 1, 1, 1000);
%Get the average value
E = mean(R);
%Get the Covariance value
D = cov(R);
```

通过手工计算可以得到均值为 0.5，方差为 0.0833，这与运行结果很接近。



3 高斯分布

如果随机变量服从高斯分布，则随机变量在样本空间上主要分布于其均值附近，越远离均值取值的可能性越小，则其分布具有如下的概率密度函数：

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left(-\frac{(x-u)^2}{2s^2}\right)$$

其均值为 m ，方差为 s^2 。

下面的代码用于生成均匀分布随机变量，并求其均值、方差。

```
% Parameters Setting
u = 0;
sigma = sqrt(2);
```

```

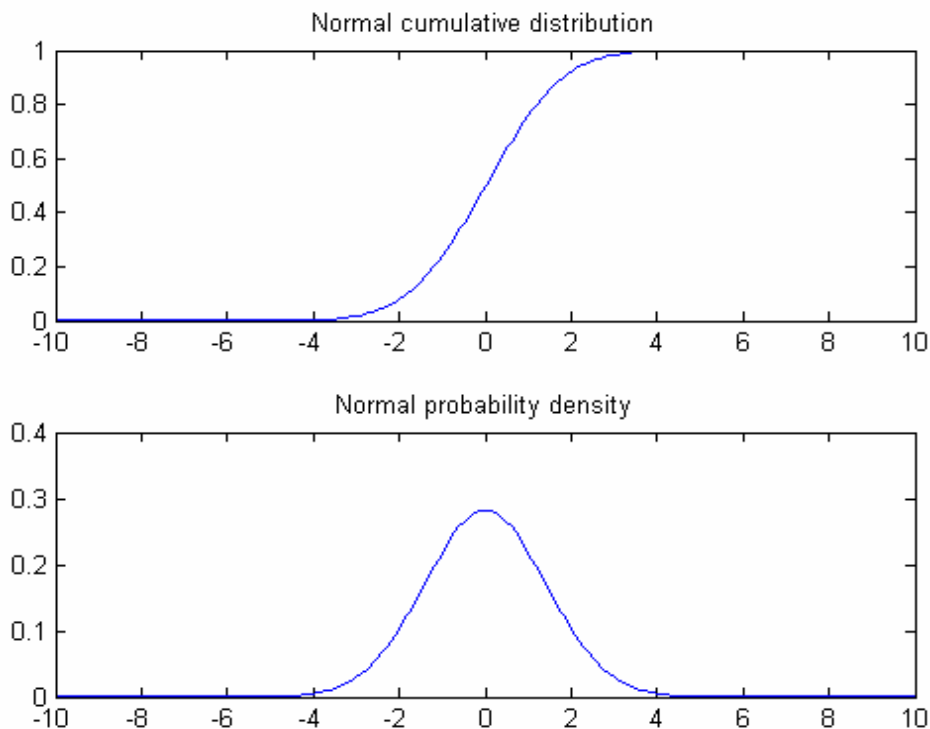
%Calculate the CDF & Drawing
x = -10:0.1:10;
cdf = normcdf(x, u, sigma);
subplot(2, 1, 1);
plot(x, cdf);

%Calculate the PDF & Drawing
title('Normal cumulative distribution');
pdf = normpdf(x, u, sigma);
subplot(2, 1, 2);
plot(x, pdf);
title('Normal probability density')

%Generate the randoms & Calculate the mean, covariance
R = normrnd(u, sigma, 1, 1000);
E = mean(R);
D = cov(R);

```

此高斯分布的均值为 0，方差为 2，这与运行结果很接近。



4 c^2 分布

如果 c 服从高斯分布，那么 c 的平方所服从的分布被称为 c^2 分布。如果 c 的均值为 0，则被称为中心 c^2 分布，如果 c 的均值不为 0，则被称为非中心 c^2 分布。其概率密度函

数如下:

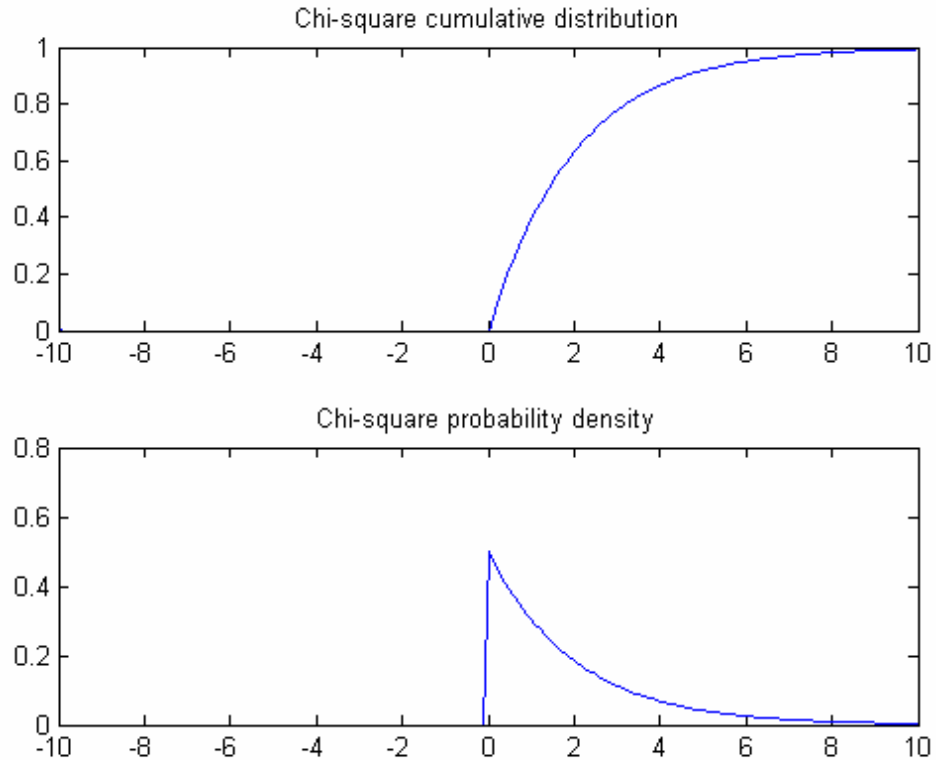
$$p_{x^2}(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

其均值为 n ，方差为 $2n$ 。

下面的代码用于生成中心 c^2 分布随机变量，并求其均值、方差。

```
%Parameter Setting  
chi = 2;  
  
%X Axis  
x = -10:0.1:10;  
  
%Generate Chi-square cumulative distribution & Drawing  
cdf = chi2cdf(x, chi);  
subplot(2, 1, 1);  
plot(x, cdf);  
title('Chi-square cumulative distribution');  
  
%Generate Chi-square probability density & Drawing  
pdf = chi2pdf(x, chi);  
subplot(2, 1, 2);  
plot(x, pdf);  
title('Chi-square probability density')  
  
%Generate the randoms & Calculate the mean, covariance  
R = chi2rnd(chi, 1, 1000);  
E = mean(R);  
D = cov(R);
```

此 c^2 分布的均值为 **2**，方差为 **4**，这与运行结果很接近。



图中当 x 小于零时， x 的概率密度等于零，这与其定义相符合。

5 瑞利分布

如果随机变量等于两个中心 c^2 随机变量和的平方根，即 $x = \sqrt{c_1^2 + x_2^2}$ ，则该随机变量的分布就是瑞利分布。其概率密度函数如下：

$$p_R(x) = \begin{cases} \frac{x e^{-\frac{x^2}{2m^2}}}{m^2} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

其均值、方差分别为：

$$E(x) = \sqrt{\frac{p}{2}} m, \quad D(x) = \frac{4-p}{2} m^2$$

下面的代码用于生成瑞利分布随机变量，并求其均值、方差。

```
%Program Setting
mu = 2;

%Calculate the CDF & Drawing
x = -10:0.1:10;
cdf = raylcdf(x, mu);
subplot(2, 1, 1);
plot(x, cdf);
title('Rayleigh cumulative distribution ');
```

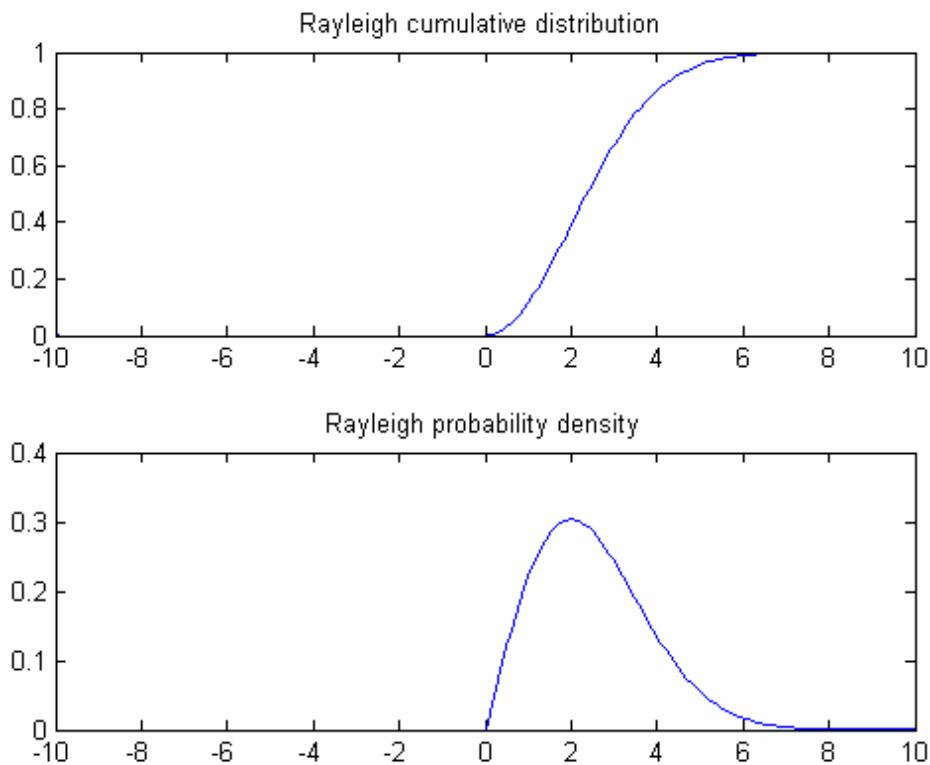
```

%Calculate the PDF & Drawing
pdf = raylpdf(x, mu);
subplot(2, 1, 2);
plot(x, pdf);
title('Rayleigh probability density')

%Generate the rayleigh randoms & Calculate its mean, covariance
R = raylrnd(mu, 1, 1000);
E = mean(R);
D = cov(R);

```

此分布的均值为 2.5，方差为 1.7，这与运行结果很接近。



6 莱斯分布

如果随机变量等于两个非中心 c^2 随机变量和的平方根，即 $x = \sqrt{c_1^2 + x_2^2}$ ，则该随机变量的分布就是莱斯分布。其概率密度函数如下：

$$p_R(x) = \begin{cases} \frac{x e^{-\frac{x^2+s^2}{2s^2}} I_0\left(\frac{xs}{s^2}\right)}{s^2} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

待补

1.2 随机过程

本节首先讨论随机过程及其统计特性，然后分类讨论常用的随机过程，包括高斯随机过

程、平稳随机过程以及 Markov 过程。

1.2.1 随机过程定义及其统计特征

前节讨论的对象都是随机变量，本节开始讨论随机过程，通信过程可以认为就是一个随机过程。

所谓过程就是事物发展所经过的阶段，这自然是与时间是有关联的。从数学的观点来看，如果在某个时刻 t ，其结果是确定的，则这类过程被称为确定性过程。也就是可以找到一个函数以时间 t 为自变量，来求得一个确定的因变量。例如，用一个阶跃信号冲激线性时不变系统，所得到就是一个确定性过程。

如果在某个时刻 t ，其结果不是确定的，则这类过程被称为随机过程。也就是说，重复多次试验，在相同的时刻得到的结果是不同的。例如，收音机晚上收到的电台数目就可能比白天收到的电台数目多，这并不是因为某些电台白天就不播音，而是由于无线信道的变化使然，因为无线信道是个时变信道，其变化通常是随机的。

如果随机系统输出的随机变量是关于时刻 t 的函数，在时间范围 T 内，所有的输出都是随机变量，则 $\{x(t), t \in T\}$ 是一个随机过程。

下面分别定义随机过程的均值、方差、自相关、协方差。

如果 $x(t)$ 是一个随机过程， $f(x, t)$ 是其概率密度函数，则其均值为

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, t)dx$$

均值表示随机过程在时刻 t 的平均值。

方差为

$$s^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m(t))^2 f(x, t)dx$$

方差表示随机过程在时刻 t 与均值 $m(t)$ 的偏离程度。

如果求参数 t_1, t_2 随机过程间的联系，可以定义自相关为

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

协方差为

$$C(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m(t_1)][x_2 - m(t_2)] f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

下面的程序生成三个随机序列，并求其均值、方差

```
%Generate randoms
t = 0:0.01:1;
r = randint(3, length(t), 8);

%Calculate the mean and covariance
e = mean(r);
tao = diag(cov(r))';

%Drawing
hold
plot(t, r(1,:));
```



```

plot(t, r(2,:));
plot(t, r(3,:));
plot(t, e, 'r');
plot(t, tao, 'y');

```

1.2.2 高斯随机过程

如果随机过程 $\{x(t), t \in T\}$ 的有限维分布都服从正态分布，则称该随机过程为高斯随机过程。

高斯随机过程的概率密度函数为

$$f(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n; t_1, t_2, \mathbf{L}, t_n) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-m)^t C^{-1}(x-m)\right\}}{(2p)^{\frac{n}{2}} |C|^{\frac{1}{2}}}$$

其中

$$m = \begin{bmatrix} m_{t_1} \\ m_{t_2} \\ \mathbf{M} \\ m_{t_n} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C(t_1, t_1) & C(t_1, t_2) & \mathbf{L} & C(t_2, t_n) \\ C(t_2, t_1) & C(t_2, t_2) & \mathbf{L} & C(t_2, t_n) \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \\ C(t_n, t_1) & C(t_n, t_1) & \mathbf{L} & C(t_n, t_n) \end{bmatrix}$$

例如下面的代码生成三个随机过程，然后求其均值、协方差。

```

%Generate randoms
t = 0:0.01:1;
r = randint(3, length(t), 8);

%Calculate the mean and covariance
m = mean(r);
C = cov(r);

```

将运算结果带入到上面的概率密度函数公式中，就可以得到该随机过程的概率密度函数。

设 $X(t)$, $Y(t)$ 是两个零均值的高斯随机变量，如果 $X(t)$, $Y(t)$ 独立同分布，则对任意的 $t_1, t_2 \in T$ 有 $E\{X(t_1)Y(t_2)\} = 0$ 。反之，如果对任意的 $t_1, t_2 \in T$ 有 $E\{X(t_1)Y(t_2)\} = 0$ ，则 $X(t)$, $Y(t)$ 独立同分布。

此外，如果 $X = (X_1, X_2, \mathbf{L}, X_n)$ 表示 n 维高斯随机变量，则对任意不全为零的实数

$l_1, l_2, \mathbf{L}, l_n$ ，有 $Y = l_1 X_1 + l_2 X_2 + \mathbf{L} + l_n X_n$ 为一维高斯随机变量。

对于高斯随机过程，讨论两个常见的情况。第一种情况是接收机的输入为窄带平稳实随

机过程。设 $\mathbf{x}(t)$ 为窄带平稳实随机过程，则该过程可以表示为：

$$\mathbf{x}(t) = x_c(t)\cos w_0t + x_s(t)\sin w_0t$$

其中 $x_c(t) = \mathbf{x}(t)\cos w_0t + \hat{\mathbf{x}}(t)\sin w_0t$ ， $x_s(t) = \mathbf{x}(t)\sin w_0t - \hat{\mathbf{x}}(t)\cos w_0t$ ， $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 是 $\mathbf{x}(t)$ 的希尔伯特变换。因为 $x_c(t)$ ， $x_s(t)$ 都是 $\mathbf{x}(t)$ 经过线性运算所得，根据前述可知， $x_c(t)$ ， $x_s(t)$ 也是高斯随机过程并且是相互统计独立的。如果 $\mathbf{x}(t)$ 的均值为 0，方差为 \mathbf{s}^2 ，则 $x_c(t)$ ， $x_s(t)$ 均值为 0，方差为 \mathbf{s}^2 。 $x_c(t)$ ， $x_s(t)$ 的联合概率密度函数为：

$$f(x_c, x_s) = f(x_c)f(x_s) = \frac{1}{2p\mathbf{s}^2} \exp\left(-\frac{x_c^2 + x_s^2}{2\mathbf{s}^2}\right)$$

随机过程 $\mathbf{x}(t)$ 也可以表示为

$$\mathbf{x}(t) = V(t)\cos(w_0t + q)$$

其中 $x_c(t) = V(t)\cos q$ ， $x_s(t) = -V(t)\sin q$ 。这样其概率密度函数也可以表示为：

$$f(V, q) = \frac{V}{2p\mathbf{s}^2} \exp\left(-\frac{V^2}{2\mathbf{s}^2}\right)$$

则可以得到

$$f(V) = \int_0^{2p} f(V, q) dq = \frac{V}{\mathbf{s}^2} \exp\left(-\frac{V^2}{2\mathbf{s}^2}\right)$$

$$f(q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(V, q) dV = 1/2p$$

上式说明随机过程 $\mathbf{x}(t)$ 的包络服从瑞利分布，而相位服从均匀分布。包络的均值为 $\sqrt{2/p}\mathbf{s}$ ，方差为 $\left(2 - \frac{p}{2}\right)\mathbf{s}^2$ 。另外 $f(V, q) = f(V)f(q)$ ，也就是包络与相位是相互统计独立的随机变量。

第二种情况是接收机的输入为随机相位正弦信号与窄带平稳实高斯过程的叠加，即

$$h(t) = A\sin(w_0t + q) + \mathbf{x}(t)$$

同样，对该表达式分解可以得到

$$\begin{aligned} h(t) &= A\sin(w_0t + q) + \mathbf{x}(t) \\ &= (A\sin q + x_c(t))\cos w_0t + (A\cos q + x_s(t))\sin w_0t \\ &= z_c(t)\cos w_0t + z_s(t)\sin w_0t \end{aligned}$$

其中， $z_c(t) = A\sin q + x_c(t)$ ， $z_s(t) = A\cos q + x_s(t)$ 。由于 $x_c(t)$ ， $x_s(t)$ ， q 相互统计独立

的，所以可以得到其概率密度函数为

$$f(x_c, x_s, q) = \frac{1}{2p} \cdot \frac{1}{2ps^2} \exp\left(-\frac{x_c^2 + x_s^2}{2s^2}\right)$$

代入 $z_c(t)$, $z_s(t)$ 可以得到

$$f(z_c, z_s, q) = \frac{1}{4p^2 s^2} \exp\left(\frac{z_c^2 + z_s^2 + A^2 - 2A(z_c \sin q + z_s \cos q)}{2s^2}\right)$$

$h(t)$ 还可以表示为 $h(t) = V(t)\cos(\omega_0 t + j(t))$ ，其中 $z_c(t) = V(t)\cos j(t)$ ，

$z_s(t) = -V(t)\sin j(t)$ 。代入到 $f(z_c, z_s, q)$ 可以得到：

$$f(V, j, q) = \frac{V}{4p^2 s^2} \exp\left(-\frac{V^2 + A^2 - 2AV \sin(q - j)}{2s^2}\right)$$

因此可以得到：

$$\begin{aligned} f(V) &= \int_0^{2p} \int_0^{2p} f(V, j, q) dj dq \\ &= \frac{V}{s^2} \exp\left(-\frac{V^2 + A^2}{2s^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{AV}{s^2}\right) \end{aligned}$$

其中 I_0 是零阶修正贝塞尔函数。上式所代表的包络概率密度函数就是莱斯密度函数，

也就是随机相位正弦信号与窄带平稳实高斯过程的叠加，其包络服从莱斯分布，其相位还是服从均匀分布。

所以综合以上两种可以知道，如果接收机的输入信号近似的平稳实高斯随机过程，则其包络服从瑞利分布，如果有正弦信号的叠加，则其包络服从莱斯分布。

设想在无线通信环境下，如果所有从不同路径到达接收机的信号最终叠加在一起，各个路径分量的信号强度相近，则接收机的输入信号近似为平稳实高斯过程，此时其包络服从瑞利分布。如果有从基站到达接收机的直射信号，也就是存在较强的正弦信号波形到达接收机，同时混合其它路径到达接收机的信号，则接收机的输入信号近似为正弦信号叠加平稳实高斯随机过程，此时其包络服从莱斯分布。

1.2.3 平稳随机过程

平稳随机过程分为严平稳随机过程、宽平稳随机过程两类，通常情况下，平稳随机过程都是宽平稳随机过程。

如果随机过程 $\{\mathbf{x}(t), t \in T\}$ ，对于任意整数 n 与任意选定的时刻 $t_1 < t_2 < \mathbf{L} < t_n$ $t_i \in T$ 以及 $t_1 + t < t_2 + t < \mathbf{L} < t_n + t$ $t_i + t \in T$ ，都有

$$F(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n; t_1, t_2, \mathbf{L}, t_n) = F(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n; t_1 + t, t_2 + t, \mathbf{L}, t_n + t)$$

则该过程为**严平稳随机过程**。

如果随机过程 $\{\mathbf{x}(t), t \in T\}$ 是一个二阶矩随机过程，且其均值为常数，相关函数是

$t = t_1 - t_2$ 的函数，则该随机过程为**宽平稳随机过程**。

所谓二阶矩过程是均值、方差都存在的随机过程，例如前面描述的高斯随机过程就是二阶矩过程。

常见的宽平稳随机过程有下面几种类型：

如果 $\{Z(t), t \in T\}$ 为复随机过程，且 $E(Z(t)) = c$ ， $E(Z(t)\overline{Z(t+t)}) = R(t)$ ，则该随机过程为复平稳随机过程。

如果 $\{X(t), t \in T\}$ 、 $\{Y(t), t \in T\}$ 都是宽平稳随机过程，且互相关函数 $R_{XY}(t, t+t) = R_{XY}(t)$ ，则 $X(t), Y(t)$ 为联合平稳随机过程。

如果 $\{X(t), t \in T\}$ 为随机过程，且对于任意实数 t ，都有随机过程 $Y(t) = X(t+t) - X(t)$ 是宽平稳随机过程，则 $\{X(t), t \in T\}$ 为平稳增量随机过程。

如果 $\{X(t), t \in T\}$ 为平稳随机过程，且满足 $X(t) = X(t+T)$ ， T 是周期，则 $\{X(t), t \in T\}$ 为周期平稳随机过程。

平稳随机过程的性质可以通过其均值、相关函数来表示。其相关函数具有如下性质：

1. $R(0) = E(X^2(t)) \geq 0$ ，这也是该随机过程的平均功率。
2. $R(-t) = R(t)$
3. $|R(t)| \leq R(0)$
4. $R(t)$ 是非负定的
5. 如果 $X(t)$ 是周期平稳随机过程，则 $R(t)$ 是周期函数。

如果 $\{X(t), t \in T\}$ 是随机过程，且满足如下两个条件

$$\langle X(t) \rangle = E(X(t)) = m \quad \langle X(t)X(t+t) \rangle = E(X(t)X(t+t)) = R(t)$$

则 $X(t)$ 是具有**各态历经性**的随机过程。

$$\text{这里 } \langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt, \quad \langle X(t)X(t+t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)X(t+t) dt。$$

1.2.4 马尔可夫随机过程

设有一个随机过程 $\{x(t), t \in T\}$ ，在 $t_1, t_2, \mathbf{L}, t_m, t_{m+1}$ 时刻得到观测值 $x_1, x_2, \mathbf{L}, x_m, x_{m+1}$ 满足如下条件：

$$f(x_{m+1}; t_{m+1} / x_m, \mathbf{L}, x_1; t_m, \mathbf{L}, t_1) = f(x_{m+1}; t_{m+1} / x_m; t_m)$$

则该过程为**马尔可夫过程**。马尔可夫过程表明将来发生的事情仅与当前的事情有关，而与过去的事情无关。

如果随机过程 $\mathbf{x}(t)$ 是离散状态，并且也满足马尔可夫过程定义，则称该随机过程为**马尔可夫链**。对于马尔可夫链还可以用其概率来表示：

$$P(\mathbf{x}(n+1) = j / \mathbf{x}(n) = i, \mathbf{L}, \mathbf{x}(0) = i_0) = P(\mathbf{x}(n+1) = j / \mathbf{x}(n) = i) = P_{ij}^{(1)}$$

这里 $P_{ij}^{(1)}$ 被称为其一步转移概率。

如果马尔可夫链满足对于任意时刻 k 都有 $P(\mathbf{x}(k+1) = j / \mathbf{x}(k) = i) = P_{ij}^{(1)}$ ，即转移概率与时刻 k 是无关的，则称该马尔可夫链为**齐次马尔可夫链**。

对于齐次马尔可夫链可以有如下等式存在：

$$\begin{aligned} & P(\mathbf{x}(n) = i_n, \mathbf{x}(n-1) = i_{n-1}, \mathbf{L}, \mathbf{x}(0) = i_0) \\ &= P(\mathbf{x}(n) = i_n / \mathbf{x}(n-1) = i_{n-1}, \mathbf{L}, \mathbf{x}(0) = i_0) P(\mathbf{x}(n-1) = i_{n-1}, \mathbf{L}, \mathbf{x}(0) = i_0) \\ &= P(\mathbf{x}(n) = i_n / \mathbf{x}(n-1) = i_{n-1}) P(\mathbf{x}(n-1) = i_{n-1}, \mathbf{L}, \mathbf{x}(0) = i_0) \\ &= P(\mathbf{x}(n) = i_n / \mathbf{x}(n-1) = i_{n-1}) P(\mathbf{x}(n-1) = i_{n-1} / \mathbf{x}(n-2) = i_{n-2}, \mathbf{L}, \mathbf{x}(0) = i_0) \end{aligned}$$

如果 $P(\mathbf{x}(n) = i_n, \mathbf{x}(n-1) = i_{n-1}, \mathbf{L}, \mathbf{x}(0) = i_0)$ 为常量，则该齐次马尔可夫链为**平稳马尔可夫链**。

马尔可夫链的状态分类

如果存在 $n \geq 0$ ，使得 $P_{ij}^{(n)} > 0$ ，则称从状态 i 到状态 j 是**可达的**。如果从状态 j 也可以到状态 i ，则称状态 i, j 是**互达的**。

如果一个马尔可夫链中所有状态都是互达的，则称该马尔可夫链为**不可约的**，反之则称为**可约的**。

如果从状态 i 经过 n 步转移后，首次到达状态 j 的概率被称为**首次到达概率**。如果 n 可以取任意值，则从状态 i 到达状态 j 的概率被称为**迟早到达概率**。

设 $f_{ij}(n) = P(X_{n+k} = j, X_{n+k-1} \neq j, \mathbf{L}, X_{k+1} \neq j / X_k = i)$ 表示首次到达概率，则迟早到达概率

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n)。$$

如果 $f_{ii} = 1$ ，则称状态 i 是**常返的**，否则 $f_{ii} < 1$ ，则称状态 i 是**非常返的**。如果状态 i 是常返的，则从状态 i 出发，可以无限次返回到状态 i 。如果状态 i 是非常返的，则从状态 i 出发，只能有限次返回到状态 i 。

如果状态 i 是常返的，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(n)} = 0$ ，则称状态 i 是**零常返的**。如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(n)} > 0$ ，则称状态 i 是**正常返的**。

马尔可夫链的状态空间分解

设 C 是马尔可夫链状态空间 S 的一个子集，对于任意状态 i 属于 C ，状态 j 不属于 C ，都有 $P_{ij}^{(1)} = 0$ ，则称状态 C 为**闭集**。

所有常返态构成闭集，因为常返态必然是互达的，否则不可能是常返态。状态空间 S 可以分解为 $S = N \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$ ，其中 N 为非常返态， C_i 为常返态。

马尔可夫链的周期与遍历

如果存在正整数 $d(d>1)$ ，使得只有当 $n = d, 2d, 3d, \dots, L$ 时，才有 $P_{ii}^{(n)} > 0$ ，则称状态 i 为周期性的状态。如果状态 i, j 是互达的，则状态 i, j 有相同的周期。

非周期的正常返状态都是遍历的。一个不可约的、非周期的、有限状态的马尔可夫链一定是遍历的。

1.3 信号与系统

因为本书主要讨论数字通信原理，所以本节主要讨论离散时间下的信号与系统。本节分别讨论离散时间信号与系统，离散系统的时域分析，离散系统的 Z 域分析，连续系统到离散系统的映射。

1.3.1 信号分类、运算与系统描述

信号是随时间变化的某个物理量。例如载波信号 $g(t)\cos(\omega t + q)$ ，其幅度、频率、相位都可以随时间变化而变化。

信号可以分为确定性信号与随机性信号。**确定性信号**是时间的确定性函数。能用来传递信息的信号通常都是从发送端发送的确定性信号，也就是其幅度、频率或者相位可被控制来表达信息，而在接收端去接收、检测、估计发送的是什么信号。**随机性信号**是时间的随机性函数。例如雷达接收机收到的回波信号就是随机性信号。

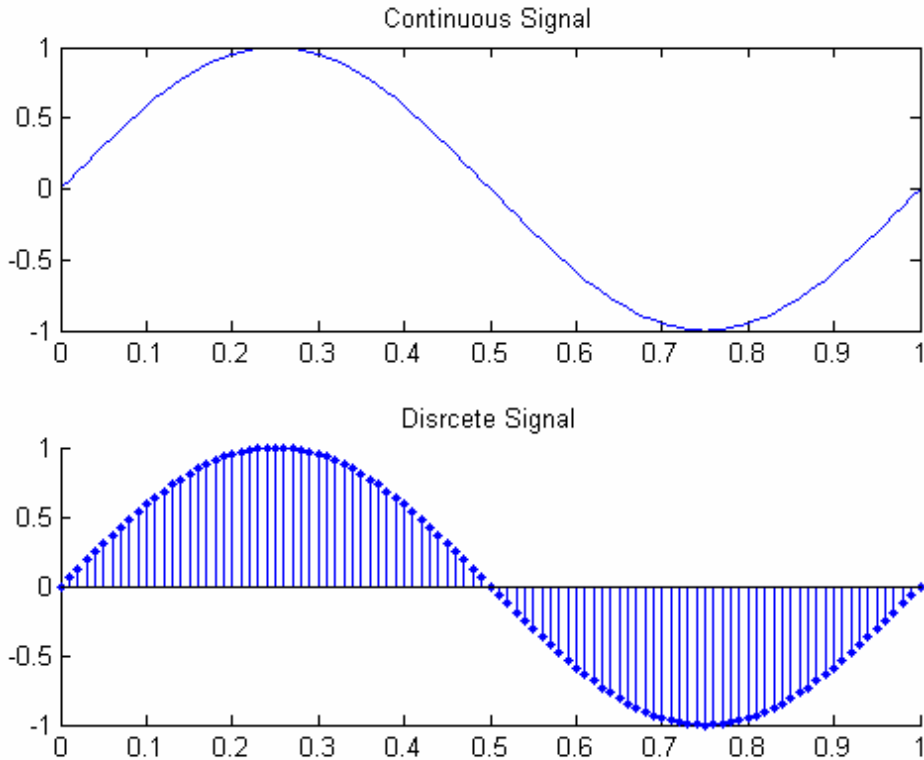
信号可以分为连续信号与离散信号。如果信号在整个时域都有定义，则该信号是**连续信号**，但该信号的值域并不一定是连续的。例如可以是正弦信号或者是方波信号。而**离散信号**则不是在整个时域都有定义的，只是在离散的某些时刻有定义。

下面代码绘出连续信号与离散信号波形

```
%Time and Signal
t = 0:0.01:1;
s = sin(2*pi*t);

%Draw continuous and discrete signal
subplot(2, 1, 1);
plot(t, s);
title('Continuous Signal');
subplot(2, 1, 2);
stem(t, s, '.');
title('Discrete Signal');
```

其波形如下：



信号可以分为周期信号与非周期信号。如果连续信号的变化满足 $f(t) = f(t + mT)$ ，或者离散信号的变化满足 $f(k) = f(k + mN)$ ，则该信号是**周期信号**，其周期分别是 T 、 N 。如果不满足上述等式，则是**非周期信号**。

信号的能量可以用如下等式计算

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f^2(t) dt$$

平均功率为

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^2(t) dt$$

如果一个信号的能量大于零，而其功率等于零，则该信号为**能量信号**。如果一个信号的能量无穷大，但其功率为有限值，则该信号为**功率信号**。例如正弦信号就是一个功率信号。

下面来计算一下正弦信号的能量及其功率

```
%Time Setting
```

```
T = 2;
```

```
t = 0:0.01:T;
```

```
%Generate sine signal and Calculate the Energy , Power
```

```
s = sin(2*pi*t);
```

```
e = trapz(t, s.*s);
```

```
p = e/(2*T);
```

其能量 e 等于 1，功率 p 等于 0.25。当增大 T 时，可以看到 e 会增大，但是 p 却保持不变。可以推测当 T 趋于无穷大时，则能量也趋于无穷大，但是功率却保持不变，这就是功率

信号的定义。

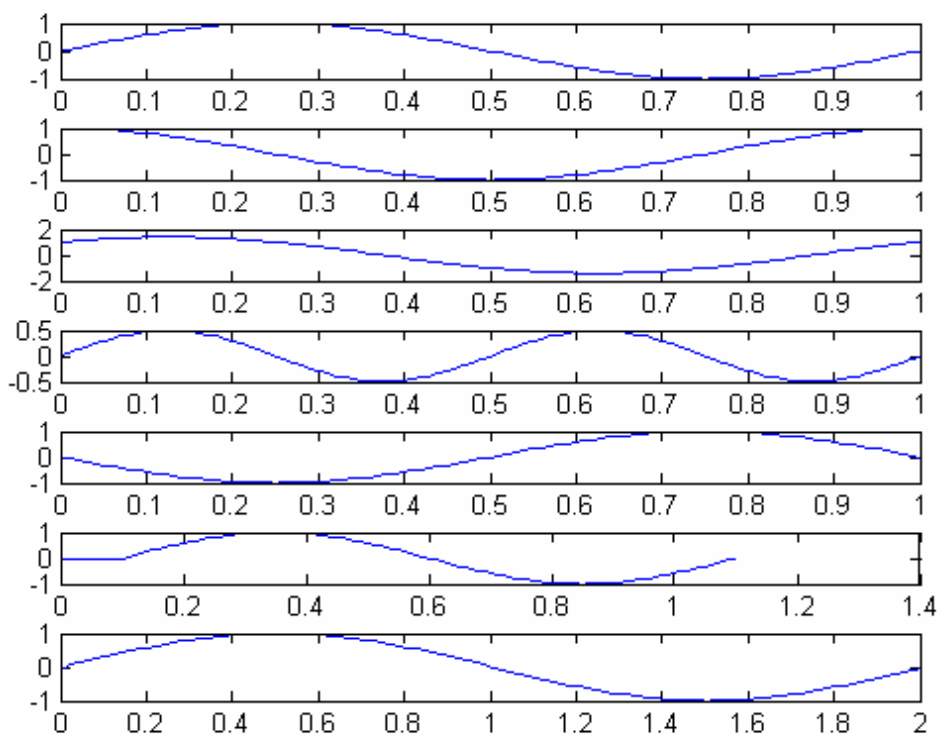
对信号可以做加法运算、乘法运算、反转、平移以及尺度变化。下面通过程序来演示这些基本操作。

```
%Signal
t = 0:0.01:1;
s = sin(2*pi*t);
c = cos(2*pi*t);

%Add, Multiply, mirror, shift, scale operation
add = s+c;
multiply =s.*c;
mirror = fliplr(s);
t1 = 0:0.01:1.1;
shift = [zeros(1, 10), s];
t2 = 0:0.01:2
scale = s(floor(t2*50) + 1);

%Drawing
subplot(7, 1, 1);
plot(t, s);
subplot(7, 1, 2);
plot(t, c);
subplot(7, 1, 3);
plot(t, add);
subplot(7, 1, 4);
plot(t, multiply);
subplot(7, 1, 5);
plot(t, mirror);
subplot(7, 1, 6);
plot(t1, shift);
subplot(7, 1, 7);
plot(t2, scale);
```

其相应的图示如下：



图中，第一、二行分别是正弦、余弦信号的波形图。第三行是正弦、余弦波形的和。第四行是正弦、余弦波形的积。第五行是正弦信号的反转。第六行是正弦信号的平移，其开始部分幅度等于零。第七行是正弦信号的扩展，原先正弦信号的周期为 1，现在周期为 2。

在这里介绍两个基本信号，分别是单位冲激信号与单位阶跃信号。这两个信号在系统分析中起到非常重要的作用，利用这两个信号可以构成、表示其它信号。

对于离散时间信号，**单位冲激信号**的定义如下：

$$d[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

单位阶跃信号的定义如下：

$$m[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

由以上两式可以得到如下两个关系式：

$$d[n] = m[n] - m[n-1]$$

$$m[n] = \sum_{k=0}^{\infty} d[n-k]$$

也就是冲激信号是单位阶跃信号的一次差分运算，单位阶跃信号是冲激信号的累加运算。

对于连续时间信号，单位阶跃信号的定义如下：

$$m(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

单位冲激信号的定义如下：

$$d(t) = \frac{dm(t)}{dt}$$

也就是单位冲激信号是单位阶跃信号的一次微分运算。

冲激函数就有一些比较特殊的性质。当冲激函数与其它函数 $h(t)$ 相乘时，可以得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} d(t)h(t)dt = h(0)$$

也就是函数 $h(t)$ 在 $t = 0$ 时的取样。

$$\int_{-\infty}^{\infty} d(t-t)h(t)dt = h(t)$$

当冲激信号移位到 $t = t$ 时，结果是 $h(t)$ 在 $t = t$ 时的取样。

下面的代码用于生成冲激信号、阶跃信号。

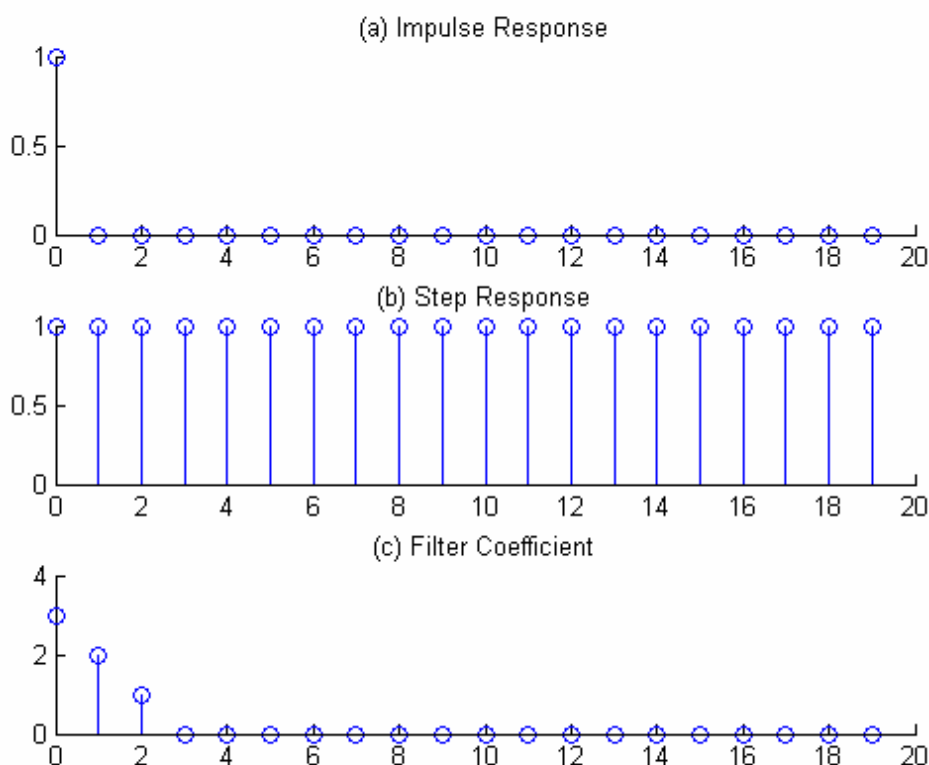
```
%Generate the Impulse, Step Signal
impulse = [1, zeros(1, 19)];
step = ones(1, 20);

%Pass the filter, where y[n] = x[n]+x[n-1] - y[n-1];
x = filter([1 1], [1 1], impulse);
y = filter([1 1], [1 1], step);
%Pass the filter, where y[n] = 3x[n]+2x[n-1]+x[n-1];
z = filter([3 2 1], 1, impulse);

%Drawing
subplot(2, 1, 1);
stem([0:19], x);
title('Impulse Response');
subplot(2, 1, 2);
stem([0:19], y);
title('Step Response');
subplot(3, 1, 3);
stem([0:19], z);
title('Filter Coefficient');
```

上述代码中，第一个滤波器是个一阶全通滤波器，其功能非常简单，就是将输入值直接输出。所得到的波形如下图中 a、b 所示。图 c 表示冲激信号通过系统函数 $H(z) = 3 + 2z^{-1} + z^{-2}$ 的滤波器，可以看到其输出就是滤波器系数。通过这种方法，我们可以了解系统的构造。在通信系统中，发送端可以发送一些引导序列，而接收端可以通过对引导序列的分析来了解信

道情况，并利用对信道的了解，在解调数据时，能够更好的还原被信道污染的数据。



系统可以分为连续时间系统，离散时间系统。当一个系统的输入是连续时间信号，输出也是连续时间信号，则该系统为**连续时间系统**。当一个系统的输入是离散时间信号，输出也是离散时间信号，则该系统为**离散时间系统**。当一个系统既有连续时间系统，又有离散时间系统，则称该系统为混合时间系统。系统内各单元可以有不同的连接关系，通常划分为串联、并联、混联三类，此外还有反馈连接。

系统有其基本特性，对其基本特性的理解，有助于认识、掌握系统功能。这些性质包括（非）记忆性、（不）可逆性、（非）线性、时（不）变性、（非）因果性、（不）稳定性。这里使用了括号，是因为每个特性都可以有其反面。

如果一个系统的输出不仅与当前输入有关，而且还与以前的输入有关，那么该系统就是有**记忆性**的，否则就是非记忆性的。例如，一个系统的输出 $y[n] = x[n] + x[n-1]$ ，则该系统就是有记忆的。通常，在无线环境中，无线信道环境可以被认为是具有记忆特性的，因为信道的输出可能是具有不同时延波形的叠加。

如果系统的每个输出，都有唯一的输入相对应，则该系统就是具有**可逆性**的，否则就是不可逆的。例如，一个系统的输出是 $y[n] = 2x[n]$ ，对于每个输入都有唯一的输出相对应，

则其逆系统为 $y[n] = \frac{1}{2}x[n]$ 。

如果一个系统具有如下两个性质，则称该系统是**线性**的。

1) 可加性：设 $y_1(t) = F(x_1(t))$ ， $y_2(t) = F(x_2(t))$ ，则 $y_1(t) + y_2(t) = F(x_1(t) + x_2(t))$ 。

2) 齐次性：设 $y(t) = F(x(t))$ ，则 $ay(t) = F(ax(t))$ 。

不满足这两个特性的系统，就是非线性系统。例如，一个系统的输出是 $y[n] = 2x[n]$ ，当输入是 $x_1[n]$ 时，输出是 $y_1[n] = 2x_1[n]$ 。输入是 $x_2[n]$ 时，输出是 $y_2[n] = 2x_2[n]$ 。则当输入是 $x_1[n] + x_2[n]$ 时， $y[n] = 2(x_1[n] + x_2[n]) = 2x_1[n] + 2x_2[n] = y_1[n] + y_2[n]$ ，也就是满足可加性。齐次性也是显而易见的。所以该系统就是线性系统。

如果一个系统的输出 $y(t) = F(x(t))$ ，并且 $y(t-t) = F(x(t-t))$ ，则该系统具有**时不变性**。也就是，当输入信号有一定的延迟时，则输出信号也有相应的输出延迟。

如果系统同时满足线性、时不变性，则称该系统为线性时不变系统。

如果一个系统的输出仅取决于现在以及过去输入，则称该系统为具有**因果性**。如果一个系统的输入是有界的，则其输出也是有界的，那么该系统就具有**稳定性**。

1.3.2 离散系统时域分析

对于离散系统，通常采用差分方程的形式来表示：

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

这是一个线性时不变系统，对此变形可以得到：

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\}$$

如果 $N = 0$ ，则上式右边没有第二项，这时系统也被称为有限冲激响应(FIR)系统(Finite Impulse Response)，因为当输入是有限的，输出也是有限的。如果 $N \neq 0$ ，则该系统被称为无限冲激响应(IIR)系统(Infinite Impulse Response)，因为系统此时存在递归，以前的输出会成为现在的输入，这种递归可以一直存在下去。对于有限冲激响应系统，如果输入 L 个值，则输出也是 L 个值

对于有限冲激响应系统，还可以采用求卷积和的方式来表示：

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

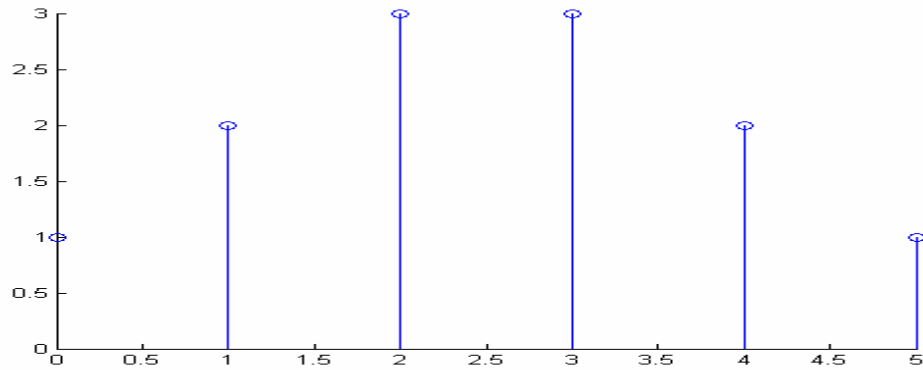
如果 $x[k]$ 有 L 个数值， $h[n-k]$ 有 M 个数值，而其余数值都为零，则 $y[n]$ 有 $L + M - 1$ 个数值输出。

下面是完成卷积操作的简单代码， x 有三个非零数值， h 有四个数值，则 y 有六个数值输出。

```
h = ones(1, 4);
x = [ones(1, 3), zeros(1, 3)];
y = filter(h, 1, x);

stem((0:length(y)-1), y);
```

观察所生成的图形，可以看到输出六个数值。注意， x 三个有效值后面填充了 $M-1$ 个零，这样通过滤波得到的输出等价于卷积所得到的输出。



卷积运算有其基本性质，这些性质包括交换律、分配律、结合律。

交换律: $x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$

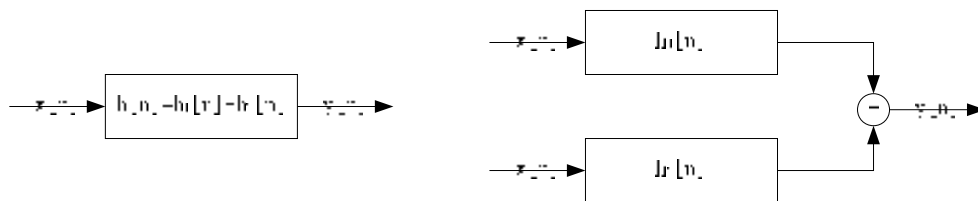
分配律: $x[n]*(h_1[n]+h_2[n])=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$

结合律: $x[n]*(h_1[n]*h_2[n])=(x[n]*h_1[n])*h_2[n]$

结合律表明，如果一个系统的冲激响应是 $h[n]$ ，那么输入 $x[n]$ ，等价于一个系统的冲激响应是 $x[n]$ ，输入 $h[n]$ 。用图表示就是：



分配律表明，如果一个系统的冲激响应是 $h[n]=h_1[n]+h_2[n]$ ，那么输入 $x[n]$ ，等价于分别输入给 $h_1[n], h_2[n]$ ，然后累加。



结合律表明，如果一个系统的冲激响应是 $h[n]=h_1[n]*h_2[n]$ ，那么输入 $x[n]$ ，等价于先于 $h_1[n]$ 卷积，其输出再与 $h_2[n]$ 卷积。



利用此前的代码，并做稍些修改就可以验证以上三个定律。

前面讲过无记忆系统的特征，如果一个系统是无记忆系统，其输出 $y[n]=x[n]*h[n]$ ，那么必然有 $h[n]=0, n \neq 0$ ，也就是系统输出仅与当前输入值有关，而与以前的输入值无关。通常在无线环境下，由于存在多径效应，所以无线信道是个有记忆系统。

如果一个系统有可逆系统存在，则当系统的输出是 $y[n] = x[n] * h_1[n]$ ，应该有 $x[n] = y[n] * h_2[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n]$ ，也就是 $h_1[n] * h_2[n] = d[n]$ ， $h_2[n]$ 就是逆系统。在无线信道环境下，接收机可接收来自发射机的引导序列，并对无线信道进行估计，求出其逆系统，从而尽可能恢复出发送信号。

如果一个系统具有因果性，则其输出只取决于现在和以前的输入，而与将来的输入无关。

系统的输出可以用卷积来表示 $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$ 。如果当前输出为 $y[n]$ ，系统只能对 n 及其以前的输入有响应，而其后的没有响应，所以要求 $n < n-k$ ，即 $k < 0$ 时，必须有 $h[k] = 0$ 。

如果一个系统具有稳定性，则当其输入有界时，其输出也有界。设其输入界限为 B ，根据卷积公式，可以知道：

$$|y[n]| = |x[n] * h[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]||h[n-k]|$$

代入 $|x[k]| \leq B$

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]||h[n-k]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n-k]|$$

如果要求输出也有界，则必然要求：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n-k]| < \infty$$

满足此条件，系统就具有稳定性。

1.3.3 离散系统频域分析

对于离散时间信号的频率分析，通常是采用 Z 变换来分析。 Z 变换的定义如下：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

从数学角度来看，这是一个幂级数序列求和运算。其结果可能是发散的（不存在的），只有当 Z 在一定取值范围内时，其结果才可能是收敛的（存在的），称该取值范围为收敛域 $|z|$ （ROC: Rang of Convergence）。

设 Z 是复数， $z = re^{jw}$ ，这里采用将其表示称极坐标形式， r 是幅度， w 是相位。代入到上面的 Z 变换公式，可以得到：

$$X(z) = X(re^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{jw})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-jwn}$$

如果 r 等于 1，则有：

$$X(z)|_{z=e^{jw}} = X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jwn}$$

这就是离散序列的傅立叶变换。

如果 $X(z)$ 是收敛的，则要求 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]z^{-n}| < \infty$ ，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| (re^{jw})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| r^{-n} < \infty$$

所以， $X(z)$ 是否收敛，与序列 $x[n]$ ，幅度 r 有关，而与幅角 w 无关。那么收敛域 $|z|$ 仅与幅度 r 有关，所以收敛域是可能包含原点的圆环，且不可以有极点存在，否则 $X(z)$ 无法收敛。

序列 $x[n]$ 可以是有限长序列，左边序列、右边序列、无限长序列四种类型。不同类型的序列，对应的收敛域 $|z|$ 是不同的。

如果序列 $x[n]$ 是有限长序列，则收敛域是整个 z 平面（可能包含原点与无穷远处）。但是如果 $n < 0$ ，则要去掉无穷远处；如果 $n > 0$ ，则要去掉原点处；如果 n 既有负数也有正数，则要去掉原点与无穷远处。

如果序列 $x[n]$ 是左边序列，也就是从序列从 $-\infty$ 一直到 N ，其收敛域在圆内。当 $N \leq 0$ ，其收敛域包含原点， $N > 0$ ，则不包含原点。

如果序列 $x[n]$ 是右边序列，也就是从序列从 N 一直到 ∞ ，其收敛域在圆外。当 $N < 0$ ，其收敛域不包含无穷远处， $N \geq 0$ ，则包含无穷远处。

如果序列 $x[n]$ 是双边序列，也就是从序列从 $-\infty$ 一直到 ∞ ，其收敛域是圆环。

Z 变化有许多基本性质，这些基本性质在分析、设计离散时间系统时，会被经常使用到。

线性

若

$$X_1(z) = Z(x_1[n]) \text{ ROC} : R_1$$

$$X_2(z) = Z(x_2[n]) \text{ ROC} : R_2$$

则

$$aX_1(z) + bX_2(z) = Z(ax_1[n] + bx_2[n]) \text{ ROC} : R_1 \cap R_2$$

序列平移

若

$$X(z) = Z(x[n]) \text{ ROC} : R$$

则

$$z^{\pm m} X(z) = Z(x[n \pm m]) \text{ ROC} : R$$

当 $\pm m > 0$ 时, 要去掉无穷远处, 当 $\pm m < 0$ 时, 要去除原点。

序列反转

若

$$X(z) = Z(x[n]) \text{ ROC} : R$$

则

$$X(z^{-1}) = Z(x[-n]) \text{ ROC} : 1/R$$

序列插值与抽取

若

$$X_1(z) = Z(x_1[n]) \text{ ROC} : R_1$$

$$x_2[n] = \begin{cases} x_1[n/N] & nk = N \\ 0 & nk \neq N \end{cases}$$

则

$$X_2(z) = X_1(z^N) \text{ ROC} : R_1^{-k}$$

序列加权

若

$$X(z) = Z(x[n]) \text{ ROC} : R$$

则

$$-z \frac{d}{dz} X(z) = Z(nx[n]) \text{ ROC} : R$$

$$X(a^{-1}z) = Z(a^n x[n]) \text{ ROC} : |a|R$$

复共轭序列

若

$$X(z) = Z(x[n]) \text{ ROC} : R$$

则

$$X^*(z^*) = Z(x^*[n]) \text{ ROC} : R$$

序列卷积

若

$$X_1(z) = Z(x_1[n]) \text{ ROC} : R_1$$

$$X_2(z) = Z(x_2[n]) \text{ ROC} : R_2$$

则

$$X_1(z)X_2(z) = Z(x_1[n]*x_2[n]) \text{ ROC: } R_1 \cap R_2$$

利用以上的性质可以知道，对于离散系统 $\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$ ，其 Z 变换等于：

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

所以

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} X(z)$$

$H(z)$ 被称为**系统函数**或转移函数，是该离散时间系统的单位冲激响应 $h[n]$ 的 z 变换，

$$\text{即 } H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}。$$

前一章节，从时域的角度分析了系统的因果性、稳定性，现在从 Z 的角度来分析其因果性，稳定性。

如果系统具有因果性，则当 $n < 0$ 时， $h[n] = 0$ ，所以离散时间系统的单位冲激响应序列必然是个右边序列，所以其收敛域是某个圆外的区域，并且包括无限远处。

如果系统是稳定的，则其单位冲激响应序列 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$ 。当 $h[n]$ 的 z 变换

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|r^{-n} < \infty \text{ 时，若 } r = 1，\text{ 则系统就是稳定的。所以如果系统是稳定的，}$$

则收敛域必然包含单位圆。对于因果稳定系统，系统函数的全部极点都必然在单位圆以内。

对于有限冲激响应滤波器（FIR Filter），由于没有极点存在，所以系统总是稳定的。对于无限冲激响应滤波器（IIR Filter），因为有极点的存在，所以系统通常是不稳定的（零、极点抵消除外）。无论是有限冲激响应滤波器还是无限冲激响应滤波器都具有因果性，因为当前的输出都与将来的输入无关。

现在假设有 FIR 滤波器

$$y[n] = x[n] + x[n-1]$$

IIR 滤波器

$$y[n] - y[n-1] = x[n] + x[n-1]$$

利用以上 z 变换的性质可以得到，FIR 滤波器的系统函数：

$$H(z) = 1 + z^{-1}$$

IIR 滤波器的系统函数:

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

现在来分析一下, 这两个滤波器的稳定性。

```
%Time & Impulse Sequence
t = [0:60];
x = [1, zeros(1, 60)];

%FIR Coefficient
b = [1 1];
a = [1];

%Draw Zero, Pole Diagram
subplot(2, 2, 1);
zplane(b, a);
title('FIR Filter Zero-Pole Diagram');

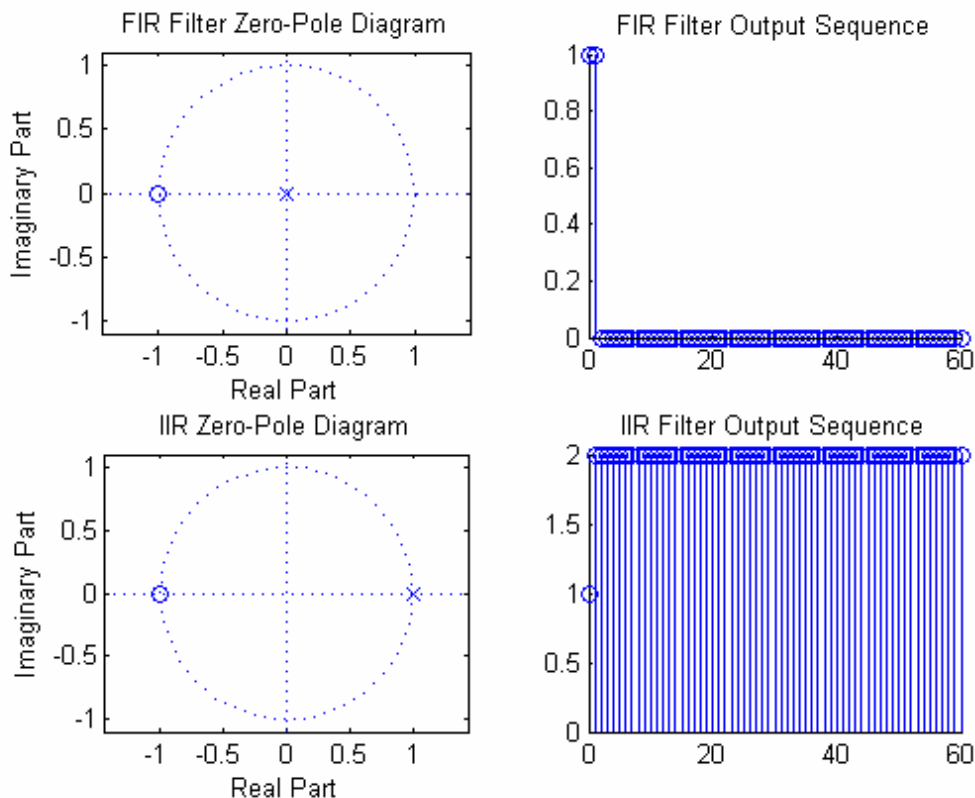
%Get Output Sequence & Draw
y = filter(b, a, x);
subplot(2, 2, 2);
stem(t, y);
title('FIR Filter Output Sequence');

%IIR Coefficient
b = [1 1];
a = [1 -1];

%Draw Zero, Pole Diagram
subplot(2, 2, 3);
zplane(b, a);
title('IIR Zero-Pole Diagram');

%Get Output Sequence & Draw
y = filter(b, a, x);
subplot(2, 2, 4);
stem(t, y);
title('IIR Filter Output Sequence');
```

得到的 z 平面图以及冲激响应输出序列如下:



零极点图中的圆圈代表零点所在位置，叉子代表极点所在位置。可以看到，FIR 滤波器的零点在单位圆上，极点在原点，也就是在单位圆内，所以该 FIR 滤波器是稳定的。而 IIR 滤波器的零点、极点都在单位圆上，而且没有重合，所以该 IIR 滤波器是不稳定的。从 FIR 滤波器、IIR 滤波器的输出就可以看到，冲激信号作用于 FIR 滤波器后，FIR 滤波器输出的冲激响应序列最终归于零，而冲激信号作用于 IIR 滤波器后，IIR 滤波器输出的冲激响应序列却没有最终归于零，而是一直持续下去。

以上从因果性、稳定性来分析系统函数 $H(z)$ 特性，现在从其幅度响应、相位响应来分析系统函数。令 $z = e^{j\omega}$ ，则 $H(e^{j\omega})$ 是离散时间傅立叶变换。**幅度响应** $|H(e^{j\omega})|$ 表明在各个频率上系统的幅度变化。**相位响应** $\angle H(e^{j\omega})$ 表明在各个频率上系统的相位变化。且有如下关系式存在：

$$|Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})| |X(e^{j\omega})|$$

$$\angle Y(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega})$$

即系统输出信号幅度等于幅度响应乘以输入信号幅度，输出信号相位等于相位响应乘以输入信号相位。注意这里采用的是数字频率 ω ， $\omega = (\Omega \cdot p) / f_s$ ，其取值范围一般是 $(-p, p]$ ， Ω 是模拟频率， f_s 是抽样频率。

这里还是以 $y[n] = x[n] + x[n-1]$ 为例，来观察其幅度响应、相位响应。

```
%Filter Coefficient & Frequency Respond
```

```
b = [1 1];
```

```
a = [1];
```

```
[H, f] = freqz(b, a);
```

```
%Calculate the Magnitude Respond(dB)
```

```
subplot(2, 1, 1);
```

```
plot(f/pi, dB(abs(H)));
```

```
title('Magnitude Respond(dB)');
```

```
grid; axis tight;
```

```
%Calculate the Phase Respond
```

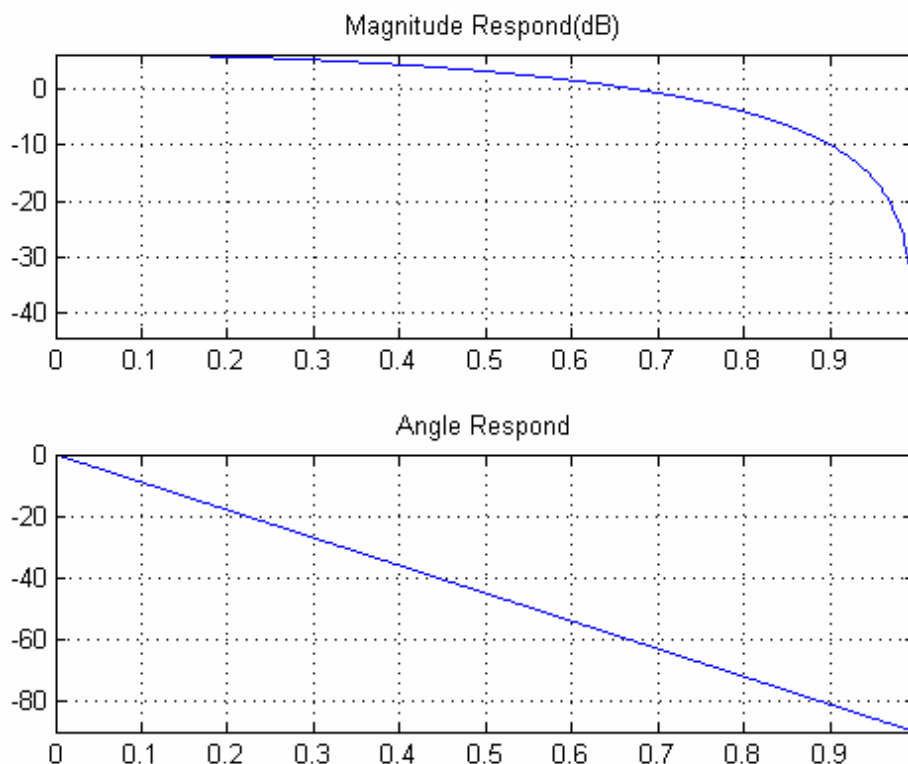
```
subplot(2, 1, 2);
```

```
plot(f/pi, angle(H)*180/pi);
```

```
title('Angle Respond');
```

```
grid; axis tight;
```

可以得到幅度响应、相位响应图示如下：



观察以上图示可以知道，该滤波器的幅度响应不是恒定的，相位响应是线性的。幅度响应说明当不同频率、相同幅度的信号通过该滤波器时，输出信号的幅度是不同的。相位响应说明输出信号与输入信号之间有恒定的延时，因为 $e^{-j\omega t_0} X(e^{j\omega}) = F(x(t-t_0))$ 。

与相位响应相关的还有相位延迟、群延迟。相位延迟定义为 $t_p(\omega) = -\angle H(e^{j\omega})/\omega$,

群延迟定义为 $t_g = -\frac{d\angle H(e^{j\omega})}{d\omega}$

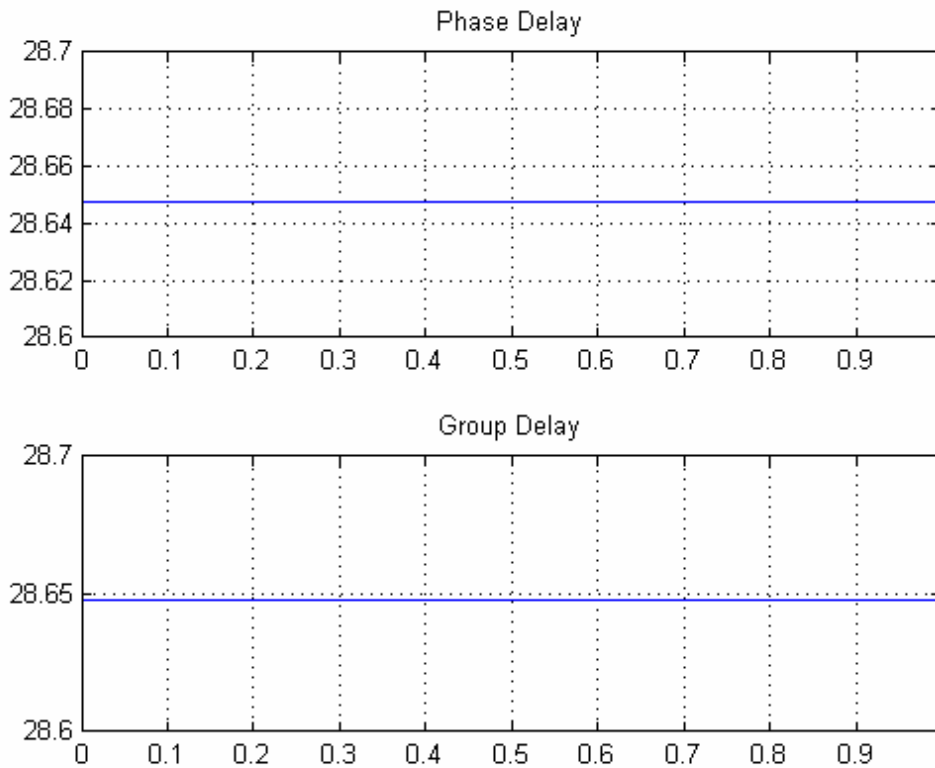
下面的代码演示相位延迟、群延迟。

```
%Filter Coefficient
b = [1 1];
a = [1];

%Calculate the Phase Delay & Draw
[phi, f] = phasedelay(b, a);
subplot(2, 1, 1);
plot(f/pi, phi*180/pi);
title('Phase Delay');
grid; axis tight;

%Calculate the Group Delay & Draw
[gd, f] = grpdelay(b, a);
subplot(2, 1, 2);
plot(f/pi, gd*180/pi);
title('Group Delay');
grid; axis tight;
```

其图示如下：



以上两图表明了系统有固定的延迟。另外还可以看到相位延迟与群延迟相同，这是因为该滤波器是线性相位的。

第二章 通信信号设计

本章主要讨论信号设计，讨论信号设计离不开对信道环境的理解。通常信道环境分为三大类型，分别是加性白高斯噪声信道、带限信道、多径衰落信道。加性白高斯噪声信道是指信道噪声服从高斯分布且在整个频域上都存在。带限信道是指信道仅允许在一定频率范围内的信号通过，而在其余频率上信号有很大衰减或者被滤除掉。多径衰落信道是指信号可以从多条路径到达接收机，信号不仅随距离衰减，而且有多径干扰存在。信号随距离衰减被称为慢衰落，而因为多径干扰引起的衰落被称为快衰落。

对于加性白高斯噪声信道，如果在某段时间内有较强噪声存在，则可能对信号形成干扰。除了采用信道编码，还可以使用交织技术，使突发干扰被分散，从而保证正确解码。

对于带限信道，如果输入一个方波信号，则在频域上被滤波，从而在时域上被扩展，从而形成码间干扰。可以对信号做些改变，就可以避免码间干扰。

多径衰落信道由于多径的存在，使得信号彼此叠加，以致难以识别。但是如果对信号进行扩频，使得信号时隙很小，且该时隙小于信号从不同路径到达接收机的时间差，则该信号就可以被解调。

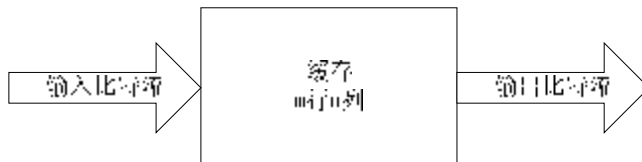
2.1 信号交织

交织器的作用就是让原先相关联的比特流变成无关联的比特流，从而达到时间分集的效果。所以交织器要让原先有关联的比特流转变成尽量毫无关联的比特流，而且交织输出的比特流越长就越能有效抵抗干扰。

交织器通常位于信道编码器与调制器之间，交织器可以分为分组交织器、卷积交织器两大类。分组交织器是输入比特流，经过交织后再输出。分组交织器输入的比特流是定长的，如果小于定长，一般可以补零来达到定长。而卷积交织器是在输入比特流的同时，交织、输出比特流，输入的比特流可以是不定长的。

2.1.1 分组交织器

分组交织器可以分为通用分组交织器、代数交织器、螺旋扫描交织器、矩形交织器、随机交织器等。分组交织器可以用如下图示表示：



当输入一定数量比特流到缓存后，按照预先设计的交织模式进行交织，然后输出比特流。

1 通用分组交织器

通用分组交织器可以将定长的输入比特流，按照一定的模式重新排列后再输出，所以要指定比特流的排列模式。

```
%Generate the input stream
```

```
s = randint(1, 10);
```

```
%Generante a random rearrangement pattern
```

```
pattern = randperm(10);
```

```
%The result
```

```
r = intrlv(s, pattern);
```

```
%The recovery
```

```
rs = deintrlv(r, pattern);
```

以上代码将输入比特流 s 按照排列模式 $pattern$ 重新排列后输出到比特流 r 。

2 代数交织器

代数交织器按照交不同交织算法的不同，可以分为 *takeshita-costello* 算法，*welch-costas*

算法。

Takeshita-costello 算法通过如下算式来计算输出位置:

$$(k(n-1)n/2)\bmod num$$

式中, k 是输入比特位置, num 是输入比特总数且必须是 2 的幂级数, k 是小于 num 的奇数。

welch-costas 算法通过如下算式来计算输出位置:

$$a^k \bmod (num+1)-1$$

a 是介于 1 到 num 的本原数, num 是输入比特总数。

以下代码分别用以上两种算法得到交织后的比特流。

```
num = 16;
s = randint(1, num);
rtc = algintrlv(s, num, 'takeshita-costello', 3, 5);
rwc = algintrlv(s, num, 'Welch-Costas', 14);
rtcs = algdeintrlv(rtc, num, 'takeshita-costello', 3, 5);
rwcs = algdeintrlv(rwc, num, 'Welch-Costas', 14);
```

3 螺旋扫描交织器

螺旋扫描交织器首先将比特流写入到 m 行 n 列的矩阵中, 然后从矩阵的左上角开始往右下角读取比特, 其移动顺序遵循以下两个算式:

$$\begin{aligned} r_{i+1} &= (r_i + h) \bmod m & r_0 &= 1 \\ c_{i+1} &= (c_i + 1) \bmod n & c_0 &= 1 \end{aligned}$$

式中, h 表示前移行数, 是大于 0 且小于行数 m 的整数。

```
num = 16;
s = randint(1, num);
r = helscanintrlv(s, 4, 4, 1);
rs = helscandintrlv(r, 4, 4, 1);
```

4 矩形交织器

矩形扫描交织器首先按行优先顺序将比特流写入到 m 行 n 列的矩阵中, 然后按列优先顺序将比特流输出。

```
num = 16;
s = randint(1, num);
r = matintrlv(s, 4, 4);
rs = matdeintrlv(r, 4, 4);
```

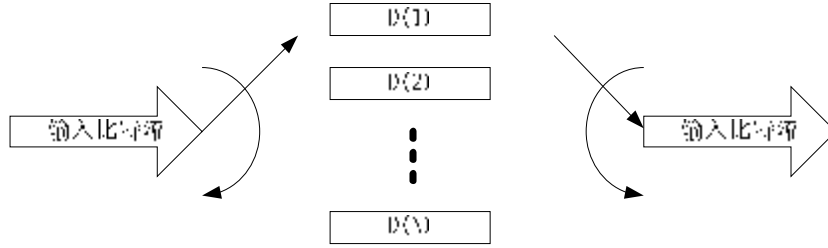
5 随机交织器

随机交织器利用随机数发生器生成排列模式。这是一种伪随机方式, 因为初始状态确定后, 整个随机序列就确定了。这个初始状态可以是任意数, 只要解交织时使用相同初始状态, 就可以正确解交织。

```
num = 16;
s = randint(1, num);
r = randintrlv(s, 0);
rs = randdeintrlv(r, 0);
```

2.1.2 卷积交织器

卷积交织器可以分为通用复用交织器、卷积交织器、螺旋交织器等三类。卷积交织器可以采用如下图示表示：



图中输入比特流依次输入到各个缓存 $D(i)$ 中， $D(i+1)$ 总比 $D(i)$ 多一定数量的寄存器，输出也是依次从各个缓存中输出。卷积交织器存在延迟，延迟对于不同的卷积方式是不同的。

1 通用复用交织器

通用复用交织器将输入比特依次输入到各行寄存器中，各行寄存器的宽度各不相同。每输入一个比特，寄存器就先移一位，输出寄存器最右边的比特到输出比特流。

```
num = 16;  
s = randint(1, num);  
delay = [0 1 2];  
r = muxintrlv(s, delay);  
rs = muxdeintrlv(r, delay);
```

由于延迟的存在，解交织器开始输出的比特并不是输入的比特，而是插入填充值，通常是零。这段填充值长度可以通过如下算式得到：

$$padding = length(delay) \cdot \max(delay)$$

例如上述代码中 $delay$ 的长度 3， $delay$ 的最大值是 2，所以会填充 6 个零在解交织输出的开始处。

2 卷积交织器

卷积交织器与上面的通用复用交织器实现方式基本相同，唯一的不同在于卷积交织器采用了寄存器行数 R 与行间寄存器差值 D 来定义，第 k 行的寄存器数等于 $(k-1)D$ 。

```
num = 16;  
s = randint(1, num);  
r = convintrlv(s, 3, 1);  
rs = convdeintrlv(r, 3, 1);
```

以上的代码定义了三行寄存器，每行比前一行多一个寄存器单元。其填充值的长度等于：

$$padding = R \cdot (R-1) \cdot D$$

计算可以得到上述填充值的长度为 6。

3 螺旋交织器

螺旋交织器

```
num = 16;  
s = randint(1, num);  
r = helintrlv(s, 4, 4, 1);  
rs = heldeintrlv(r, 4, 4, 1);
```


螺旋交织器填充值的长度可以用如下算式得到:

$$padding = col \cdot group \cdot \lceil step \cdot (col - 1) / group \rceil$$

2.2 脉冲成型

由于矩形脉冲在频域上可以无限扩展,所以当通过带限信道而被滤波后,变成一个带限信号,因而在时域上被扩展。当信号被扩展到相邻的码元时间内,就形成了码间干扰。既然带限信道是造成码间干扰的直接原因,那么为避免码间干扰,可以通过增大信道带宽来实现。然而信道带宽是有限而且宝贵的资源,所以只能在有限带宽下尽量避免码间干扰。奈奎斯特准则证明,通过对信号进行设计就可以在抽样点上避免码间干扰。

常用的无限冲激响应滤波器有 Butterworth 滤波器、Chebyshev I 型滤波器、Chebyshev II 型滤波器、椭圆滤波器。Butterworth 滤波器的幅度响应曲线在通带、阻带内都是单调变化的。Chebyshev I 型滤波器的幅度响应曲线在通带内是等波纹的,在阻带内是单调变化的。Chebyshev II 型滤波器的幅度响应曲线在通带内单调变化的,在阻带内是等波纹的。椭圆滤波器的幅度响应曲线在通带、阻带内都是等波纹变化的。而且在设计具有相同通带、阻带的滤波器时,Butterworth 滤波器、Chebyshev 滤波器、椭圆滤波器所需要的阶数是递减的。

下面用 Chebyshev II 型滤波器做一个带限信道,对相同频率的方波、正弦信号进行滤波。可以看到通过滤波器后,正弦信号波形没有明显改变,而方波波形却有很大的改变。

```
%The Sampling Frequency and Duration
fs = 1000;
t = 0:1/fs:1;

%The sine waveform and rectangular waveform
x = sin(2*pi*10*t);
d = 0:0.1:1;
y = 2*pulstran(t, d, 'rectpuls', 0.05)-1;

%Design a chebysheve II filter
%with pass band from 0 to 100 Hz, stop band form 200 Hz to infinite
obj = fdesign.lowpass(0.1, 0.2, 1, 80);
cf = cheby2(obj);
[b, a] = sos2tf(cf.sosMatrix);

%Filt the input data
rx = filter(b, a, x);
ry = filter(b, a, y);

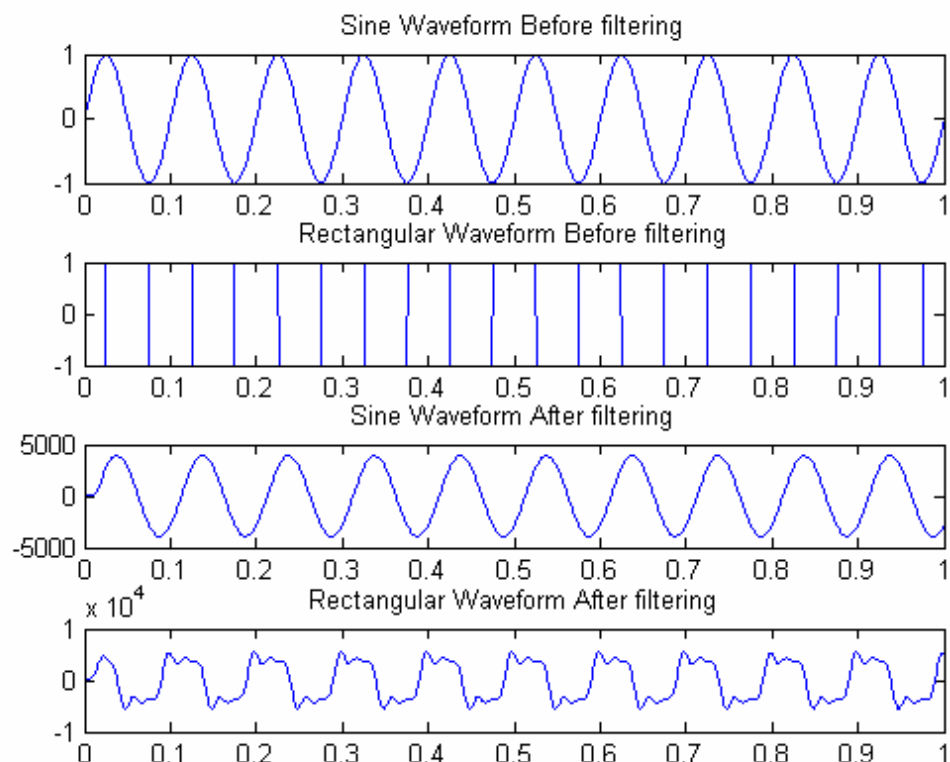
%Drawing
subplot(4, 1, 1);
plot(t, x)
title('Sine Waveform Before filtering');
subplot(4, 1, 2);
plot(t, y)
title('Rectangular Waveform Before filtering');
subplot(4, 1, 3);
```

```

plot(t, rx)
title('Sine Waveform After filtering');
subplot(4, 1, 4);
plot(t, ry)
title('Rectangular Waveform After filtering');

```

正弦、方波信号通过滤波器前后的波形如下：

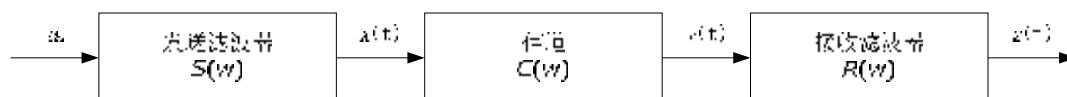


读者可以尝试通过改变这个低通滤波器的通带带宽来观察带宽对波形的影响。可以发现通带越窄，那么方波的畸变越厉害，也就说明通过增加带宽可以减轻码间干扰的影响。

2.2.1 奈奎斯特准则

通过前面的分析，已经清楚知道带限信道对发送信号的影响。奈奎斯特等研究带限信道情况下的信号发送后，提出了相应的准则来避免码间干扰的影响。在带限信道的情况下，遵循这些准则可以有效的避免码间干扰。

为得到奈奎斯特准则，首先需要建立一个简单的模型，其中包含发送滤波器、信道、接收滤波器三部分。



假设滤波器 $H(w)$ 是由以上三个滤波器级联而成，则这个滤波器可以用如下等式表示：

$$H(w) = S(w)C(w)R(w)$$

其时域的表达式用 $h(t)$ 表示，可以通过以上三个滤波器的卷积得到

$$h(t) = s(t) * c(t) * r(t)$$

也可以通过 $H(\omega)$ 的傅立叶逆变换得到，其等式如下：

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

接收信号可以认为是发送信号通过这个滤波器而得到的。假设发送的信号具有如下形式：

$$\sum_n a_n d(t - nT_s)$$

则通过该发送滤波器后，其输出为

$$x(t) = \sum_n a_n s(t - nT_s)$$

通过信道滤波器后，其输出为

$$y(t) = \sum_n a_n h_{cs}(t - nT_s)$$

其中

$$h_{cs}(t) = s(t) * c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) c(t-t) dt$$

通过接收滤波器后，其输出为

$$z(t) = \sum_n a_n h(t - nT_s)$$

若在 $t = kT_s + t$ 对 $z(t)$ 抽样，可得

$$z(kT_s + t) = \sum_n a_n h(kT_s - nT_s + t)$$

其等价表示为

$$z_k = \sum_n a_n h_{k-n} = a_k + \sum_{n \neq k} a_n h_{k-n}$$

a_k 表示在第 k 个抽样时刻期望的输出，那么 $\sum_{n \neq k} a_n h_{k-n}$ 就是码间干扰。所以为避免码间

干扰，对于其中的任何信号 a_n ，应该满足如下条件：

$$h(t - nT_s) = \begin{cases} 1 & t = nT_s \\ 0 & t \neq nT_s \end{cases}$$

即对于 $h(t)$ 应该有

$$h(nT_s) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

而

$$\begin{aligned} h(nT_s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega nT_s} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_i \int_{(2i-1)\pi/T_s}^{(2i+1)\pi/T_s} H(\omega) e^{j\omega nT_s} d\omega \end{aligned}$$

令 $w = w' + 2ip/T_s$

$$\begin{aligned} h(nT_s) &= \frac{1}{2p} \sum_i \int_{-p/T_s}^{p/T_s} H(w' + 2ip/T_s) e^{jw'nT_s} e^{j2ipn} dw' \\ &= \frac{1}{2p} \sum_i \int_{-p/T_s}^{p/T_s} H(w' + 2ip/T_s) e^{jw'nT_s} dw' \\ &= \frac{1}{2p} \int_{-p/T_s}^{p/T_s} \sum_i H(w' + 2ip/T_s) e^{jw'nT_s} dw' \\ &= \frac{T_s}{2p} \int_{-p/T_s}^{p/T_s} \frac{1}{T_s} \sum_i H(w' + 2ip/T_s) e^{jw'nT_s} dw' \end{aligned}$$

利用傅立叶级数公式，并用 w 代替 w' 可得：

$$\sum_i H(w + 2ip/T_s) = T_s \sum_n h(nT_s) e^{-jwnT_s}$$

因为 $\sum_n h(nT_s) = 1$ ，代入上式可得：

$$\sum_i H(w + 2ip/T_s) = T_s \quad |w| \leq p/T_s$$

这就是奈奎斯特准则，其含义是用宽度 $2p/T_s$ 等分 $H(w)$ ，然后各个部分叠加到区间 $[-p/T_s, p/T_s]$ ，则在该区间应该得到个常量。如果 $H(w)$ 是宽度为 $1/T_s$ 的理想滤波器，显然是满足该等式。因为 $|w| \leq p/T_s$ ，而 $w = 2pf$ ，所以可以得到 $|f| \leq 1/2T_s$ 。这里 $1/2T_s$ 被称为奈奎斯特带宽， T_s 被称为奈奎斯特间隔。

假设存在一个理想滤波器，则当以 T_s 抽样 M 进制输入信号时，发送该信号的带宽为 $1/2T_s$ ，则频带利用率 $\log_2^M \cdot (1/T_s)/(1/2T_s) = 2 \log_2^M$ b/s/Hz。这是在抽样无失真的情况下，系统所能达到的最高频带利用率。

下面假设方波通过一个理想滤波器，来观察一下在各个抽样点上，抽样值是否与输入值相同，代码如下。

```
%Sampling Frequency & Time Duration
fs = 1000;
t = 0:1/fs:1;

%Generate rectangular waveform
d = 0:0.1:1;
x = 2*pulstran(t, d, 'rectpuls', 0.05)-1;

%Generate ideal filter
tx = -1:1/fs:1;
y = sinc(fs*tx);
```

```

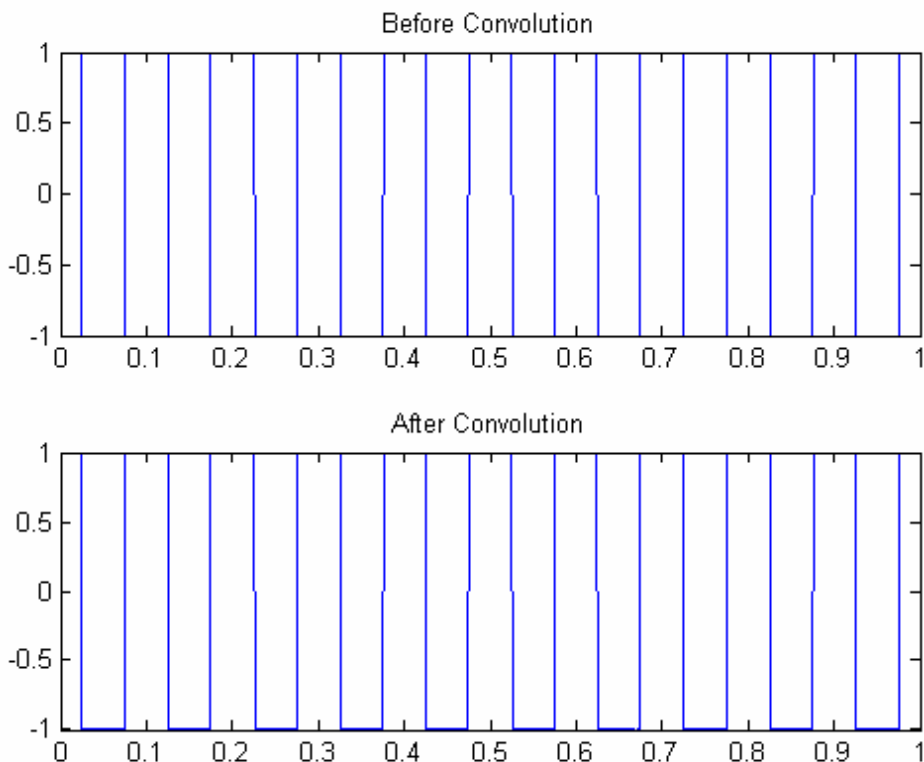
% Convolution
r = conv(x, y);

%Judge the input & output equivalency
isequal(int8(x), int8(r(1001:2001)));

%Drawing
subplot(2, 1, 1);
plot(t, x);
title('Before Convolution');
subplot(2, 1, 2);
plot(t, r(1001:2001));
title('After Convolution');
axis tight

```

通过运行以上代码，可以发现在通过理想滤波器前后，各个抽样点上的输入值与输出值是完全一样的。其图示如下：



从图上可以看到卷积前后，波形几乎一样。

2.2.2 升余弦滤波器

由于理想滤波器是在频率上是有限带宽，而且过渡带宽为 0，那么在时域上无限延展的，所以理想滤波器并不存在。在工程实践中广泛使用的升余弦滤波器，因为该滤波器不仅满足奈奎斯特准则，而且可以通过改变滚降系数来逼近理想滤波器。因为该滤波器时域波形近似与余弦信号，但是中心部分向上升起，所以被称为升余弦滤波器。

升余弦滤波器在时域的表达式如下：

$$h(t) = \frac{\sin(pt/T_s)}{pt/T_s} \cdot \frac{\cos(apt/T_s)}{1 - 4(at/T_s)^2}$$

其频率表达式为：

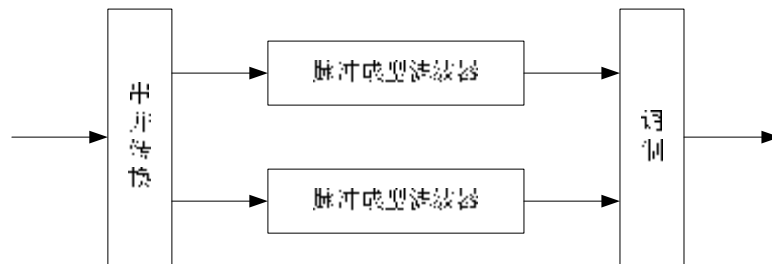
$$H(f) = \begin{cases} T_s & 0 \leq |f| \leq \frac{1-a}{2T_s} \\ \frac{T_s}{2} \left[1 + \cos \left[\frac{p(2T_s|f| - 1 + a)}{2a} \right] \right] & \frac{1-a}{2T_s} \leq |f| \leq \frac{1+a}{2T_s} \\ 0 & |f| > \frac{1+a}{T_s} \end{cases}$$

这里 $a = W_1/W_2$ ， a 被称为滚降系数，取值范围从 0 到 1。 W_1 是额外带宽，范围从奈奎斯特频率到截止频率。 W_2 是奈奎斯特带宽，范围从 0 到奈奎斯特频率。

由前面的分析可以知道， $H(f)$ 是发送滤波器、信道滤波器、接收滤波器频域相乘的结果。如果信道是理想情况，即 $C(f) = 1$ ，那么发送滤波器、接收滤波器应该如何表示呢？

这时因为 $C(f) = 1$ ，所以 $H(f) = S(f)R(f)$ 。如果 $S(f)$ 、 $R(f)$ 是复共轭的，即 $S(f) = |G(f)|e^{-j2\pi ft}$ ， $R(f) = S^*(f) = |G(f)|e^{j2\pi ft}$ ，则 $S(f)R(f) = |G(f)|^2$ ，所以可以得到 $H(f) = |G(f)|^2$ ，那么 $G(f) = \sqrt{|H(f)|}e^{-j2\pi ft}$ ，这里 $G(f)$ 被称为平方根升余弦滤波器，也就是发送滤波器的表达式。

例如，在 WCDMA 的 3GPP TS 25.213 协议就有如下图示：



这里的脉冲成型滤波器就是平方根升余弦滤波器。该滤波器滚降系数为 0.22，表达式为：

$$s(t) = \frac{\sin\left(p \frac{t}{T}(1-a)\right) + 4a \frac{t}{T} \cos\left(p \frac{t}{T}(1+a)\right)}{p \frac{t}{T} \left(1 - \left(4a \frac{t}{T}\right)^2\right)}$$

下面利用 Matlab 来仿真平方根升余弦滤波器，滚降系数为 0.22，其代码如下：

```
%Parameters
Delay = 3; Fs = 8; Fd = 1;
```

```

%Generate random data
a = randsrc(20, 1, [], 1245);

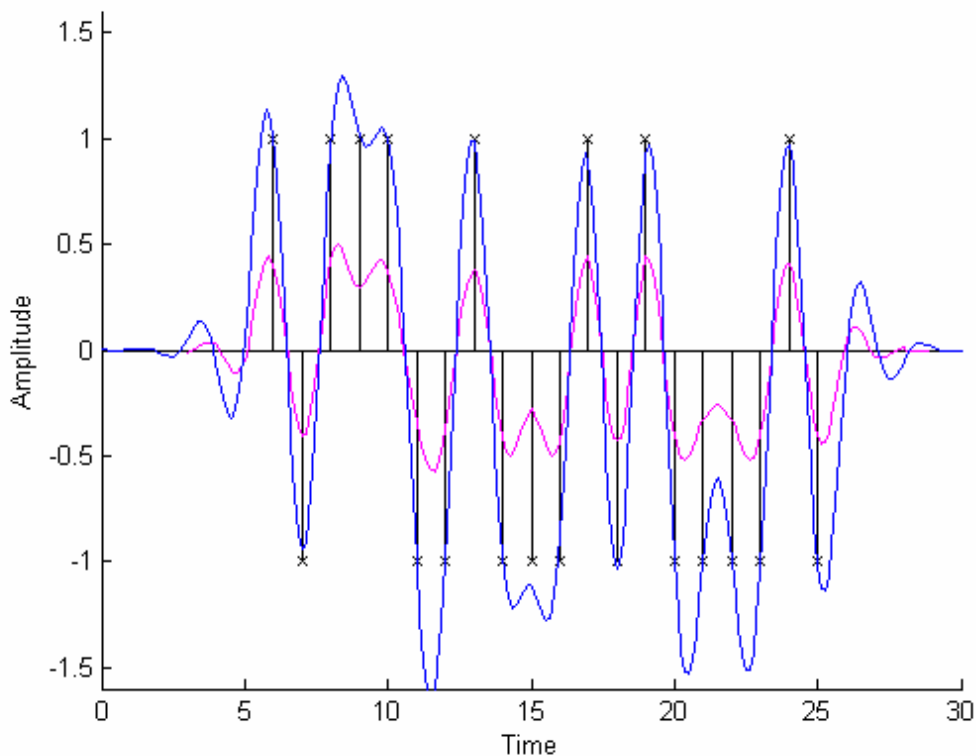
%Construct root-raised cosine filter with roll-off 0.22
[num, den] = rcosine(Fd, Fs, 'fir/sqrt', .22, Delay);
%Transmitter filter
[x, tx] = rcosflt(a, Fd, Fs, 'filter', num);
%Receiver filter
[z, tz] = rcosflt(x, Fd, Fs, 'filter/Fs', num);

%Compensate the delay
PropD = Delay * Fd;
ta = [PropD: PropD + 20 - 1] ./ Fd;
tx = tx + Delay .* Fd;
ta = ta + Delay .* Fd;

%Drawing
stem(ta, a, 'kx'); hold on;
plot(tx, x, 'm-', tz, z, 'b-'); hold off;
axis([0 30 -1.6 1.6]);
xlabel('Time'); ylabel('Amplitude');

```

其图形如下，其中洋红色曲线是发送滤波器的输出波形，蓝色曲线是接收滤波器的输出波形。



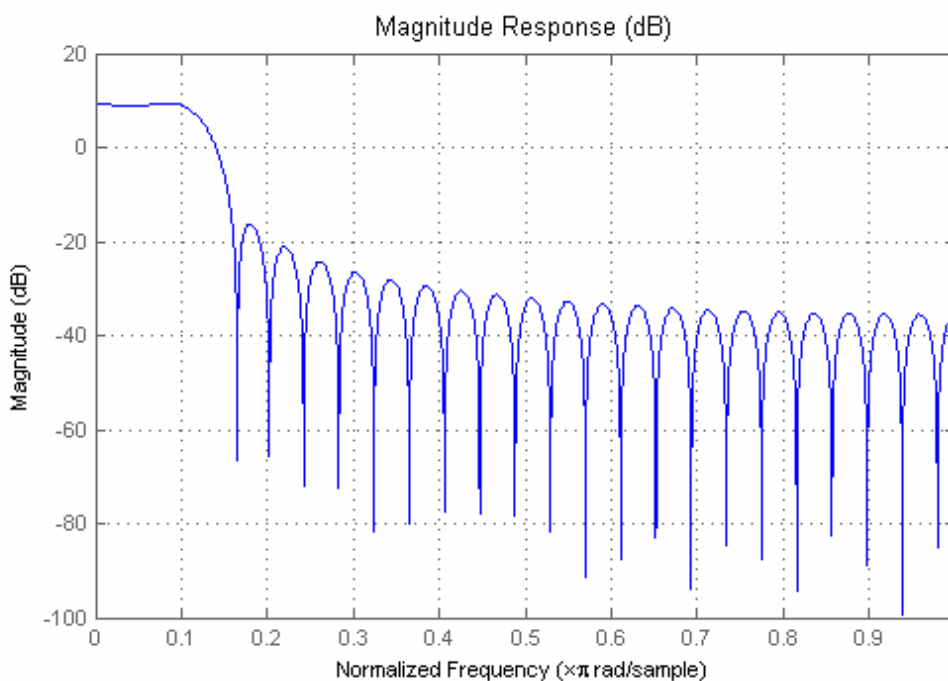
可以看到通过两个平方根滤波器后，输出数据在采样点上基本上没有失真，从而消除了

码间干扰的影响。

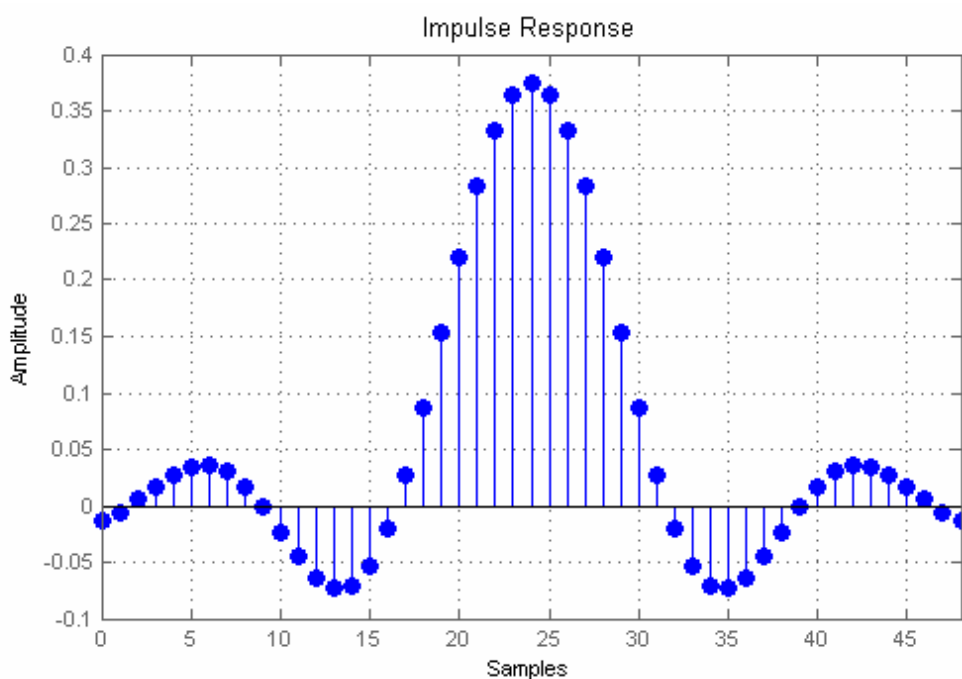
另外可以利用如下代码来观察平方根滤波器的时域、频域特性。

```
fvtool(num, den)
```

其幅频响应曲线如下：



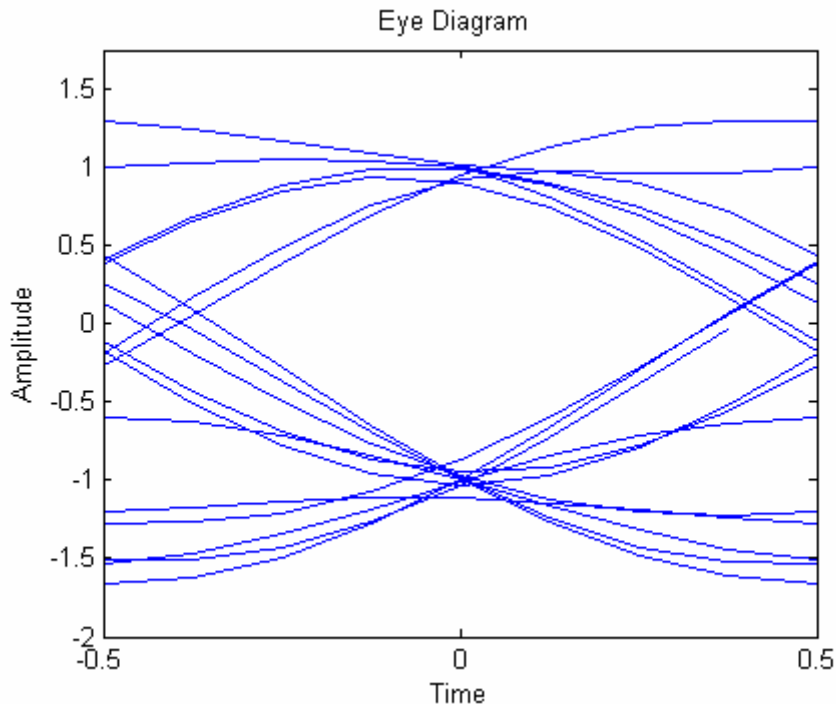
冲激响应曲线如下：



为方便观察分析接收滤波器的输出信号，通常采用眼图来表示。例如对上面接收滤波器的输出可以用如下代码来观察

```
eyediagram(z(49:188), 8)
```

其输出波形为



对于眼图需要做以下说明：

一：从抽样时间（横轴）上看，最优判决时刻应该是图中上下曲线间距最大的时刻，例如上图中 0 时刻上下曲线有最大间距。

二：从抽样时间（横轴）上看，左右两边交汇点到 0 时刻的时间差值表明了对定时误差的灵敏度，曲线越陡峭对定时误差越敏感。交汇点到边界的时间差值表明了过零点失真。例如上图中对定时误差的灵敏度约为 0.4，过零点失真约为 0.1。

三：从幅度（纵轴）上看，上、下曲线到中心 0 点的距离称为噪声容限，也表明其抗噪声能力。另外，上、下曲线在 0 时刻并没有交互成一个点，而是有多个取值，其中最小、最大数值的差值被称为峰值失真。例如上图中噪声容限约为 0.9，峰值失真约为 0.2。

2.2.3 部分响应

由前面的分析可以知道利用升余弦滤波器必须扩展带宽，扩展程度可以通过滚降系数来衡量，带宽扩展意味着频带利用率下降。是否有方法可以提高频带利用率呢？

可以在相同的带宽下，引入可控的码间干扰来达到该目的，这就是奈奎斯特第二准则。在某些码元抽样时刻引入码间干扰，而在其余码元抽样时刻无码间干扰，那么就可以提高频带利用率。

假设信道是理想带限信道，并且存在这样的发送、接收滤波器，使得：

$$h(nT_s) = \begin{cases} 1 & n = 0,1 \\ 0 & n \neq 0,1 \end{cases}$$

那么满足该条件的滤波器在时域可以认为是两个 sinc 波形组合而成。

```
t = 0:0.001:2;
```

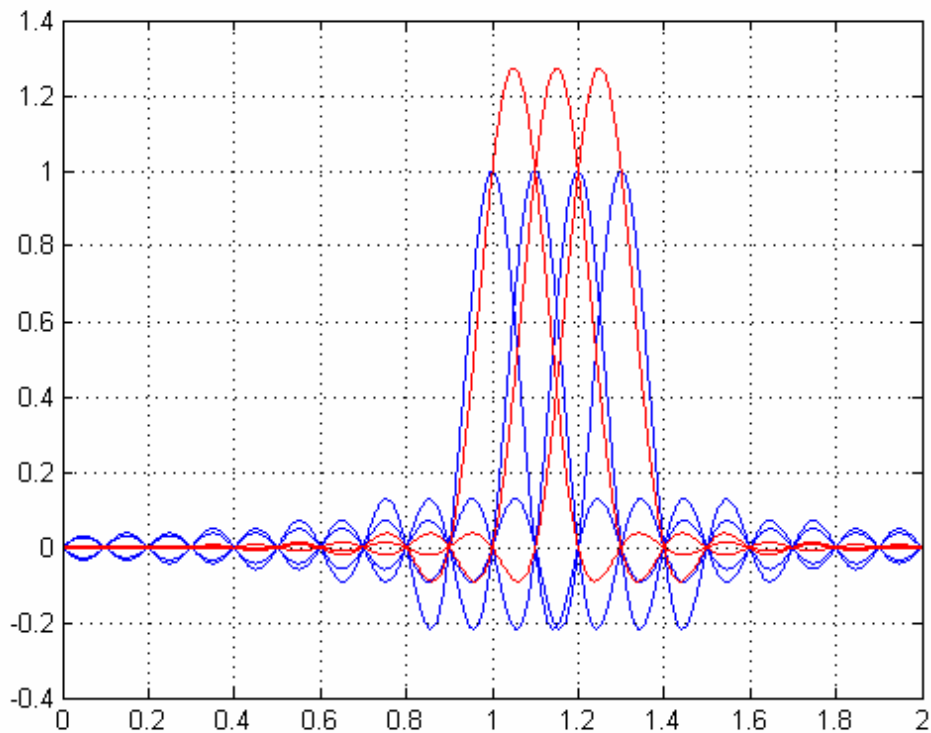
```
x1 = sinc(10*(t-1));
x2 = sinc(10*(t-1.1));
x3 = sinc(10*(t-1.2));
x4 = sinc(10*(t-1.3));
```

```

plot(t, x1); hold on;
plot(t, x2);
plot(t, x3);
plot(t, x4);
plot(t, x1+x2, 'r');
plot(t, x2+x3, 'r');
plot(t, x3+x4, 'r'); hold off;
grid

```

其图形如下，其中红色曲线是叠加后的波形，被称为双二进制信号，图中有三个双二进制信号。



双二进制信号时域的表达式如下：

$$h(t) = \frac{\sin pt/T_s}{pt/T_s} + \frac{\sin p(t-T_s)/T_s}{p(t-T_s)/T_s}$$

其频域表达式如下：

$$H(f) = \begin{cases} 2T_s \cos pfT_s & |f| \leq \frac{1}{2T_s} \\ 0 & |f| > \frac{1}{2T_s} \end{cases}$$

观察双二进制信号波形可以知道，其一旁瓣衰减很快，比 sinc 波形要快很多。其二在抽样时刻，双二进制信号与前后波形存在码间干扰，但是与其它信号不存在码间干扰。

除了双二进制信号脉冲波形，还有以下这些波形可用：

$$\begin{aligned}
1. \quad h(t) &= \frac{\sin pt/T_s}{pt/T_s} + 2 \frac{\sin p(t-T_s)/T_s}{p(t-T_s)/T_s} + \frac{\sin p(t-2T_s)/T_s}{p(t-2T_s)/T_s} \\
2. \quad h(t) &= 2 \frac{\sin pt/T_s}{pt/T_s} + \frac{\sin p(t-T_s)/T_s}{p(t-T_s)/T_s} - \frac{\sin p(t-2T_s)/T_s}{p(t-2T_s)/T_s} \\
3. \quad h(t) &= \frac{\sin pt/T_s}{pt/T_s} - \frac{\sin p(t-2T_s)/T_s}{p(t-2T_s)/T_s} \\
4. \quad h(t) &= \frac{\sin pt/T_s}{pt/T_s} + 2 \frac{\sin p(t-2T_s)/T_s}{p(t-2T_s)/T_s} - \frac{\sin p(t-4T_s)/T_s}{p(t-4T_s)/T_s}
\end{aligned}$$

由于相邻双二进制信号间存在码间干扰，假设在第 n 个抽样时刻抽样值为 B_n ，其取值可以是 $0, \pm 2$ 。 B_n 该值可以认为等于 $I_n + I_{n-1}$ ， $I_n = \pm 1$ 。 I_{n-1} 对应在第 $n-1$ 个抽样时刻发送的码元，那么就可以通过计算得到 $I_n = B_n - I_{n-1}$ 对应当前时刻发送的码元，如此循环就可以计算出发送序列。但是由于 I_n 依赖与 I_{n-1} ，所以当 I_{n-1} 计算错误后，这个错误就可以被传播下去，从而导致整个译码序列错误。

为了避免这个错误传播，可以在发送端采用预编码方法。假设发送二进制码元序列 a_n ，令通过模 2 加法可以得到 $a_n = b_n \oplus b_{n-1}$ ，也就是 $b_n = a_n \oplus b_{n-1}$ 。将 b_n 映射成 I_n ，当 $b_n = 0$ 时， I_n 等于 -1 ，当 $b_n = 1$ 时， I_n 等于 $+1$ ，即 $I_n = 2b_n - 1$ 。由前面的叙述可以知道

$$\begin{aligned}
B_n &= I_n + I_{n-1} \\
&= 2b_n - 1 + 2b_{n-1} - 1 \\
&= 2(b_n + b_{n-1} - 1) \\
&= 2(a_n - 1)
\end{aligned}$$

所以

$$a_n = \frac{B_n}{2} + 1$$

这样就可以 I_n 与 I_{n-1} 的依赖关系。下面通过例子来说明：

```

%define data length
len = 100;

%Generate the data
a = randint(len, 1, 2);

%Calculate the b

```

```

b = zeros(len+1, 1);
for n = 2 :len+1
    b(n) = bitxor(b(n-1), a(n-1));
end

%Calculate the I
I = 2*b - 1;

%Calculate the B
B = zeros(10, 1);
for n = 1 :len
    B(n) = I(n)+I(n+1);
end

%Decode
ar = mod(B/2 + 1, 2);

%Judge the equality
isequal(a, ar)

```

其输出结果总是 true，所以表明通过该方法可以完成解码并且消除码元间判断的依赖关系。

2.3 扩频序列

本节主要讨论多径衰落信道环境下的信号设计。由于无线信号传播方向可以是任意的，同时发送的无线信号可以通过不同路径到达接收机，其到达的时刻是不同的。信号到达接收机可以是直射路径、反射路径、衍射路径等。

假设发送的信号波形如下：

$$s(t) = A \cos(\omega t + f)$$

其中 A 是信号幅度，这里假设信号幅度不变，通常信号幅度衰减与传输距离的平方成正比。那么通过延时 t 到达接收机的信号波形为

$$r(t) = A \cos(\omega t + f'), f' = f + \omega t$$

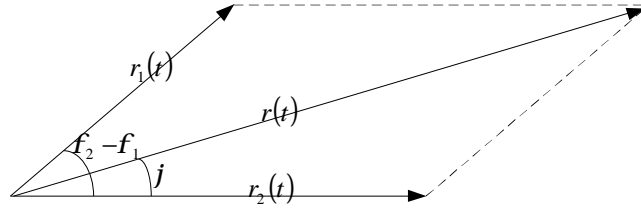
这里 f' 是到达接收机的信号相位，可以看到 f' 是延时 t 的函数。由于信号通过不同路径到达接收机，所以延时 t 是不同的。如果通过不同路径到达接收的两个信号具有相同相位，那么在该时刻信号强度被增强；如果具有相反的相位，那么该时刻信号强度被衰减。同相位、反相位的出现是随机的，所以多径干扰就是因为不同路径信号彼此随机干扰而形成的。

如果能让不同路径信号间彼此完全独立，那么就可以避免多径干扰的形成。分析一种最简单的情况，假设有两个信号同时到达接收机

$$r_1(t) = A \cos(\omega t + f_1), f_1 = f + \omega t_1$$

$$r_2(t) = A \cos(\omega t + f_2), f_2 = f + \omega t_2$$

那么信号可以采用矢量法合成为一个信号，采用图示法表示信号合成如下：



这里

$$r(t) = \bar{A} \cos(\omega t + j)$$

$$\bar{A} = A\sqrt{2(1 + \cos(f_2 - f_1))}$$

所以可以得到信号 $r(t)$ 的功率

$$P = \bar{A}^2 = 2A^2(1 + \cos(f_2 - f_1))$$

$$= 2A^2(1 + \cos(\omega(t_2 - t_1)))$$

所以可以看到接收信号的功率与延时差值是有关系的。信号 $r(t)$ 的功率也可以表示成

$$P = E[r_1(t) + r_2(t)]^2 = E[r_1^2(t)] + E[r_2^2(t)] + 2E[r_1(t)r_2(t)]$$

$$= 2A^2 \left(1 + \frac{R(t_2 - t_1)}{R(0)} \right)$$

香农提出假设：在高斯信道上，最佳传输信号形式是具有白噪声统计特性的信号。对于具有白噪声统计特性的信号其自相关函数有

$$\begin{cases} R(t) \neq 0, & t = 0 \\ R(t) = 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

代入功率计算公式，可得

$$P = \begin{cases} 4A^2 & t = 0 \\ 2A^2 & t \neq 0 \end{cases}$$

这样即使在多径环境下，依然可以解调，没有多径干扰存在。由于理想白噪声信号是不可能工程中用于传输信号，所以采用近似白噪声信号的伪噪声信号来模拟白噪声信号。伪噪声信号可以在发送端生成，而在接收端被解码，实际上是可以被控制的，而生成的序列很近似噪声序列。伪噪声信号应该具有如下的自相关函数

$$R_{PN} = \begin{cases} A^2 \left(1 - \frac{|t|}{T} \right) & |t| < T \\ 0 & |t| \geq T \end{cases}$$

代入功率计算公式，可得

$$P = \begin{cases} 2A^2(2 - |t|/T) & |t| < T \\ 2A^2 & |t| \geq T \end{cases}$$

这与理想白噪声信号功率比较接近，所以伪噪声信号应该具有以下性质：

1. 从时域上看，各个分量出现的数量是很接近的，即各个分量是等概率出现的。

2. 从相关上看, 伪噪声信号具有双值自相干函数, 而互相关函数近似于零。

在工程上, 通常用 $\{0, 1\}$ 来产生伪噪声序列, 然后将 0 映射成 -1, 1 映射成 +1。设 x, y 是两个伪噪声序列, 且伪噪声序列具有相等的长度 L 。那么伪噪声序列的互相关函数:

$$R_{xy} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L x_i y_i = \frac{A-D}{L}$$

自相关函数

$$R_x(j) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L x_i x_{i+j} = \frac{A-D}{L}$$

这里 A 是对应位置相同码元总数, D 是对应位置不同码元总数。对于自相关函数, 当 j 等于 0 时, 所有对应位置码元相同, 没有不相同的码元, 所以 $A = L, D = 0$, 这样 $R_x(0) = 1$,

这也符合前面的描述。当 j 不等于 0 时, 根据 $R_x(j)$ 的不同, 伪噪声序列可以分为两类。

1. 当伪噪声序列的自相关函数具有如下形式

$$R_x(j) = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ -1/L & j \neq 0 \end{cases}$$

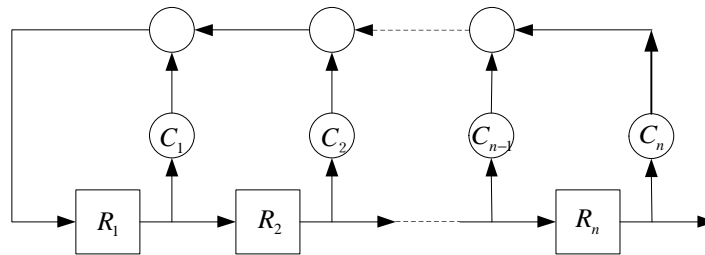
则该序列被称为狭义伪噪声序列。

2. 当伪噪声序列的自相关函数具有如下形式

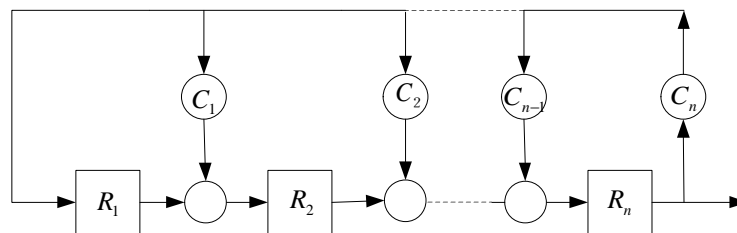
$$R_x(j) = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ a < 1 & j \neq 0 \end{cases}$$

则该序列被称为广义伪噪声序列。

伪噪声序列的生成通常采用移位寄存器来实现, 移位寄存器可以有不同的连接方式。例如线性反馈结构、非线性反馈结构、非线性前馈结构等。其中线性反馈结构又可以分为简单式移位寄存器结构、模块式移位寄存器结构。简单式移位寄存器结构如下:



模块式移位寄存器结构如下:



图中 R 代表寄存器。 C 代表系数, 该值可以是 0, 也可以是 1, 当等于 0 表明断开连接,

等于 1 表明闭合连接，其中 C_n 恒等于 1。不管采用哪种结构，其特征多项式可以表示成：

$$f(x) = 1 + c_1x + c_2x^2 + \dots + x^n$$

对于线性反馈寄存器具有如下性质：

1. 如果移位寄存器的系数 C 有奇数个等于 1，那么该移位寄存器不会生成最大长度序列。如果系数 C 有偶数个等于 1，那么该移位寄存器有可能生成最大长度序列。
2. 如果线性反馈移位寄存器产生序列 a 、 b ，那么 $a+b$ 也可以由该移位寄存器产生。
3. 如果线性反馈移位寄存器的系数 C_i 等于 1，而另一个线性反馈移位寄存器的系数 C_{n-i} 等于 1，那么两个线性反馈移位寄存器产生的最大长度序列互为镜像。

当寄存器个数是 n ，生成的序列长度为 $2^n - 1$ ，那么该序列被称为最大长度序列，最大长度序列又称为 m 序列，下面来分析 m 序列的特性、编解码方法。

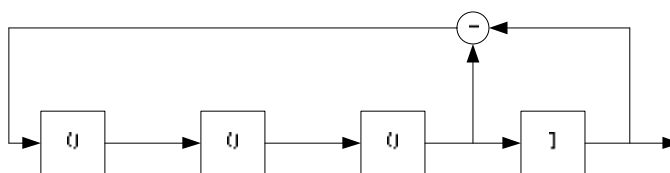
2.3.1 m 序列

m 序列具有如下特性：

1. m 序列中 1 的个数比 0 多一个，1 的个数为 2^{n-1} ，0 的个数为 $2^{n-1} - 1$
2. 某个 m 序列与其它 m 序列的模 2 加仍然得到个 m 序列，这些 m 序列可以用同一个线性反馈移位寄存器得到。
3. 周期为 $2^n - 1$ 的 m 序列，其游程总数为 2^{n-1} 。当 $1 \leq k \leq n - 2$ 时，游程长度等于 k 的游程数量为 2^{n-k-1} ，此外还有一个长度为 $n - 1$ 的 0 游程，长度为 n 的 1 游程。
4. m 序列的自相关函数是双值函数，其归一化自相关函数是

$$R(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ -\frac{1}{p} & t \neq 0 \end{cases}$$

假设 m 序列具有特征多项式为 $f(x) = 1 + x^3 + x^4$ ，其结构图、初始状态下图所示，



那么来观察一下该 m 序列是否具有以上性质：

```
r = [1, 0, 0, 0];
```

```
for n = 1 : 16
```

```
    o(n) = r(1);
```

```
    tmp = xor(r(1), r(2));
```

```
    r = [r(2:4), xor(r(1), r(2))];
```

```
end
```

```

s = o(2:16);

r = [0 1 0 0];

for n = 1 :16
    o2(n) = r(1);
    tmp = xor(r(1), r(2));
    r = [r(2:4), tmp];
end
s2 = o2(2:16);

R0 = sum((2*s-1).*(2*s-1))/15;
R1 = sum((2*s-1).*(2*s2-1))/15;

```

生成的 s 是 000100110101111，其中 1 有 8 个，0 有 7 个，符合特性 1。其中有 8 个游程，其分布符合特性 3。 R_0 等于 1， R_1 等于 -1/15，符合特性 4。

第三章 调制技术

前面讨论了信号在发送前的设计，本章将讨论信号的发送。通常做为信号发送的载波信号可以表示成

$$s(t) = a(t)\sin(2\pi ft + f)$$

式中 $a(t)$ 表示幅度， f 是频率， f 是相位，所以对载波信号可以改变的就是以上三个变量。根据改变变量的不同，可以分为幅度调制、频率调制、相位调制三大类型。

通过以上叙述可以知道，作为载波信号的是正弦信号，这是比较传统的载波信号。最近一种新的载波信号发送技术出现了，这就是超宽带通信技术，载波信号是持续时间超短的脉冲信号，对于超宽带通信，本书暂不讨论。

3.1 幅度调制

3.1.1 BASK

本节主要讨论幅度调制技术，从最简单的二进制幅度调制开始。设发送信号表示成：

$$s(t) = a_n g(t) \cos \omega t$$

这里 a_n 等于 0 或者 1。 $g(t) = \sum_n g(t - nT_s)$ 是基带信号波形，例如矩形波信号、或者通过脉冲成型滤波器后的输出信号。

假设在 1 秒内传送 10 个比特，那么代码如下：

```
%one second
t = 0 : 1/1e3 : 0.999;

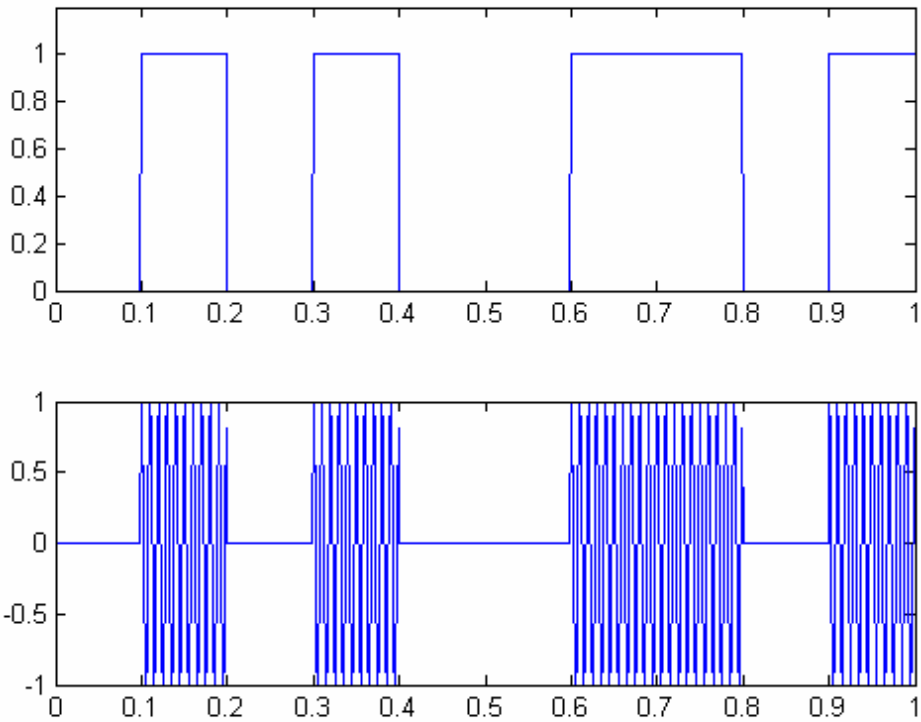
%Ten random
a = randint(1, 10, 2);

%Ten rectanglure waveform
g = ones(1, 100);
g = [g, g, g, g, g, g, g, g, g, g];

%Binary amplitude modulation
s = a(ceil(10*t+0.01)).*g.*cos(2*pi*100*t);

%Drawing
subplot(2, 1, 1);
plot(t, a(ceil(10*t+0.01)));
axis([0, 1, 0, 1.2]);
subplot(2, 1, 2);
plot(t, s);
```

输出波形如下：



从频域上看，余弦信号是在特定频率上的冲激信号，而矩形信号是 sinc 波形。因为时域的相乘等价于频域的卷积操作，所以可以认为矩形信号在频域上做了平移，从 0 平移到 f_c （例如上例， f_c 等于 100）。对时域表达式做傅立叶变换得：

$$S(f) = \frac{a}{2} [G(f - f_c) + G(f + f_c)]$$

这里 $G(f)$ 是 $g(t)$ 在频域的表达式。在这种调制方式下，调制信号的特征是双边带载波抑制。因为调制信号的频谱由两个边带组成，当 $|f| < |f_c|$ 被称为下边带，当 $|f| > |f_c|$ 被称为上边带，两个边带具有相同的信息，而且调制信号的频谱中不含有任何载波成分。

下面代码生成的波形就可以清楚看到矩形信号在频域是以 f_c 为对称中心的 sinc 波形。

```
%Cosine & BASK waveform
t = 0 : 1/1e3 : 0.999;
a = [1 0 1 0 1 0 1 0 1 0];
g = ones(1, 100);
g = [g, g, g, g, g, g, g, g, g, g];
s1 = cos(2*pi*100*t);
s2 = a(ceil(10*t+0.01)).*g.*cos(2*pi*100*t);

%Calculate the power spectrum
f = 1000*(0:256)/512;
```

```

S1 = fft(s1,512);
Pss1 = S1.* conj(S1) / 512;
S2 = fft(s2,512);
Pss2 = S2.* conj(S2) / 512;

```

```

%Drawing
subplot(2, 1, 1);
plot(f,Pss1(1:257));

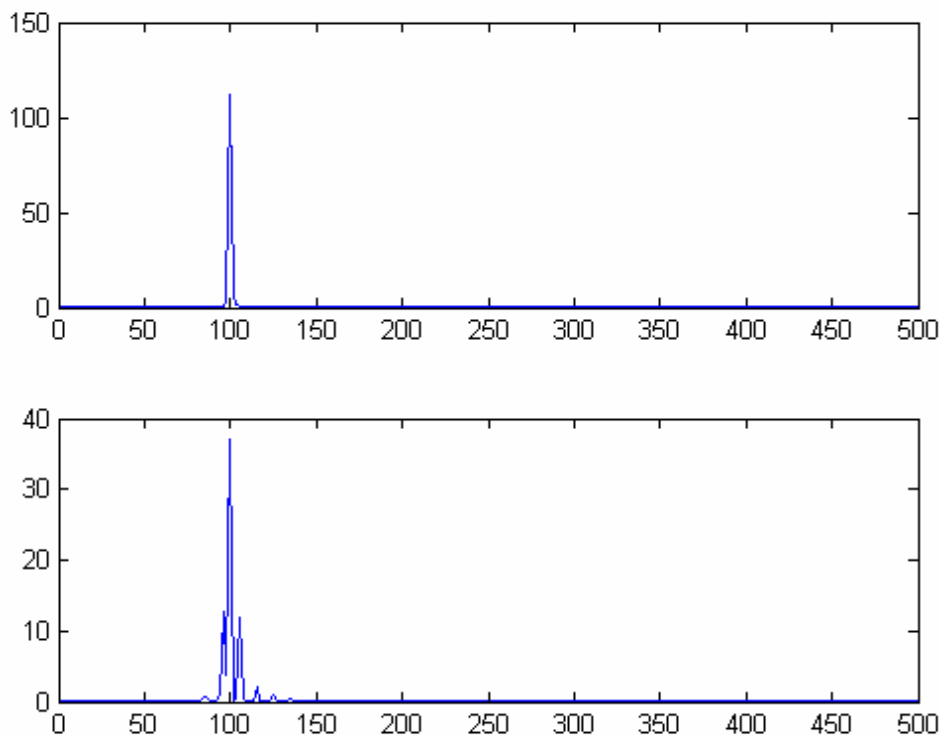
```

```

subplot(2, 1, 2);
plot(f,Pss2(1:257));

```

生成的对比波形如下：



可以看到余弦信号的中最大值在心频率，然后迅速衰减，而二进制振幅调制信号的衰减却是按 sinc 波形波动的。这里二进制振幅调制的输入比特流按 1、0 依次变化，从而得到上面的第二个波形。如果输入比特流是恒定值，那么显然要么是上面的第一个波形当输入比特流恒为 1，要么没有波形当输入比特恒为 0。

因为双边带具有相同的信息，为了节约带宽，可以通过希尔伯特变化将带宽减少到双边带调幅的一半，这种调幅方式被称为单边带调幅。

为了得到单边带调幅信号，最为直观的做法就是通过理想带通滤波器滤除上边带，或者通过理想带阻滤波器滤除下边带。但是没有过渡带的理想滤波器是难以实现的，所以通常不采用滤波器的方法来实现单边带滤波，而是采用移相的方法，也就是通过希尔伯特变换来实现单边带调制。

希尔伯特在时域的表达式为：

$$h(t) = \frac{1}{pt}$$

频域表达式为：

$$H(f) = -j \operatorname{sgn}(f)$$

由其频域表达式可知希尔伯特滤波器的幅度为常数 1，相位为 $-\pi/2$ 当 $f > 0$ ， $\pi/2$ 当 $f < 0$ 。

令 $\hat{g}(t) = g(t) * h(t)$ ，则上单边带调幅信号可以表示为：

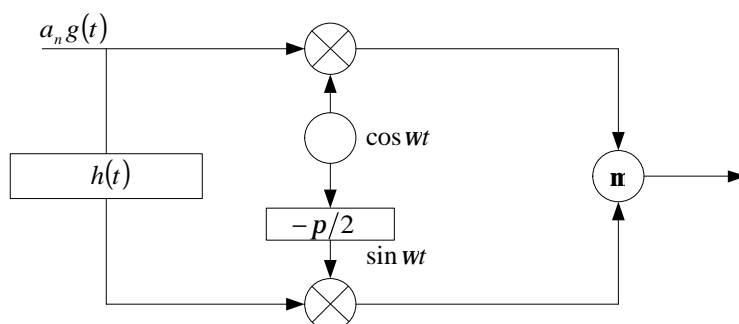
$$s_u(t) = (a_n g(t) \cos \omega t - a_n \hat{g}(t) \sin \omega t) / 2$$

下边带调幅信号为

$$s_l(t) = (a_n g(t) \cos \omega t + a_n \hat{g}(t) \sin \omega t) / 2$$

可以看到上下边带调幅信号相加就是双边带信号。

单边带调幅信号的生成的框图如下：



如果是周期信号，那么希尔伯特变换可以用 $-\pi/2$ 移相来代替，基于这个假设来观察如

下代码所得结果

```
%Time and random
t = 0 : 1/1e3 : 0.999;
a = [1 0 1 0 1 0 1 0 1 0];

% random sequence & -pi/2 phase shift
A = a(ceil(10*t+0.01));
A1 = [zeros(1, 5), A(1:995)];

%Generate Upper side band & lower side band
g = ones(1, 100);
g = [g, g, g, g, g, g, g, g, g, g];
su = (A.*g.*cos(2*pi*100*t) - A1.*g.*sin(2*pi*100*t))/2;
sl = (A.*g.*cos(2*pi*100*t) + A1.*g.*sin(2*pi*100*t))/2;

%Calculate the Power Spectrum
```

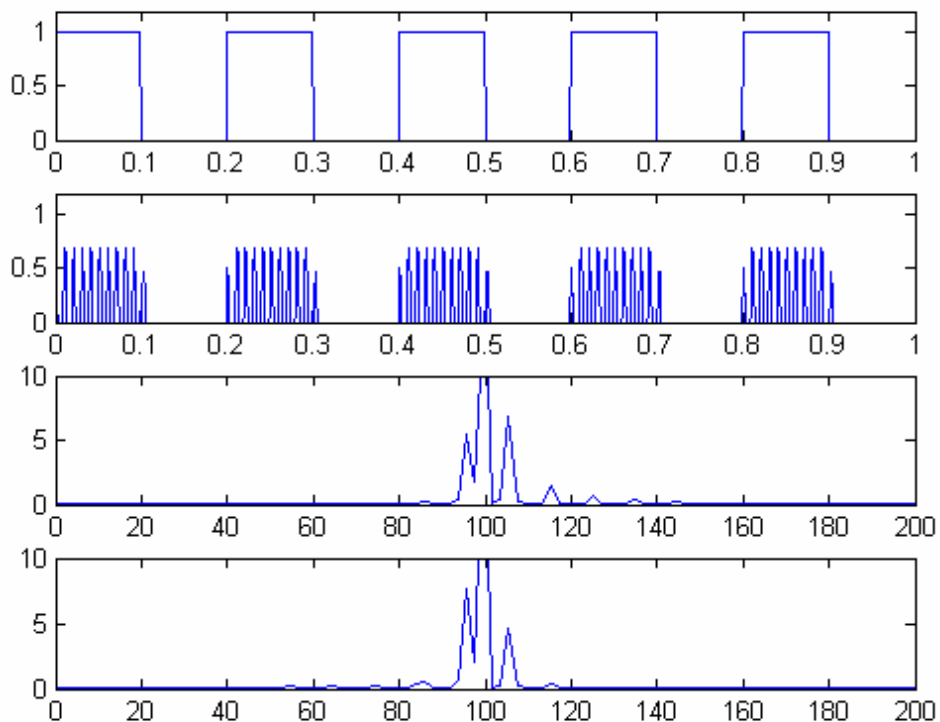
```

f = 1000*(0:256)/512;
Su = fft(su,512);
Pssu = Su.* conj(Su) / 512;
Sl = fft(sl,512);
Pssl = Sl.* conj(Sl) / 512;

%Drawing
subplot(4, 1, 1);
plot(t, A);
axis([0, 1, 0, 1.2]);
subplot(4, 1, 2);
plot(t, s);
axis([0, 1, 0, 1.2]);
subplot(4, 1, 3);
plot(f,Pssu(1:257));
axis([0, 200, 0, 10]);
subplot(4, 1, 4);
plot(f,Pssl(1:257));
axis([0, 200, 0, 10]);

```

所得图形如下：



图中第三幅图是上边带调制的功率谱密度图，第四幅图是下边带调制的功率谱密度图。从第三、四张图可以看出，当上边带振幅调制时，上边带信号强度高于下边带而且上边带的旁瓣存在，下边带旁瓣快速衰减；当下边带振幅调制时，下边带信号强度高于上边带而且下边带的旁瓣存在，上边带旁瓣快速衰减。

3.1.2 MASK

以上分析了当输入是二进制比特流的情况，现在扩展成输入是 M 进制比特流的幅度调制。这里 $M = 2^N$ ， N 是大于或等于 2 的自然数，将 M 进制比特流映射成振幅值应该等于：

$$A = (2m - 1 - M)d \quad m = 1, \mathbf{L}, M$$

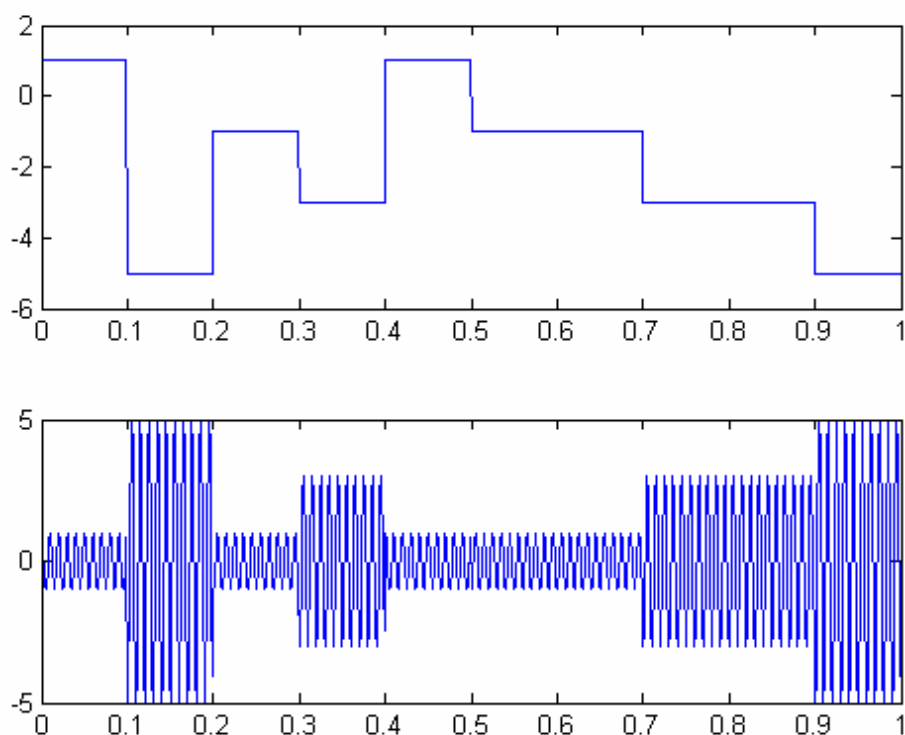
式中 d 用来控制幅度间的差值，该值等于幅度间差值的一半。

下面的代码说明了一个四进制比特流的映射过程以及波形

```
M = 4; d = 1;
t = 0 : 1/1e3 : 0.999;
a = randint(1, 10, M);
a = (2*a - 1 - M)*d;
g = ones(1, 100);
g = [g, g, g, g, g, g, g, g, g, g];
s = a(ceil(10*t+0.01)).*g.*cos(2*pi*100*t);
```

```
subplot(2, 1, 1);
plot(t, a(ceil(10*t+0.01)));
subplot(2, 1, 2);
plot(t, s);
```

相应的波形为



如果 M 进制振幅调制的输入码元与二进制振幅调制的输入码元具有相同速率，那么 M 进制振幅调制与二进制振幅调制具有相同的带宽，而 M 进制振幅调制具有更高的带宽利用率，因为在单位时间内 M 进制振幅调制能传输更多的比特。虽然 M 进制振幅调制具有更高

的带宽利用率，但是在相同信噪比下，随着 M 增大，误码率也增大，也就是因为功率受限。 M 进制振幅调制也可以使用单边带调制等方式。

3.1.3 QAM

以上讨论都是单个载波的情况，也就是在单载波的情况下输入 M 进制比特流，现在考虑由两个载波分量的情况下的输入 M 进制比特流，称这种调制为 QAM 调制方式。

因为载波分量 $\cos wt$ 与 $\sin wt$ 是彼此正交的，也就是满足如下条件，在一个周期内有 $\int_0^T \cos wt \sin wt = 0$ ，所以该调制方式被称为正交幅度调制。其输出信号的表达式为：

$$s(t) = A_I g(t) \cos wt - A_Q g(t) \sin wt$$

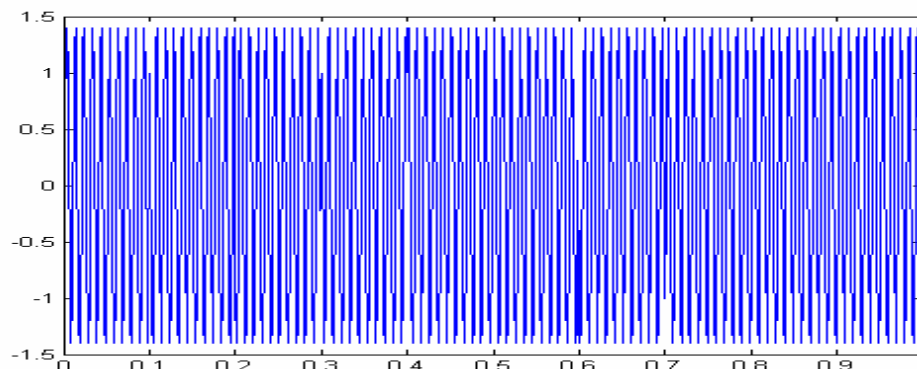
式中 $A_I g(t) \cos wt$ 被称为同相分量， $A_Q g(t) \sin wt$ 被称为正交分量， A_I, A_Q 被称为同相载波分量幅度、正交载波分量幅度。

下面代码演示 QAM 调制过程及其星座图，其中 M 等于 4。

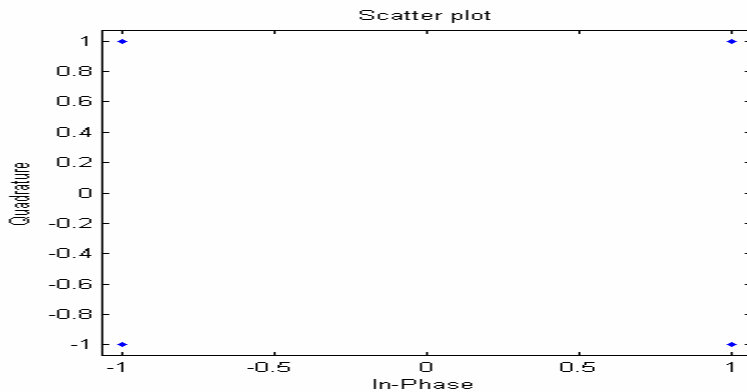
```
M = 4;
t = 0 : 1/1e3 : 0.999;
a = randint(10, 1, M);
Ai = 2*floor(a/2)' - 1;
Aq = 2*mod(a, 2)' - 1;
g = ones(1, 100);
g = [g, g, g, g, g, g, g, g, g, g];
s = Ai(ceil(10*t+0.01)).*g.*cos(2*pi*100*t) ...
    - Aq(ceil(10*t+0.01)).*g.*sin(2*pi*100*t);

plot(t, s);
scatterplot(Ai+j*Aq);
```

其波形如下：



星座图如下，图中的圆点代表了发送信号矢量在信号空间中的位置。



3.2 频率调制

3.1.1 BFSK

本节主要讨论频率调制技术，从最简单的二进制频率调制开始。设发送信号表示成：

$$s(t) = A \cos(2\pi(f + m\Delta f)t)$$

这里 m 等于 ± 1 ， Δf 是相对于 f 的固定频率偏移。由于输入的比特流通常是由 0、1 组成，所以 $m = 2a - 1$ ，这里 a 是输入比特流。

下面代码生成 BFSK 信号并画出其功率谱

```
%Time
t = 0 : 1/1e3 : 0.999;

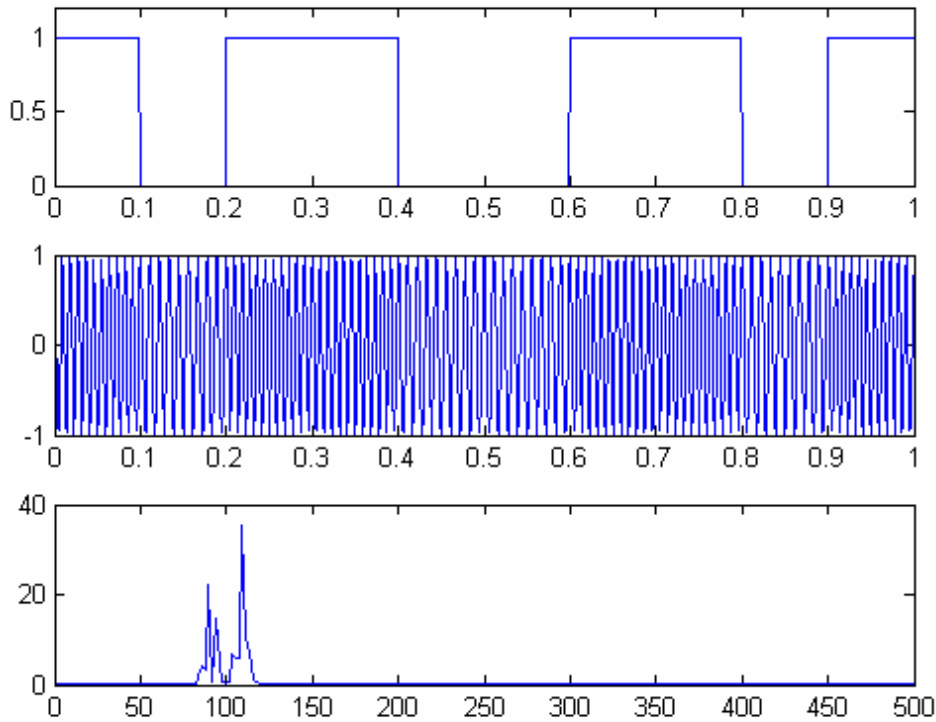
%Frequency Offset
df = 10;

%Source & BFSK signal
a = randint(1, 10, 2);
m = 2*a(ceil(10*t+0.01))-1;
s = cos(2*pi*(100+m*df).*t);

%Calculate the Power Spectrum
f = 1000*(0:256)/512;
S = fft(s,512);
Pss = S.* conj(S) / 512;

Drawing
subplot(3, 1, 1);
plot(t, a(ceil(10*t+0.01)));
axis([0, 1, 0, 1.2]);
subplot(3, 1, 2);
plot(t, s);
subplot(3, 1, 3);
plot(f, Pss(1:257));
```

其输出波形以及功率谱如下图



由图中可以看到输出信号的的中心频率为 100Hz，其两个峰值间隔为 20Hz。BFSK 信号所占用的带宽为 $B_{BFSK} = 2\Delta f + 2B$ ， Δf 为固定频率偏移， B 为数字基带信号带宽。

3.1.2 MFSK

前面讨论的是每次仅输入单个比特到调制器，如果每次输入多个比特到调制器，那么称为 M 进制频率调制，简称 MFSK。这里 $M = 2^N$ ， $N \geq 1$ ， N 是每次输入到调制器的比特数。

假设 N 等于 2，那么 M 等于 4，现在对 4 进制 FSK 编写如下代码观察波形及其功率谱。

```
%Time
t = 0 : 1/1e3 : 0.999;

%Frequency offset & M = 4
df = 10; M = 4;

%Source & 4FSK
a = randint(1, 10, M);
m = 2*a(ceil(10*t+0.01))-3;
s = cos(2*pi*(100+m*df).*t);

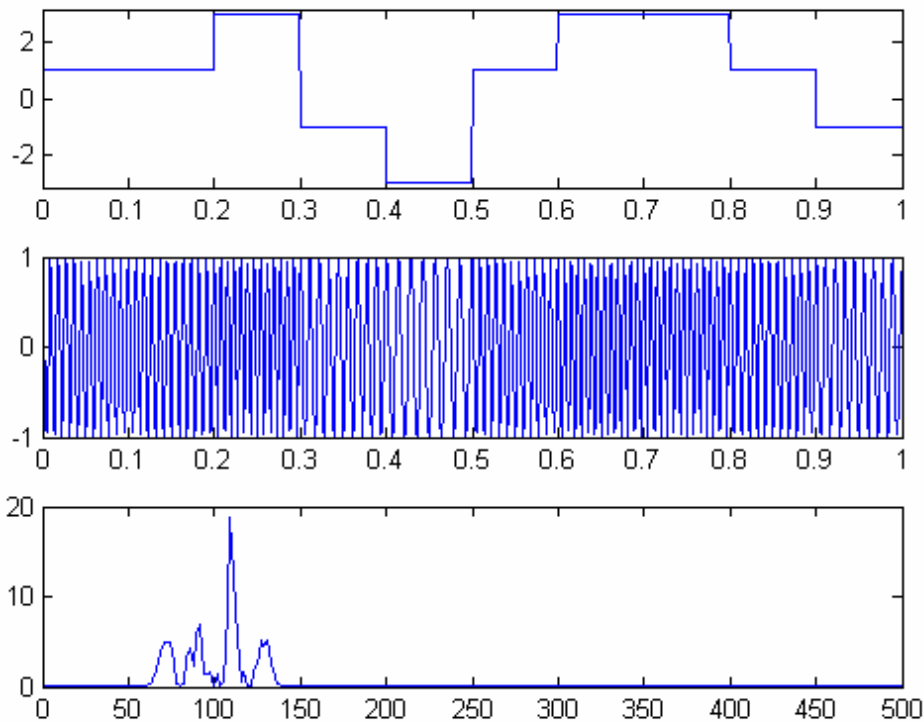
%Power Spectrum
f = 1000*(0:256)/512;
S = fft(s,512);
Pss = S.* conj(S) / 512;
```

```

%Drawing
subplot(3, 1, 1);
plot(t, m);
axis([0, 1, -3.2, 3.2]);
subplot(3, 1, 2);
plot(t, s);
subplot(3, 1, 3);
plot(f, Pss(1:257));

```

生成波形如下



由图中可以看到输出信号的中心频率为 100Hz，相邻峰值间隔 20Hz，四个峰值分别出现在 70Hz、90Hz、110Hz、130Hz。

3.1.3 CPFSK

以上两种频移键控调制方式，由于相位的非连续性导致谱扩展，有较大的频谱旁瓣产生。为避免产生较大的频谱旁瓣，可以将调制信号调制单一频率载波，并且相位连续变化，称这用频移键控为连续相位频移键控 CPFSK。其输出信号表达式为：

$$s(t) = \cos\left(2\pi f t + 4\pi T f_d \int_{-\infty}^t \sum_n I_n g(t-nT) dt\right)$$

这里 T 是基带信号的周期， f_d 是峰值频率偏移。 I_n 是要发送的数字信息， $g(t)$ 是基带信号波形，通常可以采用矩形脉冲。虽然 $\sum_n I_n g(t-nT)$ 是不连续的，但是其积分却是连续的，所以该调制方式具有连续相位。

令

$$\begin{aligned}
 f(t; I) &= 4pTf_d \int_{-\infty}^t \sum_n I_n g(t-nT) dt \\
 &= 2pf_d T \sum_{k=-\infty}^{n-1} I_k + 2pf_d I_n (t-nT) \\
 &= q_n + 2phI_n q(t-nT)
 \end{aligned}$$

这里

$$h = 2f_d T$$

$$q_n = ph \sum_{k=-\infty}^{n-1} I_k$$

$$q(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t/2T & 0 \leq t \leq T \\ 1/2 & T < t \end{cases}$$

h 被称为调制指数。

CPFSK 调制可以用如下代码表示，假设峰值频率偏移为 10Hz，基带信号周期为 0.1 秒，1 秒内传送 10 个比特。

```

%Frequency Offset and Singal Cycle
df = 10; T = 0.1;

%Duration
t = 0 : 1/1e3 : 0.999;

%Source and CPFSK output
a = 2*randint(1, 10, 2) -1;
m = cumsum(a);
a = a(ceil(10*t+0.01));
m = m(ceil(10*t+0.01));
s = cos(2*pi*100*t + 4*pi*T*df*cumtrapz(m)/1000);

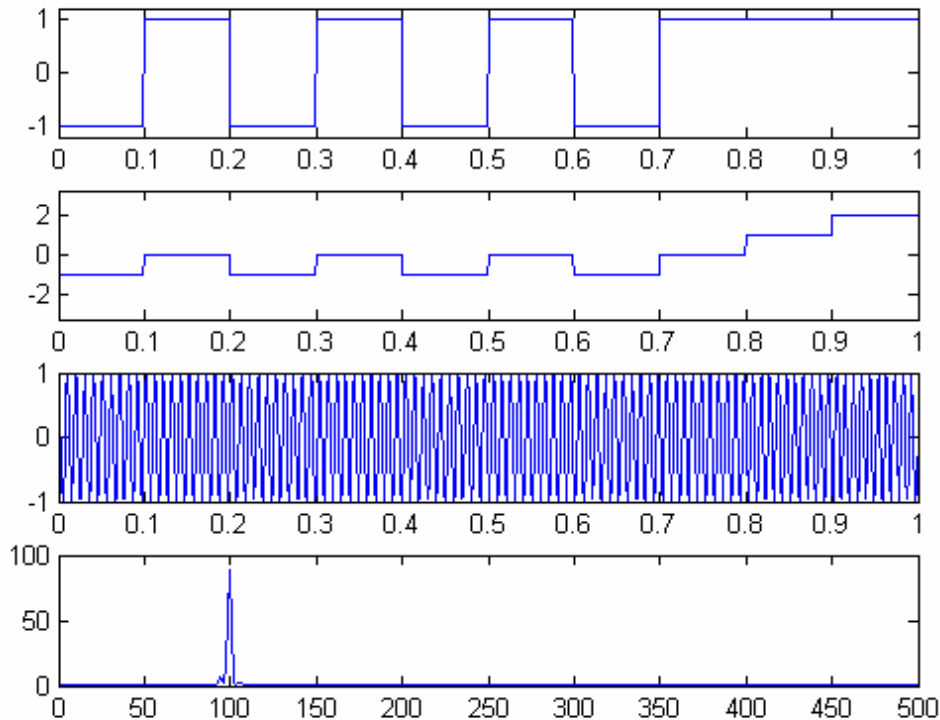
%Power Spectrum
f = 1000*(0:256)/512;
S = fft(s,512);
Pss = S.* conj(S) / 512;

%Drawing
subplot(4, 1, 1);
plot(t, a);
axis([0, 1, -1.2, 1.2]);
subplot(4, 1, 2);
plot(t, m);
axis([0, 1, -3.2, 3.2]);

```

```
subplot(4, 1, 3);
plot(t, s);
subplot(4, 1, 4);
plot(f, Pss(1:257));
```

输入波形以及功率谱如下：



从图中可以看到 CPFSK 信号的功率谱波形平滑，没有很大的波动以及旁瓣，而这正是期望的。

3.1.4 MSK

MSK 是 CPFSK 的特例，这时调制指数 h 等于 $1/2$ ，即 $h = 2f_d T = 1/2$ 。将该关系式代

入到 $f(t, I)$ ，可得

$$\begin{aligned}
 f(t; I) &= 4pf_d \int_{-\infty}^t \sum_n I_n g(t-nT) dt \\
 &= 2pf_d T \sum_{k=-\infty}^{n-1} I_k + 2pf_d T I_n \left(\frac{t-nT}{T} \right) \\
 &= \frac{p}{2} \sum_{k=-\infty}^{n-1} I_k + \frac{p}{2} I_n \left(\frac{t-nT}{T} \right) \\
 &= q_n + pl_n q(t-nT)
 \end{aligned}$$

这时已调载波信号

$$s(t) = \cos\left(2\pi f t + 4\pi T f_d \int_{-\infty}^t \sum_n I_n g(t-nT) dt\right)$$

$$= \cos\left(2\pi\left(f + \frac{I_n}{4T}\right)t - \frac{n\pi I_n}{2} + q_n\right)$$

令 $f_1 = f - \frac{1}{4T}$, $f_2 = f + \frac{1}{4T}$, 则 $\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{1}{2T}$ 。这里 Δf 是为保证信号正交性的最小频率间隔, 这就是最小频移键控 MSK 的由来。

```
%Frequency Offset and Singal Cycle
df = 2.5; T = 0.1;

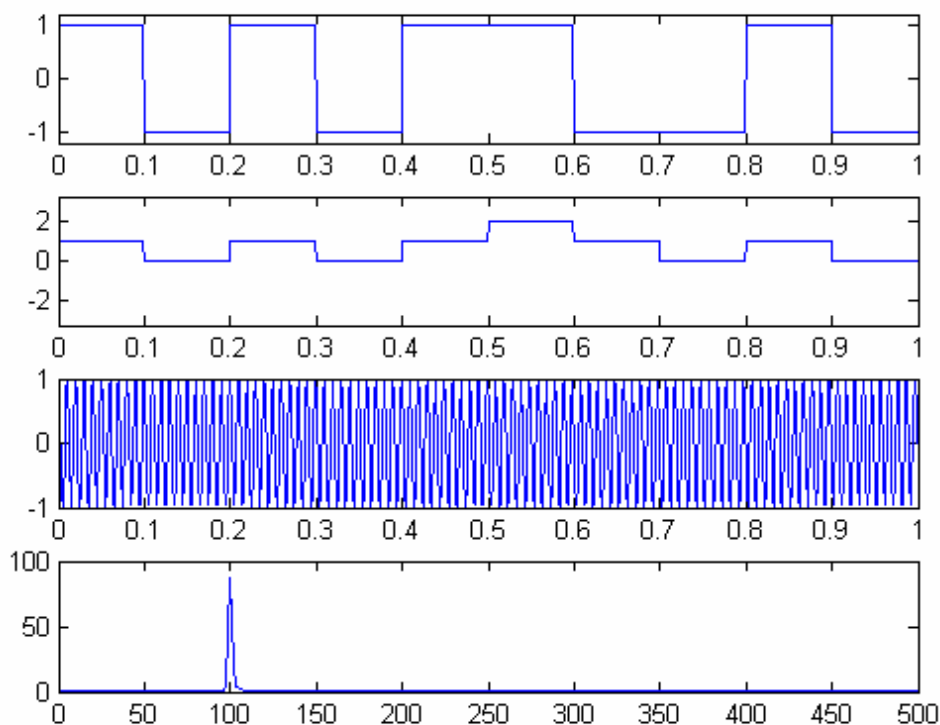
%Duration
t = 0 : 1/1e3 : 0.999;

%Source and MSK output
a = 2*randint(1, 10, 2) -1;
m = cumsum(a);
a = a(ceil(10*t+0.01));
m = m(ceil(10*t+0.01));
s = cos(2*pi*100*t + 4*pi*T*df*cumtrapz(m)/1000);

%Power Spectrum
f = 1000*(0:256)/512;
S = fft(s,512);
Pss = S.* conj(S) / 512;

%Drawing
subplot(4, 1, 1);
plot(t, a);
axis([0, 1, -1.2, 1.2]);
subplot(4, 1, 2);
plot(t, m);
axis([0, 1, -3.2, 3.2]);
subplot(4, 1, 3);
plot(t, s);
subplot(4, 1, 4);
plot(f, Pss(1:257));
```

这段代码与 CPFSK 的代码不同之处在于将 df 设为 2.5, 这样 $2*fd*T=0.5$, 符合 MSK 的特性。生成的波形图如下:



如果在 MSK 调制器前加上高斯滤波器对输入信号滤波，那么调制器产生的输出信号被称为高斯最小频移键控（GMSK）。

3.1.5 OFDM

OFDM 是正交频分复用（Orthogonal Frequency Division Multiplex）的缩写，是一种多载波频率调制方式。该调制方式利用一组正交信号做为载波分量，典型的正交信号如 $\{1, \cos \omega t, \cos 2\omega t, \dots, \cos m\omega t, \sin \omega t, \sin 2\omega t, \dots, \sin m\omega t\}$ 。其子载波通常采用 PSK 或 QAM 调制方式，这里假设子载波调制采用 QAM 调制方式。输出信号可以表示为：

$$s(t) = \sum_{m=0}^{M-1} [A_I g(t) \cos \omega_m t - A_Q g(t) \sin \omega_m t]$$

M 是子载波个数， ω_m 是载波信号角频率， $\omega_m = 2\pi(f + m\Delta f)$ ，这里 f 是 $1/T$ 的整数倍， Δf 等于 $1/T$ ， T 是基带信号周期。

```
%Duration
t = 0 : 1/1e3 : 0.999;

%Source
m = 2*randint(20, 1, 2)-1;
a = m(1:4:20)';
b = m(2:4:20)';
c = m(3:4:20)';
d = m(4:4:20)';
```

```

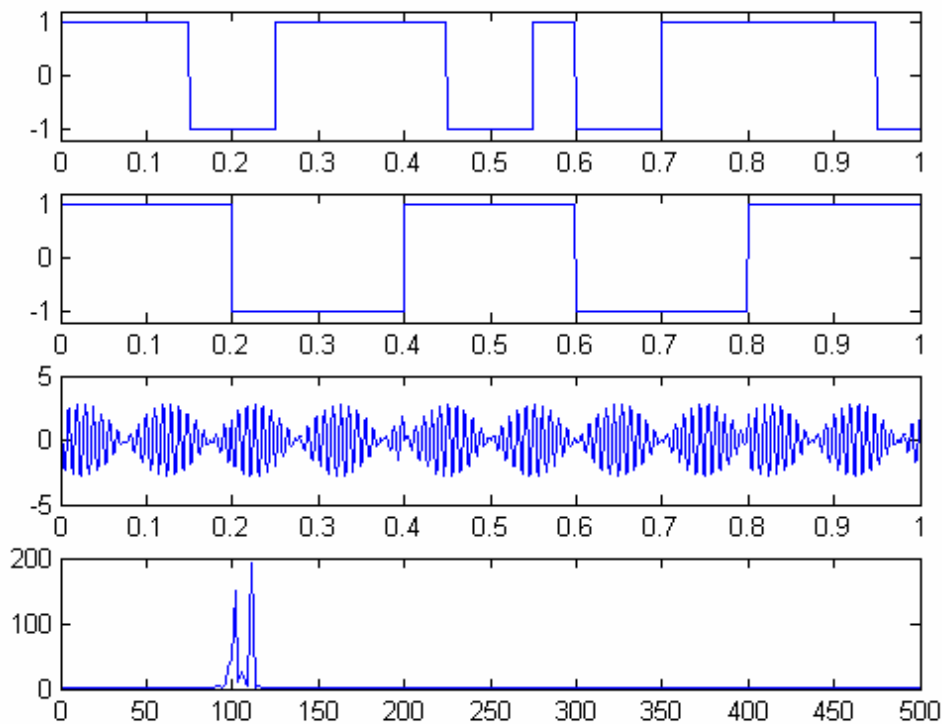
m = m(ceil((1000*t+0.01)/50));
a = a(ceil((1000*t+1)/200));
b = b(ceil((1000*t+1)/200));
c = c(ceil((1000*t+1)/200));
d = d(ceil((1000*t+1)/200));

%OFDM Singal
s = a.*cos(2*pi*100*t) - b.*sin(2*pi*100*t) ...
    + c.*cos(2*pi*110*t) - d.*sin(2*pi*110*t);

%Power Spectrum
f = 1000*(0:256)/512;
S = fft(s,512);
Pss = S.* conj(S) / 512;

%Drawing
subplot(4, 1, 1);
plot(t, m);
axis([0, 1, -1.2, 1.2]);
subplot(4, 1, 2);
plot(t, a);
axis([0, 1, -1.2, 1.2]);
subplot(4, 1, 3);
plot(t, s);
subplot(4, 1, 4);
plot(f, Pss(1:257));

```



从图上可以看到 T 等于 0.2 秒，OFDM 信号幅度不是恒定的，另外在 100、110Hz 出都有峰值。

3.3 相位调制

3.3.1 PSK

本节主要讨论相位调制技术，从最简单的二进制相位调制开始。设发送信号表示成：

$$s(t) = g(t) \cos\left(\omega t + \frac{2p}{M}(m-1)\right) \quad m = 0, \mathbf{L}, M-1$$

这里 $g(t)$ 是基带信号波形。 M 是可能的相位个数， $M = 2^N$ ， N 是每次被输入到调制器的比特数。当 M 等于 2，这时 PSK 通常被称为二进制相移键控（BPSK），当 M 等于 4，这时 PSK 通常被称为四进制相移键控（QPSK）。如果输入的比特流先经过差分编码然后输入到调制器，这时 PSK 通常被称为差分相移键控（DPSK）。

下面代码采用 BPSK 调制方式，如果设 M 等于 4，就是 QPSK 调制。

```

M = 2;
t = 0:0.001:0.999;

m = randint(10, 1, M)';
m = m(ceil(10*t+0.01));
s = cos(2*pi*100*t+m/M);

f = 1000*(0:256)/512;
S = fft(s,512);
Pss = S.* conj(S) / 512;

```

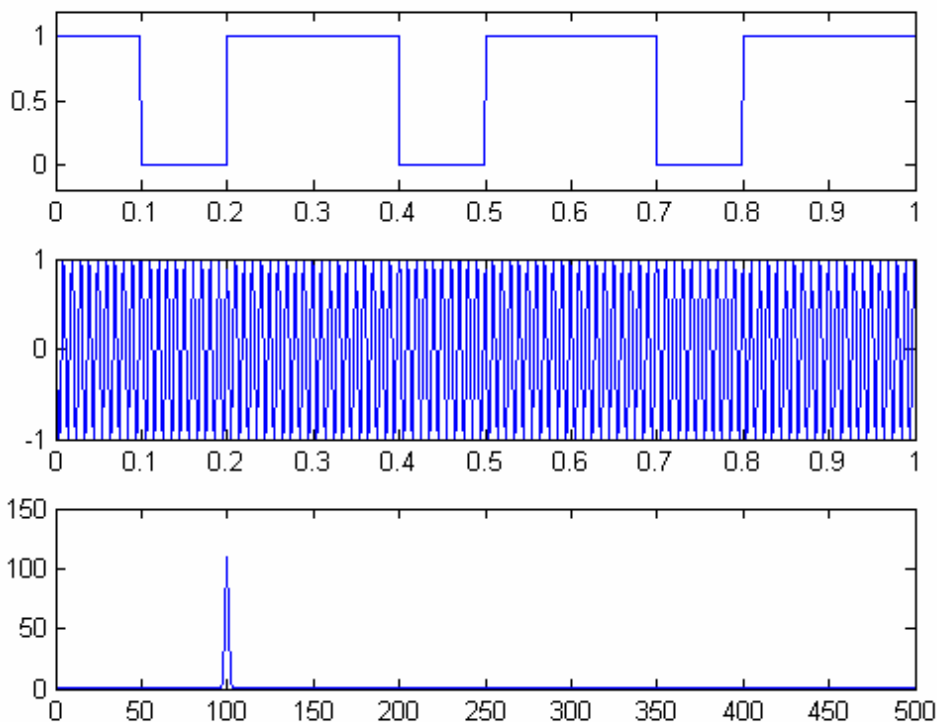


```

subplot(3, 1, 1);
plot(t, m);
axis([0 1 min(m)-0.2 max(m)+0.2]);
subplot(3, 1, 2);
plot(t, s);
subplot(3, 1, 3);
plot(f, Pss(1:257));

```

波形图如下



3.3.2 OQPSK

前面讨论的 FSK 以及现在讨论的 PSK 调制方式都是恒包络调制方式，这类调制方式可以在接收端采用限幅的方式来消除干扰引起的幅度变化，从而获得更好的抗干扰性能。

假定 QPSK 调制的基带波形是矩形波形，那么在频域调制后的信号具有无限带宽。通常信道都是带限的，当调制信号通过该信道后，输出信号不再是恒包络的。当 QPSK 调制在相邻码元间发生 180 度相移时，带限后的包络甚至会出现包络为 0 的现象。通过非线性带限信道后，在接收机由于功放的非线性，包络的起伏虽然可以被消减，但同时会使频谱扩展，从而对临近信道的信号形成干扰。

为避免出现 180 度的相移，可以采用 OQPSK（Offset QPSK）调制方式。该调制方式首先串并变换，将输入比特流分成 I 、 Q 两路比特流，原先周期为 T_s 的一个比特流变成周期为 $2T_s$ 的两个比特流，然后将 Q 路比特流偏移一个周期 T_s ，按 QPSK 方式调制。这样由于在每个周期 T_s 只有某一路比特发生变化，而不会出现 I 、 Q 两路比特同时变化，所以就可以避

免出现 180 度的相移。当 I 、 Q 两路比特同时变化，会出现 180 度的相移。

该调制方式发送信号可以表示成：

$$s(t) = I(t)\cos(2\pi ft) + Q(t - T_s)\sin(2\pi ft)$$

下面的代码采用 OQPSK 调制方式：

```
%Duration
t = 0 : 1/1e3 : 0.999;

%Source
m = 2*randint(20, 1, 2)'-1;
I = m(1:2:20);
Q = m(2:2:20);
Q = [0, Q(1:end-1)];

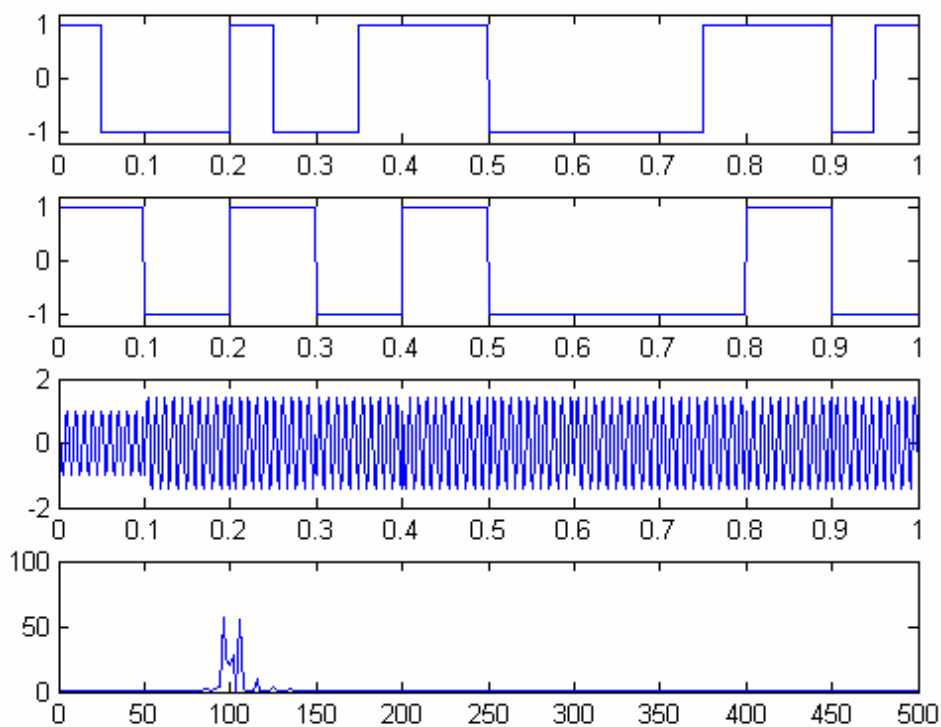
m = m(ceil((1000*t+1)/50));
I = I(ceil((1000*t+1)/100));
Q = Q(ceil((1000*t+1)/100));

%QPSK
s = I.*cos(2*pi*100*t) - Q.*sin(2*pi*100*t);

%Power Spectrum
f = 1000*(0:256)/512;
S = fft(s,512);
Pss = S.* conj(S) / 512;

%Drawing
subplot(4, 1, 1);
plot(t, m);
axis([0, 1, -1.2, 1.2]);
subplot(4, 1, 2);
plot(t, I);
axis([0, 1, -1.2, 1.2]);
subplot(4, 1, 3);
plot(t, s);
subplot(4, 1, 4);
plot(f, Pss(1:257));
```

得到的波形图如下：



从图中可以看到 OQPSK 调制方式占用较大的带宽。

由于相位的跳变导致通过带限信道后包络发生变化，所以如果采用连续相位变化就可以尽量避免因为相位跳变导致的包络变化。这就是连续相位调制，在频率调制已讨论果连续相位调制方式，例如 CPFSK、MSK 调制方式。