研究生教材

模糊控制与系统

张文修　梁广锡　编著

西安交通大学出版社

研 究 生 教 材

模糊控制与系统

张文修　梁广锡　编著

西 安 交 通 大 学 出 版 社

内容提要

模糊控制技术是现代工业与新产品开发的高新技术之一，在国内外受到普遍重视。本书系统地叙述模糊控制技术的原理、方法及设计技巧。同时还包含了模糊系统模糊辨识方法以及模糊专家系统。

本书作为研究生的教材，也可以作为大学本科生和工程人员的科学研究参考书。

(陕)新登字007号

模糊控制与系统

张文修　梁广锡　编著

责任编辑　叶　涛

责任校对　祝　捷

*

西安交通大学出版社出版发行

(西安市咸宁西路28号　邮政编码：710049　电话(029)3268316)

陕西省轻工印刷厂印装

各地新华书店经销

*

开本 850×1168　1/32　印张：6.5　字数：160　千字

1998年3月第1版　　1998年3月第1次印刷

印数：1——2000

ISBN7-5605-1002-7/O·132　定价：10.00元

《研究生教材》总序

研究生教育是我国高等教育的最高层次，是为国家培养高层次的人才。他们必须在本门学科中掌握坚实的基础理论和系统的专门知识，以及从事科学研究工作或担负专门技术工作的能力。这些要求具体体现在研究生的学位论文中。

认真建设好研究生学位课程是研究生培养中的重要环节。为此，我们组织出版这套《研究生教材》，以满足当前研究生教学，主要是公共课和一批新型的学位课程的教学需要。教材作者都是多年从事研究生教学工作，有着丰富教学和科学研究经验的教师。

这套教材首先着眼于研究生未来工作和高技术发展的需要，充分反映国内外的最新学术动态，使研究生学习之后，能迅速接近当代科技发展的前沿，以适应“四化”建设的要求；其次，也注意到研究生公共课程和学位课程应有它最稳定、最基本的内容，是研究生掌握坚实强调突出重点，突出基本原理和基本内容，以保持学位课程的相对稳定性和系统性，内容有足够的深度，而且对本门课程有较大的覆盖面。

这套《研究生教材》虽然从选题、大纲、组织编写到编辑出版，都经过了认真的调查论证和细致的定稿工作，但毕竟是第一次编辑这样高层次的教材系列，水平和经验都感不足，缺点与错误在所难免。希望通过反复的教学实践，广泛听取校内外专家学者和使用者的意见，使其不断改进和完善。

西安交通大学研究生院

西安交通大学出版社

1986年12月

前　言

模糊控制技术作为现代工业与新产品开发的高新技术之一，受到国内外普遍重视。1965 年，美国加州大学自动控制专家 Zadeh 引入了模糊集合；1974 年，Mamdani 将模糊集合方法用到控制技术取得了成功；80 年代模糊控制技术得到了普遍的应用。于是，模糊理论与应用的研究及模糊产品的开发像一股强劲的风浪席卷世界各地。

模糊控制技术能够被广泛重视，根本在于它反映了人类的经验与思维原则，并且能够将人们用语言表达的知识予以量化，使模糊环境下的控制技术通过计算机实现成为可能。它排除了建立繁杂数学模型的艰难，使工业界技术人员更容易接受和实现。模糊控制技术的应用大大地超前于模糊控制理论的研究。

本书是在大量应用成果的基础上，综述模糊控制技术的一般原理和方法。最核心的部分是模糊推理技术与模糊系统模型的建模技术。我于 1994 年在香港中文大学与梁怡教授、梁广锡博士经过近半年的科研合作，提出了包含度理论。理论上和实践上都指出，包含度理论概括了模糊推理技术。同时，它也可以用来研究不确定性模糊规则的产生方法；可以研究模糊规则的谐调性以及矛盾规则的排除；可以研究模糊系统模型的建模方法；可以研究模糊专家系统的实现方法。

本书叙述严格，深入浅出，简明扼要。可以作为工程学科研究生的教科书，也可作为工程研究人员的科研参考书。

张文修

1997.3.8

目　录

第1章 模糊控制系统的结构

1.1 模糊控制系统产生的背景

控制技术被广泛地应用在各种工业技术领域里，成为现代高新技术的重要手段之一。随着控制技术的发展，控制理论与方法也得到发展。除了对PID型控制器在应用前景方面的广泛研究以外，状态空间方法，随机方法，优化控制，滤子方法以及状态估计法的理论研究及应用也取得了明显的成功。

经典的控制技术有一个明显的特征，即模型的结构非常精确。它是根据控制系统的物理、化学以及力学等特征，导出一些常常是复杂的模型方程。求解这些方程需要比较复杂的算法。由于数值计算与计算机技术的发展，算法复杂性已不会太大影响实际控制的精度。但是在这些模型方程中含有众多的参数需要估计，求解这些参数却缺少足够的信息量与信息特征。如果不能很好解决这些参数估计问题，再好的模型方程也是一个不太好的控制系统。

目前研究的控制系统更多涉及到多变量、非线性、时变的大系统，系统的复杂性与控制技术的精确性形成了尖锐的矛盾。正如L. A. Zadeh所指出的，当系统日益复杂，人们对它的精密而有意义的描述的能力将相应地降低，以至达到精密与有意义成为两个几乎相互排斥的特征的地步。要想精密确切地描述复杂现象和系统的任何现实的物理状态，事实上是办不到的。这样就迫使人们在控制系统的精确性与有意义之间寻求某种平衡和折衷。

人们又重新回到实际控制系统。比如汽车驾驶系统，一个熟练的汽车司机可以自由地控制汽车通过各种狭窄的通道，躲避各

种各样的障碍物,但是应用经典的控制理论建立模型方程的方法是相当困难而且不现实的。

又如自动洗衣机系统,给出了洗涤、清洗与烘干的过程与过程选择,事先由人们根据所洗衣服的的状况对过程的各个步骤进行设定。一旦设定以后,洗衣机就根据设定进行控制操作整个洗衣服的过程。

再如空调器,它本身不能理解人的感觉,当温度迅速回升与迅速下降时,它不能够迅速地将室温控制到一个正常温度。它总是按照某种设定的参数运行。为了加速升温过程必须重新改变某种设定。

在以上的系统中,人被理解为最成功的非线性控制器,而这种控制器的参变量则是时间变化的函数。人的经验参与控制过程的成功,激发了人们对控制原理的深入研究。这种原理是以能包含人类思维的控制方案为基础,而且反映人类经验的控制过程的知识,以及可以达到的控制目的能够利用某种形式表达出来,同时还很容易被实现。这样的控制系统既避免了那种精密、反复、有错误倾向的模型建造过程,又避免了精密地估计模型方程中各种参数的过程。在多变量、非线性、时变的大系统中,人们可以采用简单灵活的控制方式,这就是模糊控制器产生的背景。

模糊控制器最重要的特征是反映人们的经验以及人们的常识推理规则,而这些经验与常识推理规则是通过语言来表达的,比如说“温度太高,温度上升的速度也很快,就要采用大幅度降温的控制策略”。对于用语言表达的这种经验必须给出一种描述的方式,而且这种经验是多种多样的。比如还可以有经验规则“温度稍低,升温的速度很快,就要采用稍微降温控制策略”。综合考虑众多的控制策略,即是一种常识推理规则。

幸运的是,美国加利福尼亚大学的自动控制教授 L. A. Zadeh 于 1965 年首次提出了“模糊集合”的概念,借助于“模糊集

合"可以描述诸如"太高"、"很快"、"稍低"、"大幅度"等语言变量值，并且对这些语言变量值进行某种复合运算，这样就使得有人的经验参预的控制过程成为实际可能。1973 年，L. A. Zadeh 又进一步研究了模糊语言处理，给出了模糊推理的理论基础。1974 年，E. H. Mamdani 提出了模糊控制，1980 年开始模糊控制的应用研究，1985 年开始模糊推理集成块的开发，1986 年在日本模糊控制器已成为商品之后，各种各样的模糊控制产品及系统应运而生。特别是于 1987 年在日本，基于模糊控制的仙台地铁开通以后，各种家电的模糊产品相继研制成功并进入市场，如洗衣机、照像机、摄像机、复印机、吸尘器、电冰箱、微波炉、电饭锅、空调器、电视机、淋浴器等。这些家电产品在节约资源、方便使用以及使用效果方面更富有"人情味"，更符合人的实际生活。同时，各种各样的模糊控制系统也被研制成功。比如，各种熔炉、电气炉以及水泥生成炉的控制系统，核能发电供水系统，金属板成形控制系统，汽车的控制系统，电梯及升降机的控制系统，机器人的控制系统，以及活跃于航空、宇宙、通讯领域里的专家系统。这些模糊控制系统的应用取得了明显的效益，并且在日本、美国、西欧、东南亚和中国引起了普遍重视。1984 年，国际模糊系统学会成立；1985 年，召开了第一届国际模糊系统学会的学术交流会。各个国家相继成立了模糊系统工程研究所，世界上一些大公司开始了模糊产品的开发。模糊理论与应用的研究以及模糊产品的开发像一股强劲的风浪席卷世界各地。

1989 年，L. A. Zadeh 在接受本田奖授奖仪式上发表讲话指出，模糊理论是对"彻底排除不明确事物只以明确事物为对象"的科学界传统所作的挑战。这种理论对于如何处理与对待不明确事物，所依据的思路与过去的科学实质上完全不同。他认为，模糊理论今后将在两个领域取得较大进展。一是熟练技术者替代系统。这种系统将人无意识进行的操作由机器替代，如日本仙台市营地

铁的自动驾驶系统。二是替代专家的专家系统。像山一证券公司的股票交易系统以及医疗诊断系统。为使专家头脑中所进行的思考与决策能实现自动化,模糊理论将起重要的作用。当然,模糊理论并不能解决所有可能问题,但是只要不回避现实中的不确定事物并加以认真对待,就有可能大大提高在不确定(模糊)环境中进行智慧思考与决策的人及机器的能力。

我们相信,随着模糊控制与模糊系统的发展,人工智能、认知科学、行为科学、系统科学、管理科学、计算科学、情报科学等领域,也会借助模糊集理论得到迅速发展。

1.2 自然语言与模糊集合

在模糊控制系统中,首先涉及到的是人的经验。而人的经验通常是用语言来表达的。比如在医学等专家系统中,“年轻的人”、“年老的人”等是一种语言变量,“高个子”、“低个子”也是一种语言变量,“胖”与“瘦”也是一种语言变量。在一般的控制系统中,“大”与“小”、“高”与“低”、“左”与“右”、“稍许”、“非常”、“可能”等都是语言变量。这些语言的特征即是不确定性与模糊性以及模棱两可的的性质。比如,20 岁算“年轻的人”, 25 岁是不是“年轻的人”? 60 岁算“年老的人”, 55 岁是不是“年老的人”? 向左进五档是“大”,向左进四档算不算大? 这些语言变量所描述的概念通常是一个模糊集合。

数学意义上的集合是一个确定的事物的集合。对于某个事物,可以清楚而明确地确定它属于这个集合,或不属于这个集合。比如“女性”的集合,即是通常意义下的集合,某个人要么属于这个集合,要么不属于这个集合。“18 岁以上的人”也是通常意义下的集合,一个人要么属于这个集合,要么不属于这个集合。这样,数学意义下的经典集合满足“排中律”,即“非此即彼”。但是“美

丽女子”的集合，以及“年轻人”的集合即是模糊集合，它是一个边界不明确的集合。比如对于女子王芳进行评价的时候，我们一般并不武断地声明“王芳属于美丽女子的集合”，或“王芳不属于美丽女子的集合”，我们宁可给出王芳一个实在的评价，比如王芳隶属于“美丽女子”集合的程度为0.8。这个评价值在 0 与 1 之间，越接近于 1，隶属于“美丽女子”的集合的程度越大。比如考虑王芳、李春、刘艳、赵莹四个女子的集合，即

$$X=\{王芳、李春、刘艳、赵莹\}$$

这是一个经典集合，“美丽女子”的集合可以表示为

$$B=\{(王芳,0.8);\quad (李春,0.7);\\ (刘艳,0.4);\quad (赵莹,0.6)\}$$

像这种基于将各种对象在 0 与 1 之间进行程度分配的描述即是模糊集合。具体来说，王芳隶属于“美丽女子”集合的程度为 0.8；李春隶属于“美丽女子”集合的程度为 0.7；刘艳隶属于“美丽女子”集合的程度为 0.4；赵莹隶属于“美丽女子”集合的程度为 0.6。这种隶属程度的给出，虽然具有某种主观性，但它比仅仅给出属于与不属于的简单方法要好得多。

假定 X 是一个普通集合，X 中的一部分 A 即是一个子集合。对于 X 中的元素 x，要么 x 属于 A，记为 $x\in \mathrm{A}$；要么 x 不属于 A，记为 $x\notin \mathrm{A}$。对于子集合，我们可以用 X 到 $\{0,1\}$ 的一个映射来给出

$$\mathrm{A}(x)=\begin{cases}1, & x\in \mathrm{A}\\ 0, & x\notin \mathrm{A}\end{cases}$$

因此映射 A：$\mathrm{X}\to\{0,1\}$ 给出了一个普通子集合。即

$$\mathrm{A}=\{x\in \mathrm{X};\quad \mathrm{A}(x)=1\}$$

假设 X 是一个普通集合，称为论域。从 X 到区间 $[0,1]$ 的映射 A 称为 X 上的一个模糊子集合。为方便计，用正体表示经典集合，用斜体表示模糊集合。$A(x)$ 表示 x 隶属于模糊子集合 A 的

程度，称为隶属度，$A(\cdot)$称为隶属函数。若 X 为离散集合，可以表示为

$$A = \sum A(x)/x$$

如果 X 不是离散集合，可以表示为

$$A = \int A(x)/x$$

例 1.1 “美丽女子”的集合 B 为(见图 1.1)

$$B=0.8/\text{王芳}+0.7/\text{李春}+0.4/\text{刘艳}+0.6/\text{赵莹}$$

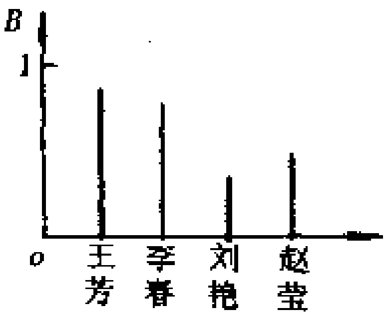
例 1.2 “年轻的人”的集合 Y(见图 1.2)

$$Y(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 25<x\leqslant 100\end{cases}$$

在例 1.2 中，得到

$$Y(20)=1,\ Y(30)=0.5,\ Y(60)=0.02$$

表明 20 岁绝对隶属于“年轻的人”，30 岁隶属于“年轻的人”的程度为 0.5，60 岁隶属于“年轻的人”的程度为 0.02，可以认为 60 岁基本上不属于“年轻的人”。



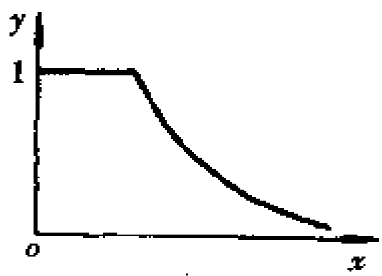


图 1.1 “美丽女子”的模糊集合 图 1.2 “年轻的人”的模糊集合

例 1.3 设论域 X=｛1,2,3,4,5｝，可定义 X 上模糊子集

“大”$=0.6/3+0.8/4+1/5$

“小”$=1/1+0.8/2+0.6/3$

“中”$=0.8/2+1/3+0.8/4$

“非常大”$=0.36/3+0.64/4+1/5$

“稍许大”$=0.8/3+0.9/4+1/5$

“非常小”$=1/1+0.64/2+0.36/3$

“稍许小”$=1/1+0.9/2+0.8/3$

例 1.4 “真”与“假”是$[0,1]$上的模糊子集。设论域为 $X=[0,1]$，T 与 F 表示 X 中模糊子集“真”与“假”(见图 1.3 和 1.4)，即

$$T(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant a\\ 2\left(\dfrac{x-a}{1-a}\right)^2, & a<x\leqslant\dfrac{a+1}{2}\\ 1-2\left(\dfrac{x-1}{1-a}\right)^2, & \dfrac{a+1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}1-2\left(\dfrac{x}{1-a}\right)^2, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1-a}{2}\\ 2\left(\dfrac{x-1+a}{1-a}\right)^2, & \dfrac{1-a}{2}<x\leqslant 1-a\\ 0, & 1-a<x\leqslant 1\end{cases}$$

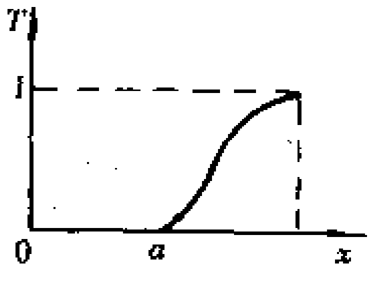


图 1.3 “真”的隶属函数

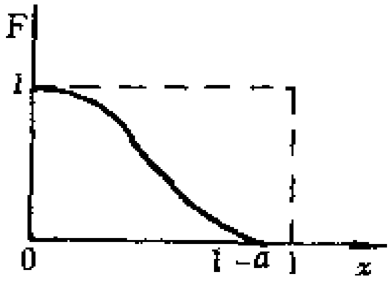


图 1.4 “假”的隶属函数

隶属函数是模糊子集的特征，一个模糊子集与一个特定的隶

属函数相对应。经典子集是仅取 0 和 1 的隶属函数，而模糊子集是在[0,1]上取值的隶属函数。由此可见，模糊子集是经典子集概念的推广。

1.3 模糊控制系统的基本结构

模糊控制系统是一种在模糊或非模糊推理规则中处理模糊信息的工具。各种研究结果表明，模糊控制系统在人工控制的各种控制系统中发挥了很好的作用。由于人类的经验参与控制过程，模糊控制系统已不是人为的，而是更加适应了一类特殊的控制过程。在这种控制过程中，最重要的是人工操作者的控制方案。这些方案是由某些“如果,那么”这样一些条件语句所构成。其中，“如果”表示条件和原因，“那么”表示结果或所采用的控制行为。它是用语言表达的人们的经验，表达了人们的思想，表明了当一种特定的控制过程状态被观察时，哪一种控制方案是比较现实的。

例 1.5 我们考虑空调器使室温最合适(保持在 23℃)的控制系统。通常的空调器是人工操作的,而且是依据以下人们的经验

规则 1： 如果热，那么加强致冷；

规则 2： 如果正好，那么原封不动；

规则 3： 如果冷，那么减弱致冷。

在这些规则中,“热”、“正好”、“冷”等概念都是一些模糊概念。同样“加强致冷”、“原封不动”、“减弱致冷”也是一些模糊概念。因此，这些规则本身都是用自然语言表示的一些模糊语句。这些规则表示了系统状态与控制行为之间的关系(如图 1.5)，我们称为“行为规则集”。但是,我们对目前系统状态给出的指标，可能是“25℃”,或“21℃”的数值,也可能是“稍冷”，“稍热”一类的感觉。因此，行为规则集不是一个简单的查询集，它要从目前的实际状

态出发,通过行为规则集的推理得到控制方案。

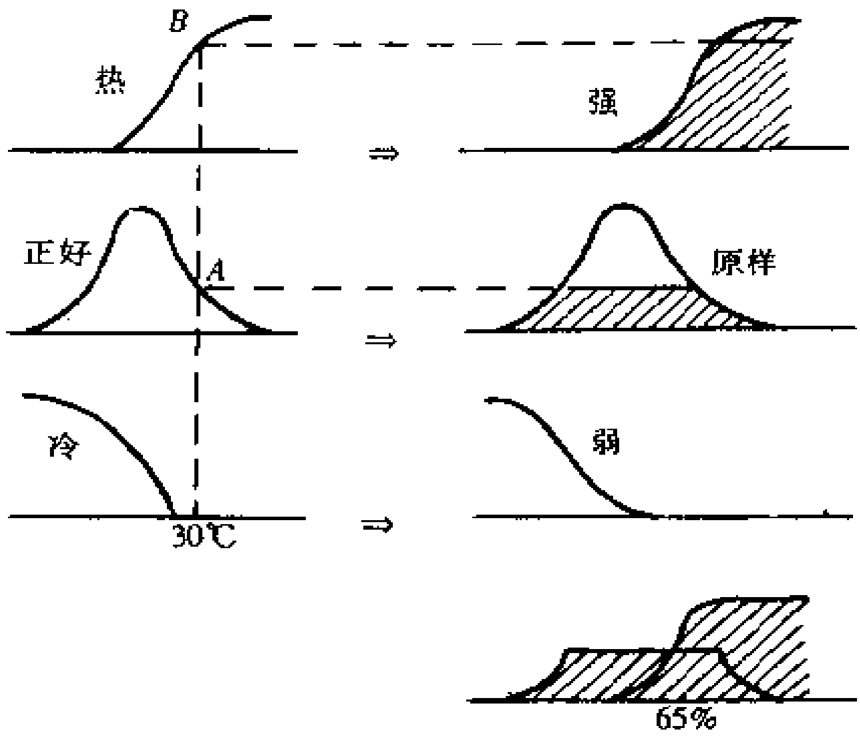


图 1.5　模糊空调器的控制过程

图 1.5 中的三个“⇒”表示三条行为规则。箭头左边是系统状态,箭头右边是控制行为。如果目前的系统状态为 30℃,则在规则 1 与规则 2 的“热”与“正好”的条件的隶属函数对应的交点为 B 与 A,用 B 的高度去截系统控制行为“强”的隶属函数,用 A 的高度去截控制行为“原样”的隶属函数即得两个阴影区域。将这两个阴影区域叠合起来,即得最下边图形上的阴影区域,求这个阴影区域在横坐标轴上的投影重心得到 65%,即是控制行为。

卷曲 65 型空调器的控制系统可以归结为(见图 1.6)

日本三菱重工业公司早在 1989 年 11 月就开始销售应用模糊技术控制的卷曲 65 型空调器,行为规则集在制冷与制热方面有 25 条,它不仅使用了温度差,还使用了温度差的变化。利用温度

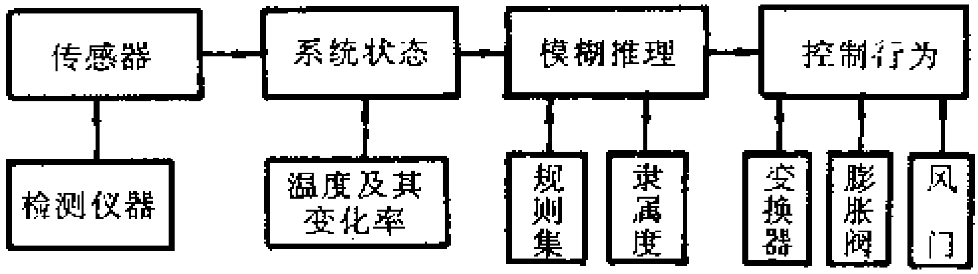


图 1.6　卷曲 65 型空调器模糊控制系统

差及温度差的变化率的“正大”、“负大”、“几乎为 0”的不同的组合，制定出各种行为规则。模糊空调器取得了明显效果。首先，最大效果是室温稳定，对室温的急剧变化反应灵敏。同时消耗的电能减少到原有产品的 76%，而且对于一般空调器改造起来比 PID 投资要少。

例 1.6　研究汽车运行的系统。为了防止与先行车发生冲突，我们有以下的经验规则

规则 1：　如果车间距离大、时速快，那么加速器原封不动；

规则 2：　如果车间距离大、时速慢，那么踏加速器；

规则 3：　如果车间距离小、时速快，加速器迅速退回；

规则 4：　如果车间距离小、时速慢，加速器原封不动；

这些规则称为行为规则集。其中的“大”、“小”、“快”、“慢”、“踏”、“退回”、“原封不动”为模糊概念，可以用模糊集来表示。模糊集“大”及“小”为 30m 区域作为论域区间[0,30]，模糊集“快”与“慢”是以 60km/h 的速度作为区域的论域区间[0,60]，模糊集“踏”、“退回”、及“原封不动”(原样)可以以 100% 作为区域的论域区间[0, 100](见图 1.7)。

图 1.7 中的四个箭头⇒表示四条控制规则。它与例 1.5 控制系统不同的是箭头左边有两个状态。一是与先行车的车间距，二是汽车的时速。前件有两个条件决定后件的一个行为。与例 1.5

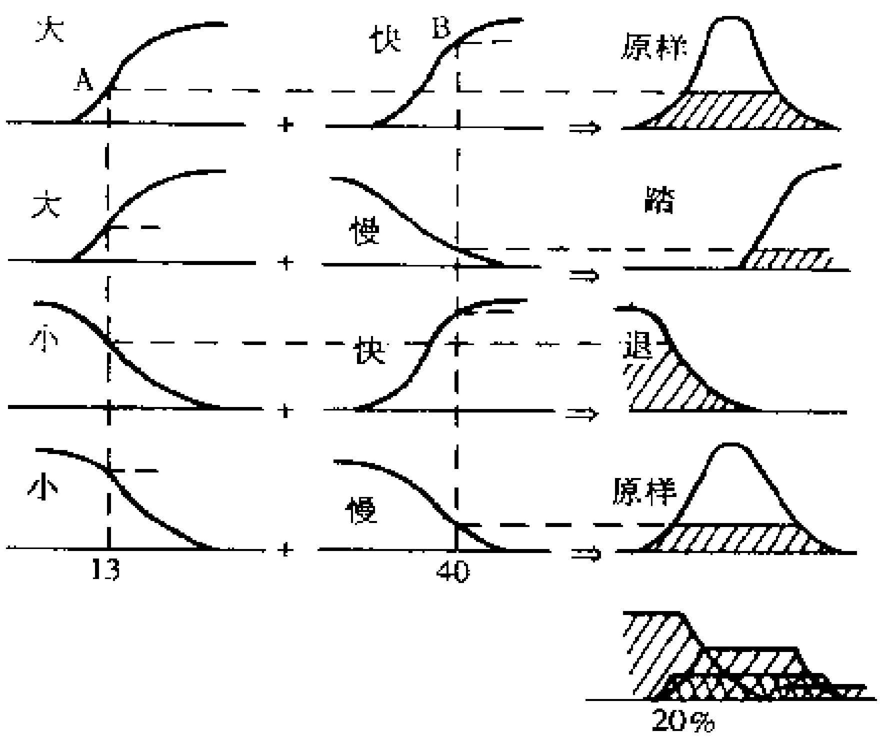


图 1.7　模糊控制汽车运行系统

中处理方法不同的是，前件的两个状态需要进行一次综合处理。比如与先行车距离为 13m，时速为 40km/h，分别与“大”和“快”的隶属函数相交于 A、B 两点，A 的高度低于 B 的高度，对这两个高度取一个最小的值，用这个最小的高度（A 的高度）去截后件“原样”的隶属函数，得到一个阴影区域。对其它三条规则利用同样的方法，在后件的隶属函数上得到四个阴影区域叠合起来，得到最下边的阴影区域，求出叠合阴影区域重心在横坐标轴上的投影，即得 20%，表示“稍退回”的控制行为。

据 1990 年 7 月 18 日日刊《工业新闻》报导，日本 NOK 公司运用模糊集理论开发了汽车用发动机控制装置。该装置不仅适用于汽油、柴油、酒精等多种燃料，而且在高地、寒冷地带也能控制汽车正常行驶。新开发的控制设备以各种传感器发出的信号为基

础，推断最佳燃料喷射量及点火时间，控制喷射器与火花塞。不受发动机种类限制，具有非常广泛的通用性。

由日立公司开发的仙台市地铁模糊控制系统于 1987 年 7 月 15 日开始运行，这种控制系统行驶平稳，停位正确，使乘客感到最大的舒适，并且耗电量减少 10%。

从例 1.5 与例 1.6 中可以看出，模糊控制系统的关键部分是“行为规则集”及“模糊推理算法”两大部分。前一部分是人工操作的经验，后一部分涉及模糊集的运算与理论。作为模糊控制系统，还必须有感知目前状态的传感器系统及控制行为指令的输出执行系统。

传感器系统是通过光电信号对控制对象的目前状态进行测量的系统，控制行为指令输出执行系统是改变控制对象的未来状态系统，它们都是控制器的硬件部分。对于模糊控制系统可以概括为一般模型(图 1.8)。

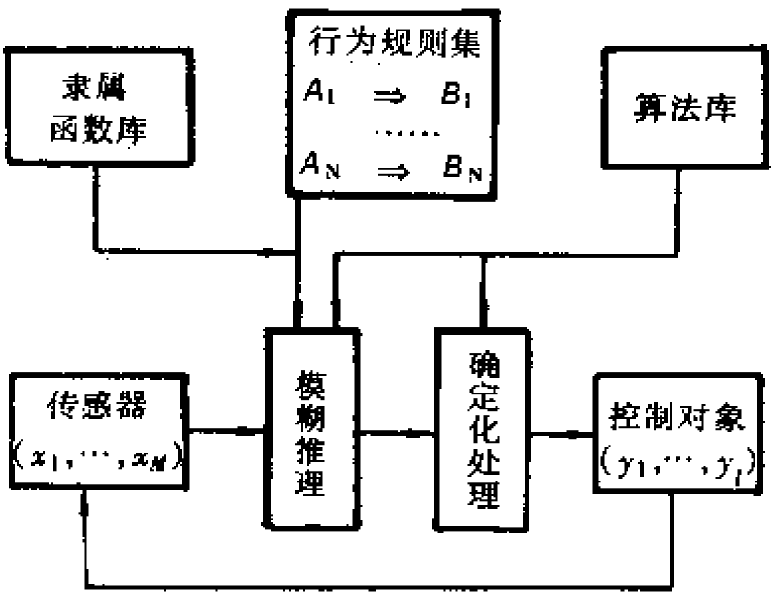


图 1.8 模糊控制系统一般模型

各个方框含义如下：

(1) 传感器 M 个，感应系统的 N 个状态(x_1, …, x_M)。

(2) 行为规则集有规则 N 条："若 A_i，则 B_i"($i \leqslant N$)，是人工操作系统的经验。

(3) 模糊子集隶属函数库是对行为规则中模糊概念的数学理解与定义。

(4) 算法库是处理模糊推理过程中用到的模糊集运算方法，以及将模糊输出处理为确定数值的算法。

(5) 模糊推理是根据(x_1, …, x_M)及行为规则集得到 l 个控制行为的过程。

(6) 模糊推理是根据算法库的某种算法将模糊控制行为转化为确定性控制行为的过程。

(7) 控制对象是系统的控制目标。

图 1.8 的模型是一个最一般的模糊控制系统，其中最重要的是传感器、行为规则集与模糊推理三个部分。

1.4 模糊控制系统的特点

模糊控制系统是利用模糊集理论处理的控制系统，最关键的是"模糊"一词。模糊一词源于英文的 fuzzy，是"含糊"或"朦胧"的意思，它是 fuzz 的形容词。fuzz 是指绒毛，意味着界限不清楚。这样模糊控制系统即是处理像人类语言一样的含有一定模糊性的信息的控制系统。

为了理解模糊的含义，首先要抓住"隶属函数"与"模糊推理"两个术语。

隶属函数是取值在[0,1]上的一个函数，利用隶属函数能以数值表达模糊概念与模糊现象。不管是多么出色的计算机，即使再配上最好的声音识别或文字处理系统，也不能把"大"、"小"、"快"、

“慢”一类指令直接用自然语言输入并加以理解，隶属函数即是输入这些自然语言的一种手段。但是，隶属函数表达的客观模糊信息不完全是客观的，具有一定的主观性，是因人而异的，不同的人对隶属度可以有不同的值。由于隶属函数本身就是用量化的方法处理模糊信息，因此它本身即是精确与模糊巧妙协调的产物。

模糊推理是模糊控制系统的另一个重要术语。模糊推理给出的是行为规则集，即“如果——那么”这样一些规则集，而且这些规则集是用自然语言表述的控制规则。因此，模糊推理是对模糊信息进行处理的方法。

模糊推理使用了“如果——那么”一些自然语言的语句，集中了人工操作的经验。这些自然语句表述的规则是一种经验性的因果关系，而不是因果关系的机理分析。因此，模糊控制系统一般不需要根据机理与分析建立数学模型，这是与计算机控制的一个重大的区别。由于对复杂系统建立数学模型的困难性，使得精确的计算机控制常常脱离实际而失去控制的意义。而模糊推理由于使用了人工操作经验，它通过不精确的控制实现了符合实际的有意义的控制。

通过隶属函数与模糊推理实现的模糊控制系统与以经典的PID控制系统以及现代控制系统有着明显的区别：

(1) 模糊控制系统依赖于行为规则库，没必要建立数学模型；而现代控制系统必须建立控制对象的数学模型。对于PID控制系统，最好有数学模型。

(2) 由于PID控制系统及现代控制系统需要数学模型，控制对象一般适合于线性系统；而模糊控制系统既适合于线性系统，又适合于非线性系统。

(3) 模糊控制系统适合于人的经验的有效控制系统，不擅长定量的高精度控制系统；PID控制系统适合于线性单输入单输出的系统，不擅长非线性迟延系统；现代控制系统擅长于容易建立数

学模型的系统,不擅长于难于决定模型参数的系统。

(4) 模糊控制系统是用行为规则库表示控制规则，有必要进行规则调整,由于是用自然语言表达的规则，这些规则容易被理解；PID 的规则构成是一个公式 ,调整起来比较直观,如果没有经验,难于对规则进行调整；现代控制规则是一组公式,调整规则需要进行理论分析与计算,要理解判别这些规则,需要有高度的数学知识与经验。

(5) 模糊控制系统,对于各种控制对象的行为规则集不同,所以通用性小,对于不同的控制对象需要用人工操作经验建立不同的控制规则；现代控制由于控制对象不同，数学模型也不同,通用性也小；PID 控制系统是一个固定的数学公式,而且可以在现场进行调整,所以通用性大。

PID 控制系统已有了丰富的应用成果，现代控制的成果也比较丰富。而模糊控制系统虽然开始的比较晚,但已取得了明显的效果,并受到了普遍的重视。而且模糊信息经过隶属函数与模糊推理量化处理以后,可以使用计算机，更加速了模糊控制系统的实现。模糊推理硬件的研制与模糊计算机的开发,使得计算机将像人脑那样随心所欲地处理模棱两可的信息，协助人们决策和进行信息处理。

能够处理模糊信息的模糊系统与以往的以符号逻辑为基础的人工智能和知识处理有很大的差别。目前的人工智能都不便处理有模糊性与主观性的信息,一般都是用计算机仿真经验丰富的专家的技术诀窍的专家系统。而使用模糊推理的理论的专家系统更具有本来面目的人工智能的性质,而使人工智能得到迅速发展。

隶属函数与模糊推理是量化模糊信息的手段。把模糊化了的数据再还原为确定的数据,即“非模糊化”,仍然是一个相当深入的问题。至少在目前的控制系统中，“非模糊化”是模糊运算中不可缺少的工具。一般来说，模糊运算的结果是模糊集合,用它不能

直接发布控制指令。为此，应从模糊集合抽取有代表性的数据，使之成为非模糊的确定数据，最常用的方法是最大最小合成重心法，它是通过计算输出隶属函数的重心而得到的。随着控制系统硬件的发展，直接对控制对象施行模糊控制指令也许会是可能的。

利用隶属函数和模糊推理建立的模糊控制系统是一个崭新的控制系统。

1.5 模糊系统的应用与发展前景

模糊控制系统的应用始于伦敦大学的 E. H. Mamdani 教授，他于 1974 年首先开发了对发动机组进行的模糊控制。1980 年，在丹麦对水泥生成炉进行模糊控制获得成功。最重视模糊控制应用的当属日本。在成功应用模糊控制于仙台地铁以及家用电器之后，1989 年 4 月，在通产省的支持下，成立了“国际模糊工程研究所”，作为政府、工业界与高等学校协同合作科研的机构。从 1989 年开始，投资 50 亿日元，进行模糊控制产品系列开发，参加的公司企业有 48 家。

三菱重工研制的模糊空调器是最早投放到市场的模糊家电产品之一，控制稳定且节能达 24%；三菱电气公司将模糊控制运用到电梯群上，使乘电梯的人把等待电梯的平均时间减少了 15%～20%；日立有限公司和松下电器公司推出模糊控制洗衣机，使用方便、节省时间、节约用电，取得了很好的效果；索尼公司生产了模糊控制的电视机，对电视画面的清晰度、亮度和色彩进行适应调节；模糊控制也被用到汽车的自动变速装置，生产过程，以及股票市场的分析系统等。

模糊集理论产生于美国，但在某些应用方面却落后于日本。

这并不是说美国不重视模糊技术的应用，而是应用于不同的方面。1983年，美国加州决策产业公司推出模糊处理的决策支持系统，并在饭店管理和VAX超级小型机管理方面取得了成功。1985年开始研究自动导航的模糊控制器，并用飞行模糊器作了试验，取得了好的性能。在宇航领域，NASA的约翰逊宇航中心在以控制无人飞行器对接的原型系统中利用了模糊控制器。经过仿真试验表明，利用模糊控制器比利用库里斯普规则控制器的性能高出20%以上。此外，还有加州库里克恩公司将模糊集理论应用于潜水艇探测信号分析，以及斯坦福大学和IBM公司为培训放射线专家所建立的模糊专家系统。

不管是在日本，还是在美国，以及其它的一些国家，人与机器发生关系的领域，现正在热火朝天地进行研究开发。运行控制与过程的控制系统，各种诊断与设计的专家系统，声音理解与图象理解的模式识别系统同多传感器的机器人系统，土木建筑系统，管理信息系统等都取得了明显的进展。同时，人与人发生关系的领域，今后也将得到进一步开发。比如经济预测、经营诊断、人事管理、市场调查、服装设计、认知心理、股票证券等系统也将利用模糊技术，比如日本立石电机公司研制的医疗诊断系统，经过三次模糊推理进行诊断，储存了300种病名，采用日本奥姆隆公司开发的模糊专家系统。装备在齿轮加工机床上的模糊故障诊断系统可诊断27种故障，并且可以对知识库进行学习和修正，提高了诊断效果，减少了维修工时。日本京滨高速电铁公司和东芝公司联合开发的模糊自动编排公共汽车运行的系统已投入实用，提高了公共汽车利用率；日本山一证券公司运用模糊集理论开发了证券投资的开发系统，存储了大量股票价格、金融统计、企业财务等数据，以及50名专家的经营诀窍，利用模糊推理判断“买”与“卖”的决策行为，根据过去5年的数据仿真的结果取得了明显的成功，因为这个专家系统超过了每个专家的单独决策；在证券交易方面，日本正

在开发债券及外汇业务方面的应用,美国在开发股票、债券业务方面的应用,欧洲正在推广这些方面的应用。可见模糊系统的应用受到普遍的重视。特别值得提出的是日本欧姆伦公司研制出一种数字模拟技术芯片,每秒钟可进行一千万次模糊推理。他们将作为软件处理的微程序设计手段与高速硬件巧妙结合,从而实现了模糊推理高速化,为模糊计算机的发展奠定了基础。

作为模糊系统进一步开发研究的前景,我们可以从日本国际模糊工程研究所的研究课题有所启发。该研究所有三个研究室,第一研究室研究模糊控制,第二研究室研究模糊智能信息处理,第三研究室研究模糊计算机。模糊控制系统已经取得了丰富成果,方兴未艾。模糊信息处理系统包括决策支持系统,特别是仿真人类处理复杂的智能信息,从语义角度研究模式识别与图象处理,追求目标为从天然遗传因子抽取人的图象。模糊计算机的研制包括模糊计算机的体系结构的硬件,操作系统与语言理解等项目。总之,立足于高度智能化的模糊集理论与应用的研究将是今后一段时间的中心课题(图 1.9)。

高度智能化的模糊系统的理论与模糊计算机的发展,需要模糊集理论研究进一步深入。特别是模糊集理论研究与神经网络相结合,与遗传算法相结合,形成了人工智能中的“软计算”科学。研究自然语言的描述,知识的获取与知识的处理,综合使用人类的知识,模拟人的思维过程的合情推理与发现思维,将会大大促进模糊集理论的发展与提高。

我们也必须指出,模糊控制在应用方面的成功的同时,模糊集理论也面临着严峻的考验。1993 年 7 月在美国华盛顿召开的美国第十一届人工智能年会上,加州大学圣地亚哥分校的 C. Elkan 博士题为“模糊逻辑似是而非的成功”中指出“模糊逻辑方法在许多实际世界应用领域中得到了成功的运用,但是模糊逻辑的基础仍然受到攻击。”1994 年 8 月在《IEEE 专家智能系统及其应用》上

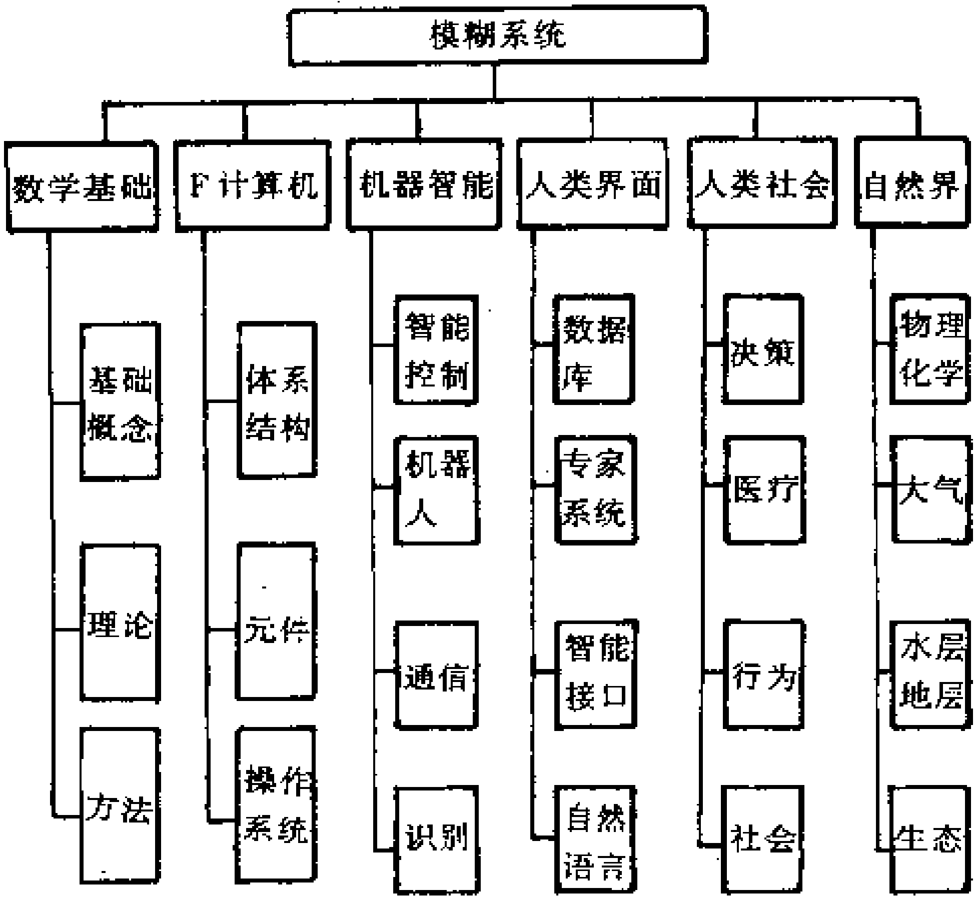


图 1.9 模糊系统研究领域

发表了以 Zadeh 为首约 15 篇文章对 C. Elkan 的文章进行了反驳。这件事本身就说明了模糊集理论的意义以及它必须深入研究的必要性。模糊集理论打开了研究“不确定性”的大门,使定量的方法不仅只描述客观存在的现象,而且把人的主观认识也被包含在定量的研究方法之中,这正是模糊集理论受重视的原因。同时,它对人的主观认识描述的不够有力与不够深入,是使得模糊集理论一直被怀疑的原因。学术界有力的争论将进一步推动以模糊集为代表的“不确定性定量方法”的研究与发展。

第2章　模糊集合的概念与运算

2.1　模糊集合的运算及其性质

首先我们介绍经典集合的基本概念。为方便起见，我们把所考虑的对象限制在一个特殊的集合，比如某班学生、全体实数、平面上的点等。称这个集合为基本集合或论域，以X记之。X中的一部分称为X的子集，常以A，B，C，…记之，X中的对象为元素，以x记之。若x属于A，记作$x\in A$。若x不属于A，记作$x\notin A$。以$\varnothing$表示空集，X表示全集。

设A，B是X中的两个子集，若$x\in A$时必有$x\in B$，称集合A含于B，或B包含A，记作$A\subset B$。显然包含关系具有以下的性质：

(1) $A\subset A$　　（自反性）

(2) 若$A\subset B$，$B\subset A$，则$A=B$　　（对称性）

(3) 若$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$　　（传递性）

对于X中的两个子集A与B定义运算

$$A\cup B=\{x;\quad x\in A\text{ 或 }x\in B\} \tag{2.1}$$

$$A\cap B=\{x;\quad x\in A\text{ 且 }x\in B\} \tag{2.2}$$

$A\cup B$，$A\cap B$分别称为A与B的并集与交集，对于X中的子集A定义补集为

$$A^c=\{x;\quad x\notin A\} \tag{2.3}$$

显然互补律成立，即

$$A\cup A^c=X,\quad A\cap A^c=\varnothing \tag{2.4}$$

对于X中任意子集A，记

$$A(x)=\begin{cases}0, & x\notin A\\ 1, & x\in A\end{cases}$$

则称 A(x)为集合 A 的特征函数。$x\in A$ 当且仅当 $A(x)=1$，$x\notin A$ 当且仅当 $A(x)=0$。因此 A(x)表示 x 隶属于集合 A 的程度，也可称 A(x)为 A 的隶属函数。

定义 2.1 映射 A：$X\to[0,1]$称为模糊子集，简称为 F 集。$A(x)$称为 x 相对于 F 集 A 的隶属度。$A(\cdot)$称为 F 集 A 的隶属函数。

我们比较下面两个集合，其中论域 $X=[0,100]$

$$A=\{x;\quad x \text{ 不超过 } 25 \text{ 岁}\}$$

$$A=\text{“年轻的人”}$$

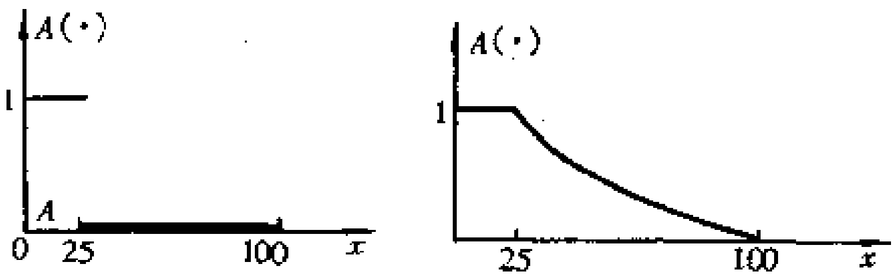


图 2.1 经典子集与模糊子集

在图 2.1 中，A(·)表示年龄不超过 25 岁人的集合 A 的特征函数，$A(\cdot)$表示“年轻人”的模糊子集 A 的隶属函数。特征函数的取值域为$\{0,1\}$，隶属函数的取值域为$[0,1]$。

定义 2.2 设 A，B 是 X 上的两个模糊子集，如果 $\forall x\in X$，有 $A(x)\leqslant B(x)$，称 A 含于 B，或 B 包含 A，并记 $A\subset B$。若 $\forall x\in X$，$A(x)=B(x)$，称 A 等于 B，记作 $A=B$。

$\varnothing$表示隶属函数恒为 0 的模糊子集，X 表示隶属函数恒为 1 的模糊子集，则有性质：

(1) $\varnothing \subset A \subset X$ （最大，最小F集存在性）

(2) $A \subset A$ （自反性）

(3) 若 $A \subset B$，$B \subset A$，则 $A = B$ （对称性）

(4) 若 $A \subset B$，$B \subset C$，则 $A \subset C$ （传递性）

定义 2.3 设 A，B 为 X 上的两个模糊子集，$A(\cdot)$，$B(\cdot)$分别为 A 及 B 的隶属函数。A 与 B 的并集 $A \cup B$ 的隶属函数为

$$(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x) = \max\{A(x), B(x)\} \tag{2.5}$$

A 与 B 的交集 $A \cap B$ 的隶属函数为

$$(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x) = \min\{A(x), B(x)\} \tag{2.6}$$

其中 max 表示取最大值，min 表示取最小值。A 的补集 A^c 的隶属函数为

$$A^c(x) = 1 - A(x) \tag{2.7}$$

例 2.1 假定 X=$\{1,2,3,4\}$上有两个模糊子集为

$$A = 1/1 + 0.8/2 + 0.6/3 + 0.4/4$$

$$B = 0.3/1 + 0.5/2 + 0.7/3 + 0.9/4$$

则有

$$A \cup B = 1/1 + 0.8/2 + 0.7/3 + 0.9/4$$

$$A \cap B = 0.3/1 + 0.5/2 + 0.6/3 + 0.4/4$$

$$A^c = 0/1 + 0.2/2 + 0.4/3 + 0.6/4$$

$$B^c = 0.7/1 + 0.5/2 + 0.3/3 + 0.1/4$$

例 2.2 设 X=[0,3]，且(见图 2.2)

$$A(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leqslant 2 \\ 0, & 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x - 1, & 1 < x \leqslant 2 \\ 3 - x, & 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

于是

$$(A\cup B)(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x, & 1<x\leqslant 1.5\\ x-1, & 1.5<x\leqslant 2\\ 3-x, & 2<x\leqslant 3\end{cases}$$

$$(A\cap B)(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 0<x\leqslant 1.5\\ 2-x, & 1.5<x\leqslant 2\\ 0, & 2<x\leqslant 3\end{cases}$$

$$A^c(x)=\begin{cases}1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-1, & 1<x\leqslant 2\\ 1, & 2<x\leqslant 3\end{cases}$$

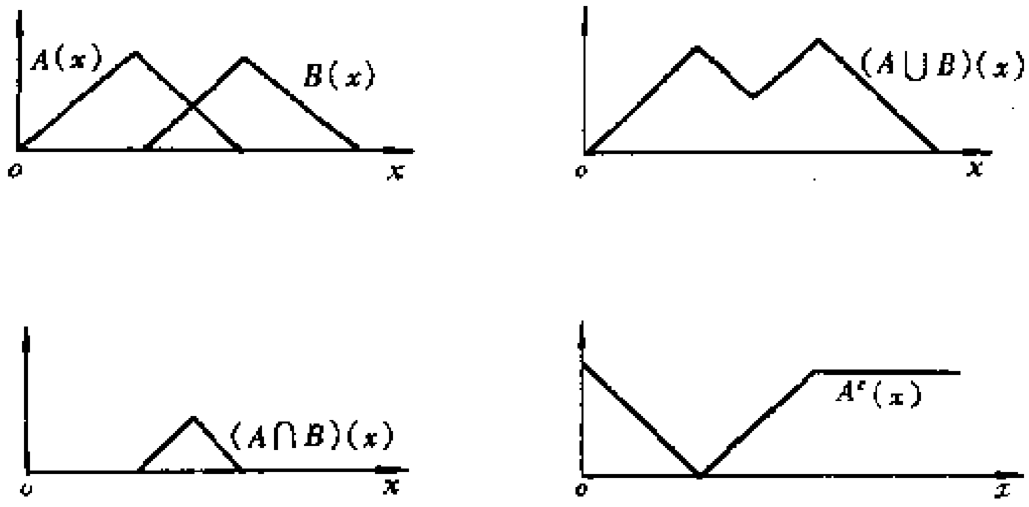


图 2.2　模糊集运算示意图

由例 2.2 可见,一般来说未必有

$$A\cup A^c=X,\quad A\cap A^c=\varnothing$$

即对于模糊子集来说互补律未必成立。模糊集合运算不符合互补律,对模糊集合的研究带来了许多困难,但也正是它不满足互补律,使模糊集合比经典集合更能够客观地反映模糊信息。事实上,

在许多实际问题中，大量存在着这种模棱两可的情况，人们人为的把它限定为界限清楚的集合必然使问题过于简化，有时甚至失去意义。

定义 2.4 设 $A_1,\cdots, A_n$ 是 X 上的 n 个模糊子集，若存在 $r \leqslant n$，使得

$$A_r(x_0)=\max_{k\leqslant n}A_k(x_0)$$

称 x_0 相对隶属于 A_r。

这即是模糊集合的最大隶属原则。

例 2.3 用 A_1 及 A_2 分别表示"不热"和"不冷"，$X=[0,40]$，A_1 及 A_2 的隶属函数分别为

$$A_1(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant 15℃\\ \left[1+\left(\dfrac{x-15}{10}\right)^4\right]^{-1}, & 15℃<x\leqslant 40℃\end{cases}$$

$$A_2(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 10℃\\ \left[1-\left(\dfrac{x-10}{2}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 10℃<x\leqslant 40℃\end{cases}$$

则 $A_3=A_1\cap A_2$ 表示"暖和"(图 2.3)。

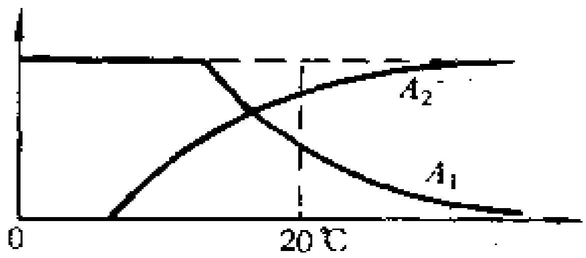


图 2.3 最大隶属原则示意图

若 $x=20℃$，则

$$A_1(20)=\frac{16}{17},\ A_2(20)=\frac{25}{26}$$

$$A_3(20)=\min\left(\frac{16}{17},\frac{25}{26}\right)=\frac{16}{17}$$

于是 20℃ 相对隶属“不冷”。

最大隶属原则在模式识别中有着重要的应用。

2.2　模糊集合的基本定理

模糊集合是经典集合的扩充，它与经典集合有着密切的关系。表现模糊集合与经典集合关系的是模糊集合的分解定理、表现定理与扩张定理。

定义 2.5　设 A 是 X 上的模糊集，对于任意 $\alpha\in[0,1]$，称

$$A_\alpha=\{x;\quad A(x)\geqslant\alpha\}$$

为 A 的 α 水平集。

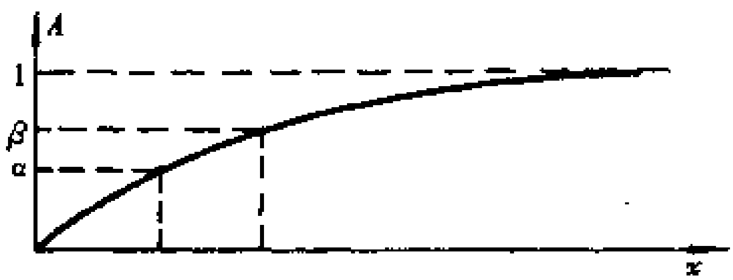


图 2.4　模糊集合的 α 水平集

定理 2.1　A 的 α 水平集 $A_\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant1)$ 具有性质

(1) $A_0=X$

(2) $\alpha<\beta$ 时有 $A_\beta\subset A_\alpha$

(3) $A_{\sup_n \alpha_n}=\bigcap_n A_{\alpha_n}$

其中 sup 表示一组数的上确界，具体说来即是

$b=\sup B$ 表示以下性质成立：

(1) $x\in B$ 时，$x\leqslant b$；

(2) 若 $a<b$,必有 $x\in B$,且 $x\geqslant a$。若B为有限集,则 b 表示B中最大值。

证明 (1)与(2)显然,现证(3)。若 $x\in A_{\alpha_n}(n\geqslant 1)$,则 $A(x)\geqslant\alpha_n(n\geqslant 1)$,从而 $A(x)\geqslant\sup\alpha_n$,即 $x\in A_{\sup\limits_n \alpha_n}$,于是 $\bigcap\limits_n A_{\alpha_n}\subset A_{\sup\limits_n \alpha_n}$。相反的包含关系由(2)即证。

对于模糊集合运算的 α 水平集有性质:

$$(A\cup B)_\alpha = A_\alpha\cup B_\alpha$$

$$(A\cap B)_\alpha = A_\alpha\cap B_\alpha$$

定理 2.2 (模糊集的分解定理)对于X中任意模糊子集 A 与它的 α 水平集 $A_\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$有关系

$$A(x)=\sup\{\alpha;\quad x\in A_\alpha\}$$

证明 显然。

定理 2.3 若 A,B 为X上的模糊子集,则 $A\subset B$ 的充要条件为 $A_\alpha\subset B_\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$。

证明 若 $A\subset B$,则 $A(x)\leqslant B(x)(x\in X)$,于是 $A_\alpha\subset B_\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$。若 $A_\alpha\subset B_\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$,由定理2.2有

$$A(x)=\sup\{\alpha;\quad x\in A_\alpha\}\leqslant\sup\{\alpha;\quad x\in B_\alpha\}=B(x)$$

则 $A\subset B$。

我们也可定义。

$$A_{\dot\alpha}=\{x;\quad A(x)>\alpha\}\qquad(0\leqslant\alpha<1)$$

称 $A_{\dot\alpha}$为 A 的弱 α 水平集,对于弱 α 水平集有类似于 α 水平集的性质。比如分解定理仍然成立,即

$$A(x)=\sup\{\alpha;\quad x\in A_{\dot\alpha}\}$$

由以上定理可知,模糊集合 A 对应着一个经典集合序列 $A_\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$,通过集合序列的性质可以研究模糊集合。

定义 2.6 若对于任意 $\alpha\in[0,1]$对应着X中子集 $H(\alpha)$,且

具有性质：

(1) $H(0)=X$

(2) $\alpha<\beta$ 时，$H(\beta)\subset H(\alpha)$

称 $H(\alpha)(0\leqslant\alpha\leqslant1)$ 为集合套。

定理 2.4 若 $H(\alpha)(0\leqslant\alpha\leqslant1)$ 为 X 上的集合套，则得到 X 上的模糊集

$$A(x)=\sup\{\alpha;\quad x\in H(\alpha)\}$$

且有以下性质：

(1) $A_{\underline{\alpha}}\subset H(\alpha)\subset A_\alpha\quad(0\leqslant\alpha<1)$

(2) $A_\alpha=\bigcap\limits_{\lambda<\alpha}H(\lambda)$

(3) $A_{\underline{\alpha}}=\bigcup\limits_{\lambda>\alpha}H(\lambda)$

证明 A 是 X 上的模糊子集是显然的。由模糊集合的分解定理有

$$A(x)=\sup\{\alpha;\quad x\in A_\alpha\}=\sup\{\alpha;\quad x\in A_{\underline{\alpha}}\}$$

若 $x\in A_{\underline{\alpha}}$，则 $A(x)>\alpha$，于是存在 $\lambda\geqslant\alpha$，使得 $x\in H(\lambda)$，从而得到 $x\in H(\alpha)$。若 $x\in H(\alpha)$，则 $A(x)\geqslant\alpha$，$x\in A_\alpha$，则证(1)。由(1)易证 $\bigcap\limits_{\lambda<\alpha}H(\lambda)\supset A_\alpha$，若 $\lambda<\alpha$，$x\in H(\lambda)$，则 $A(x)\geqslant\lambda$，于是 $A(x)\geqslant\alpha$，即证 $\bigcap\limits_{\lambda<\alpha}H(\lambda)\subset A_\alpha$，则证(2)，(3)类似于(2)可证。

定理 2.5 （模糊集合的表现定理）若 X 上的集合套 $H(\alpha)(0\leqslant\alpha\leqslant1)$ 满足

$$H(\sup\lambda_n)=\bigcap_n H(\lambda_n)$$

其中 $\{\lambda_n;\quad n\geqslant1\}\subset[0,1]$ 为任意的，则

$$A(x)=\sup\{\alpha;\quad x\in H(\alpha)\}$$

时有 $H(\alpha)=A_\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant1)$，即 H 确定了唯一的模糊集合。

证明 由定理 2.4，$H(\alpha)\subset A_\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant1)$。下面只须证明

$$A_\alpha\subset H(\alpha)\quad(0\leqslant\alpha\leqslant1)$$

若 $x\in A_\alpha$，则 $A(x)\geqslant\alpha$，于是存在 $\alpha_n\in[0,1]$，使 $\alpha_n\uparrow\alpha$，且 $x\in \mathrm{H}(\alpha_n)$。从而 $x\in\bigcap\limits_n \mathrm{H}(\alpha_n)=\mathrm{H}(\sup\alpha_n)=\mathrm{H}(\alpha)$，则证。

定义 2.7 设 f 是 X 到 Y 的映射，A 为 X 上的模糊子集，则 Y 上的模糊子集

$$f(A)(y)=\sup\{A(x);\quad f(x)=y\} \tag{2.8}$$

为由 f 诱导的模糊子集。

定理 2.6 （模糊集合的扩张定理）若 f 是 X 到 Y 的映射，A 为 X 上的模糊子集，则

$$f(A)(y)=\sup\{\alpha;\quad y\in f(A_\alpha)\} \tag{2.9}$$

其中

$$f(A_\alpha)=\{y;\quad \text{存在 } x\in A_\alpha,\quad \text{使 } y=f(x)\}$$

若 f 是满射，即 $f(\mathrm{X})=\mathrm{Y}$，则

$$f(A_\alpha)=f(A)_\alpha \tag{2.10}$$

证明 由于

$$\begin{aligned}
&\sup\{\alpha;\quad y\in f(A_\alpha)\}\\
&=\sup\{\alpha;\quad \text{存在 } x\in A_\alpha,\text{使 } y=f(x)\}\\
&=\sup\{\sup\{\alpha;\quad x\in A_\alpha\};\ y=f(x)\}\\
&=\sup\{A(x);\quad y=f(x)\}=f(A)(y)
\end{aligned}$$

则证(2.9)。下面证明(2.10)成立。设

$$\mathrm{H}(\alpha)=f(A_\alpha)\quad(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$$

由 $f(\mathrm{X})=\mathrm{Y}$，易证 $\mathrm{H}(0)=f(A_0)=f(\mathrm{X})=\mathrm{Y}$。若 $\alpha<\beta$，由 $A_\beta\subset A_\alpha$，则易证 $\mathrm{H}(\beta)\subset\mathrm{H}(\alpha)$，即 $\mathrm{H}(\alpha)(0\leqslant\alpha\leqslant1)$ 为集合套。取 $\{\alpha_n;\ n\geqslant1\}\subset[0,1]$，且 $\alpha=\sup\{\alpha_n;\quad n\geqslant1\}$，则

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(\alpha)=f(A_\alpha)&=\{f(x);\quad x\in A_\alpha\}\\
&=\{f(x);\quad A(x)\geqslant\sup_n\alpha_n\}\\
&=\bigcap_n\{f(x);\quad A(x)\geqslant\alpha_n\}\\
&=\bigcap_n f(A_{\alpha_n})=\bigcap_n\mathrm{H}(\alpha_n)
\end{aligned}$$

由(2.9)及定理 2.5 则证。

例 2.4 设 X=Y=Z=R，A、B 为 X，Y 上的模糊集，$z=x+y$ 是 X×Y 到 Z 的映射，于是我们可以得到模糊集合的加法

$$(A+B)(z)=\sup\{A(x)\wedge B(y);\quad z=x+y\} \tag{2.11}$$

且此时有

$$(A+B)(z)=\sup\{\alpha;\quad x\in(A+B)_\alpha\}$$

也即

$$(A+B)(z)=\sup\{\alpha;\quad x\in(A_\alpha+B_\alpha)\} \tag{2.12}$$

而且

$$(A+B)_\alpha=A_\alpha+B_\alpha\quad(0\leqslant\alpha\leqslant 1) \tag{2.13}$$

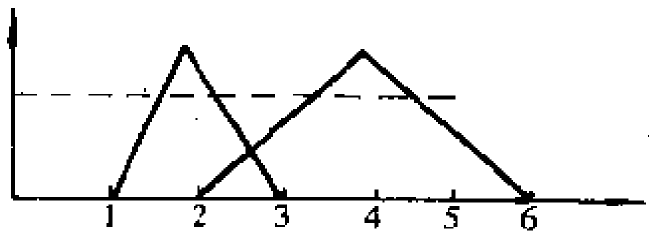


图 2.5 模糊集合的加法

比如用 **2** 表示取值近似 2 的模糊数(见图 2.5)，即

$$\mathbf{2}=\int_1^2(\mathrm{x}-1)/\mathrm{x}+\int_2^3(3-\mathrm{x})/\mathrm{x}$$

则

$$\mathbf{2}+\mathbf{2}=\int_2^4\left(\frac{x}{2}-1\right)\Big/x+\int_4^6\left(3-\frac{x}{2}\right)\Big/x=\mathbf{4}$$

由 α 水平集的定义

$$(\mathbf{2})_{0.5}=[1.5,\quad 2.5]$$

$$(\mathbf{2}+\mathbf{2})_{0.5}=[3,\quad 5]$$

从而得到

$$(\mathbf{2}+\mathbf{2})_{0.5}=(\mathbf{2})_{0.5}+(\mathbf{2})_{0.5}$$

定义 2.8 称 R 上的模糊集 A 为模糊数，如果对于任意的 $\alpha\in(0,1]$，A_α 为非空闭区间。

容易看到例 2.4 中的模糊集 **2** 有 α 水平集

$$(\mathbf{2})_\alpha=[1+\alpha,3-\alpha] \qquad (0<\alpha\leqslant 1)$$

且$(\mathbf{2})_0=(1,3)$，则 **2** 为模糊数。(2.11)与(2.12)即是模糊数的加法。

定理 2.7 模糊数具有以下性质：

(1) 至少存在 $x_0\in\mathrm{R}$，使得 $A(x_0)=1$

(2) $\forall\, x,y\in\mathrm{R}$，及 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 有

$$A(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant\min(A(x),A(y))$$

性质(1)称为正则性，性质(2)称为凸性。

例 2.5 若从 R 到[0,1]的映射 L 满足 $L(0)=1$，$L(x)=L(-x)$，且在$(0,+\infty)$是连续的减函数，则 $L(x)$为模糊数。比如

$$L(x)=\frac{1}{1+x^2} \qquad (-\infty<x<\infty)$$

为模糊数。若 L_1 及 L_2 是满足上面性质的两个模糊数，则

$$A(x)=\begin{cases} L_1\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right), & x\leqslant m \\ L_2\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right), & x\geqslant m \end{cases}$$

为模糊数。

模糊数在近似推理与模糊控制中有着重要应用。

2.3 模糊关系与模糊关系方程

设 X 与 Y 为两个论域,记

$$X \times Y = \{(x, y);\quad x \in X,\quad y \in Y\}$$

称 X×Y 为 X、Y 的笛卡儿乘积。X×Y 表示了 X 与 Y 中元素相互搭配成对的全体。若 $R \subset X \times Y$,称 R 为 X 到 Y 的经典关系。若 $(x, y) \in R$,记作 xRy,称为 x 对 y 有关系 R;若 $(x, y) \notin R$,记作 $x\bar{R}y$,称 x 对 y 没有关系 R。若 $R \subset X \times X$,称 R 为 X 上的关系。

若 R 是 X 到 Y 的关系,S 是 Y 到 Z 的关系,由 R 和 S 可以得到 X 到 Z 的复合关系:

$$R \circ S = \{(x, z);\quad 存在\ y \in Y, 使\ xRy, ySz\} \tag{2.14}$$

例 2.6 设 X= {1,2,3,4},Y= {a,b,c},Z= {α,β},X 到 Y 的关系 R 及 Y 到 Z 的关系 S 可表示为图 2.6。

图 2.6 中两个元素之间有连线的表示有关系。比如 1 和 a 之间有关系 R, a 和 β 之间有关系 S。3 与 a 之间无关系 R,b 与 α 之间无关系 S。根据(2.14)可以得到 R 与 S 的在 X×Z 上的复合关系(图 2.7)。

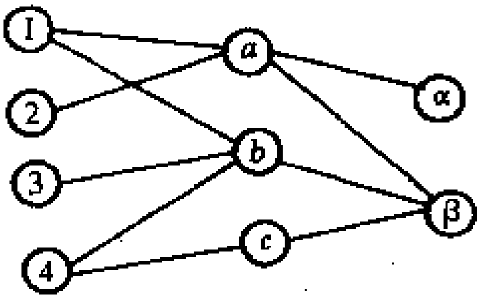


图 2.6　X×Y 及 Y×Z 上的关系

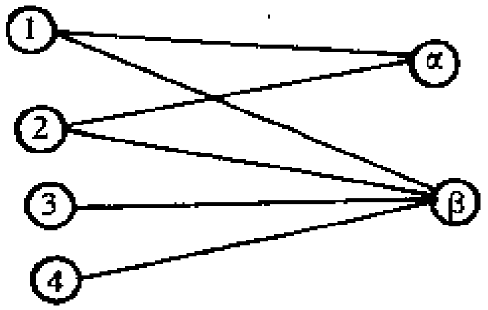


图 2.7　关系的复合运算

对于经典关系可以表示为表格(表 2.1)。

表 2.1 经典关系的表格表示

X\Y	a	b	c
1	1	1	0
2	1	0	0
3	0	1	0
4	0	1	1

Y\Z	α	β
a	1	1
b	0	1
c	0	1

X\Z	α	β
1	1	1
2	1	1
3	0	1
4	0	1

定义 2.9 设 X 与 Y 为两个论域，X×Y 为 X 与 Y 的笛卡儿乘积，X×Y 上的模糊子集 R 称为 X 到 Y 的模糊关系。对于 X 到 Y 的模糊关系 R，R_1 和 R_2，记

(1) $R_1 \subset R_2 \Leftrightarrow R_1(x,y) \leqslant R_2(x,y) \quad (x \in X, y \in Y)$

(2) $(R_1 \cup R_2)(x,y) = R_1(x,y) \vee R_2(x,y)$

(3) $(R_1 \cap R_2)(x,y) = R_1(x,y) \wedge R_2(x,y)$

(4) $R^{-1}(y,x) = R(x,y)$

若 S 为 Y 到 Z 的模糊关系，R 与 S 的复合关系为

$$(R \circ S)(x,z) = \sup_{y \in Y}(R(x,y) \wedge S(y,z)) \tag{2.15}$$

例 2.7 设 X＝{1,2,3,4}，Y＝{a,b,c}，Z＝{α,β}，X×Y 及 Y×Z 上的模糊关系 R 与 S 如图 2.8、图 2.9。

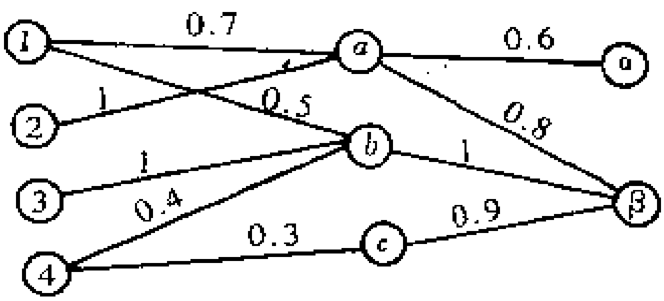


图 2.8 X×Y 与 Y×Z 上的模糊关系

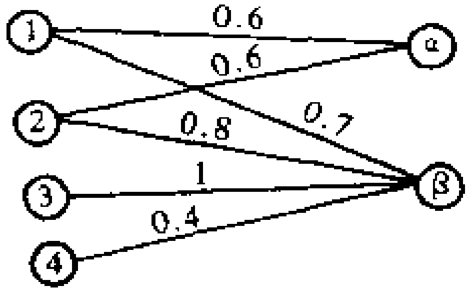


图 2.9 模糊关系的复合运算

图 2.9 中两个元素之间有连线的表示两个元素之间有一定关系，连线上的数字表示关系密切程度。

对于模糊关系也可以表示为表格(表 2.2)。

表 2.2 模糊关系的表格式表示

X \ Y	a	b	c
1	0.7	0.5	0
2	1.0	0	0
3	0	1.0	0
4	0	0.4	0.3

Y \ Z	α	β
a	0.6	0.8
b	0	1.0
c	0	0.9

X \ Z	α	β
1	0.6	0.7
2	0.6	0.8
3	0	1.0
4	0	0.4

从模糊关系的表格表示得到启发，可将模糊关系表示为矩阵，模糊关系复合运算类似于矩阵的乘法。只是将两数相乘用取最小值来代替，两数相加用取最大值来代替。

$$R \circ S = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0 & 1.0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.7 \\ 0.6 & 0.8 \\ 0 & 1.0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

例 2.8 用 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ 表示病人集合，$Y = \{y_1, y_2, y_3,$

$y_4, y_5\}$表示病人症状集合，$Z=\{z_1, z_2, z_3\}$表示病名集合。已知 X 与 Y 的关系为

$$Q=\begin{bmatrix} 0.1 & 0.8 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.8 \\ 0.8 & 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Y 与 Z 的关系为

$$R=\begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 1.0 \\ 1.0 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 1.0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

则得到 X 与 Z 的关系为

$$S=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 & 0.7 \\ 0.3 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$

在这里 R 是一个医学诊断知识库，表明了症状与病名之间的关系。

一般地，记

$$Q=(q_{ij};\quad i\leqslant n, j\leqslant m)$$
$$R=(r_{jk};\quad j\leqslant m, k\leqslant p)$$
$$S=(s_{ik};\quad i\leqslant n, k\leqslant p)$$

若 R 是未知的，称

$$Q\circ R=S \tag{2.16}$$

为模糊关系方程。可以更清楚地表示为

$$(q_{i1}\wedge r_{1j})\vee(q_{i2}\wedge r_{2j})\cdots(q_{im}\wedge r_{mj})=s_{ij}(i\leqslant n, j\leqslant p)$$

若 R 满足(2.16)，称 R 为模糊关系方程的解。

对于任意 $a, b\in[0,1]$，记

$$a\alpha b=\sup\{x;\quad a\wedge x\leqslant b\}$$

则

$$a\alpha b=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\ b, & a>b\end{cases}$$

易见 $a\alpha b$ 具有以下性质。

(1) $a\alpha(b\vee c)\geqslant a\alpha b$

(2) $a\wedge(a\alpha b)\leqslant b$

(3) $a\alpha(a\wedge b)\geqslant b$

对于两个模糊关系 $R=(r_{jk};j\leqslant m,k\leqslant p)$ 及 $Q=(q_{ij};i\leqslant n,j\leqslant m)$可以建立 α 复合运算

$$Q\,\alpha R=S$$

其中

$$s_{ik}=\inf_j(q_{ij}\alpha r_{jk})$$

可以通过下面的计算理解 α 复合运算的意义

$$\begin{pmatrix}0.3 & 0.7\\ 0.9 & 0.5\\ 0.4 & 0.1\end{pmatrix}\alpha\begin{bmatrix}0.8 & 0.7 & 0.8\\ 0.5 & 0.4 & 0.9\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.4 & 1.0\\ 0.8 & 0.4 & 0.8\\ 1.0 & 1.0 & 1.0\end{pmatrix}$$

定理 2.8 若模糊关系方程(2.16)有解,则

$$R^{*}=Q^{-1}\alpha S$$

必为解,且是所有解中的最大解。即当 R 也为(2.16)的解时必有 $R\subset R^{*}$。

证明 首先需要证明

$$R\subset Q^{-1}\alpha(Q\circ R) \tag{2.17}$$

$$Q\circ(Q^{-1}\alpha S)\subset S \tag{2.18}$$

用 $u_{jk}(j\leqslant m,k\leqslant p)$表示 $Q^{-1}\alpha(Q\circ R)$中元素,则

$$\begin{aligned}u_{jk}&=\inf_i(q_{ji}^{-1}\alpha(\bigvee_l(q_{il}\wedge r_{lk})))\\ &\geqslant\inf_i(q_{ij}\alpha(q_{ij}\wedge r_{jk}))\geqslant r_{jk}\end{aligned}$$

于是(2.17)得证。若用 v_{ik}表示 $Q\circ(Q^{-1}\alpha S)$中元素,则

$$v_{ik} = \sup_j (q_{ij} \wedge (\inf_l (q_{jl}^{-1} \alpha s_{lk})))$$
$$\leqslant \sup_j (q_{ij} \wedge (q_{ji}^{-1} \alpha s_{ik}))$$
$$= \sup_j (q_{ij} \wedge (q_{ij} \alpha s_{ik})) \leqslant s_{ik}$$

于是(2.18)得证。若 R 是(2.16)的解，则

$$Q \circ R = S$$

由(2.17)即得

$$R \subset Q^{-1} \alpha S = R \tag{2.19}$$

由(2.18)即证

$$S = Q \circ R \subset Q \circ R^* \subset S$$

于是

$$Q \circ R^* = Q \circ R = S$$

则证 R^* 为(2.16)的解，且由(2.19)即得 R^* 为最大解。

例 2.9(续例 2.8)　在例 2.7 中若 Q 和 S 是已知的，可以计算

$$Q^{-1} \alpha S = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.8 \\ 0.8 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 & 0.7 \\ 0.3 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.1 \\ 1.0 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 1.0 & 0.7 \end{pmatrix}$$

得到 $Q \circ R = S$ 的最大解 R^*。

由例 2.8 可知，若已知某些病人的症状和病名，可以得到知识库，再通过知识库诊断新的病人。

2.4 模糊测度与模糊积分

模糊测度与模糊积分是由 M.Sugeno 于 1970 年提出来的，它与 G.Shafer 于 1965 年提出的证据理论有着密切关系。这些理论对于模糊评价及专家系统有着重要意义。

设 X 是一个有限集合，不妨记为

$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$$

定义 2.10 对于 X 中任意子集 A，有取值于区间[0,1]中的数 $\mu(A)$相对应，且满足

(1) $\mu(\varnothing)=0,\quad \mu(X)=1$

(2) 当 $A\subset B$ 时有 $\mu(A)\leqslant\mu(B)$

称 μ 为模糊测度。

显然概率测度是模糊测度，模糊测度只要求正则性和单调性，并不要求有可加性。

例 2.10 设 $g_i=g\{x_i\}\in[0,1]$，且

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda g_i)=1+\lambda$$

则当 $-1<\lambda<\infty(\lambda\neq0)$时，对于 $g_\lambda(\varnothing)=0$ 及

$$g_\lambda(A)=\frac{1}{\lambda}\Big[\prod_{x_i\in A}(1+\lambda g_i)-1\Big]\quad(A\subset X)\tag{2.20}$$

为模糊测度。

首先易证 $g_\lambda(X)=1$。由于

$$(a-1)+(b-1)+(a-1)(b-1)=ab-1$$

对于 $A,B\subset X$，当 $A\cap B=\varnothing$时易证

$$\begin{aligned}g_\lambda(A\cup B)&=\frac{1}{\lambda}\Big[\Big(\prod_{x_i\in A}(1+\lambda g_i)\Big)\Big(\prod_{x_i\in B}(1+g_i)\Big)-1\Big]\\&=g_\lambda(A)+g_\lambda(B)+\lambda g_\lambda(A)g_\lambda(B)\end{aligned}\tag{2.21}$$

若 $A\subset B$，利用(2.21)可证

$$g_\lambda(B)=g_\lambda(A)+g_\lambda(B-A)(1+\lambda g_\lambda(A))$$

由于 $\lambda>-1$，$0\leqslant g_\lambda(A)\leqslant 1$，则$(1+\lambda g_\lambda(A))\geqslant 0$，于是 $g_\lambda(B)\geqslant g_\lambda(A)$,即 g_λ 为模糊测度。

对于 X 中任意子集 A,有取值[0,1]上的数 $m(A)$对应,且满足

(1) $m(\varnothing)=0$

(2) $\sum\limits_{A\subset X} m(A)=1$

称 m 为 mass 函数。记

$$b(A)=\sum_{B\subset A} m(A) \tag{2.22}$$

则 b 为模糊测度,且满足

$$b(A_1\cup A_2)\geqslant b(A_1)+b(A_2)-b(A_1\cap A_2) \tag{2.23}$$

称(2.22)为信任测度。记

$$l(A)=\sum_{B\cap A\neq\varnothing} m(B) \tag{2.24}$$

则 l 也为模糊测度,且满足

$$l(A_1\cap A_2)\leqslant l(A_1)+l(A_2)-l(A_1\cup A_2) \tag{2.25}$$

称(2.24)为似然测度。由(2.22)及(2.24)易见

$$l(A)=1-b(A^c) \tag{2.26}$$

对于 g_λ 测度(2.20),记 $m(\varnothing)=0$,及

$$m(B)=\lambda^{|B|-1}\prod_{x_i\in B} g_i$$

其中$|B|$表示 B 中元素个数,易证

$$g_\lambda(A)=\sum_{B\subset A} m(B) \tag{2.27}$$

当 $\lambda>0$ 时,m 为 mass 函数,且 g_λ 为信任测度。

例 2.11 设 A 为 X 上的隶属函数,且有 $x_0\in X$,使 $A(x_0)=1$,记

$$\Pi(A)=\sup_{x\in A} A(x) \tag{2.28}$$

则 Π 为似然测度,且有性质

$$\Pi(A_1 \cup A_2) = \max(\Pi(A_1), \Pi(A_2)) \tag{2.29}$$

称 Π 为可能性测度。如果记

$$N(A) = 1 - \sup_{x \notin A} A(x)$$

则 N 为信任测度，且有性质

$$N(A) = 1 - \Pi(A^c)$$

从而

$$N(A_1 \cap A_2) = \min(N(A_1), N(A_2))$$

称 N 为必然测度。

例 2.12 设 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$，$A$ 为 X 上的模糊子集

$$A = 1/x_1 + 1/x_2 + 0.7/x_3 + 0.4/x_4 + 0.3/x_5 + 0.3/x_6 + 0.2/x_7$$

记 $A_i = \{x_j;\quad j \leqslant i\}(i \leqslant 7)$，若有 mass 函数 m，使

$$\sum_{i=1}^{7} m(A_i) = 1$$

则

$$l(A) = \sum_{B \cap A \neq \varnothing} m(B)$$

为似然测度。由模糊集 A 通过(2.28)形成似然测度，于是

$$\rho_i = \Pi(x_i) = l(x_i) = \sum_{j=i}^{7} m(A_j) = \sum_{j=i}^{7} \mu_j \quad (i \leqslant 7) \tag{2.30}$$

由方程(2.30)即得

$$\mu_i = \rho_i - \rho_{i+1} \qquad (i \leqslant 7)$$

其中 $\rho_0 = 0$。于是得到

$$m(A_1) = 0,\quad m(A_2) = 0.3,\quad m(A_3) = 0.4,$$
$$m(A_4) = m(A_5) = 0, m(A_6) = 0.1, m(A_7) = 0.2$$

定义 2.11 设 μ 为 X 上的模糊测度，h 为 X 上的模糊集的隶属函数，h 对 μ 的模糊积分为

$$\int_A h(x) d\mu = \sup\{\alpha \wedge \mu(A \cap H_\alpha);\quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\} \tag{2.31}$$

其中 $H_\alpha = \{x; h(x) \geqslant \alpha\}$，A 是 X 中的子集。

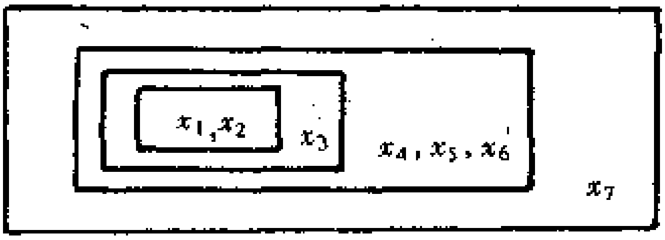


图 2.10　由可能性测度生成 mass 函数

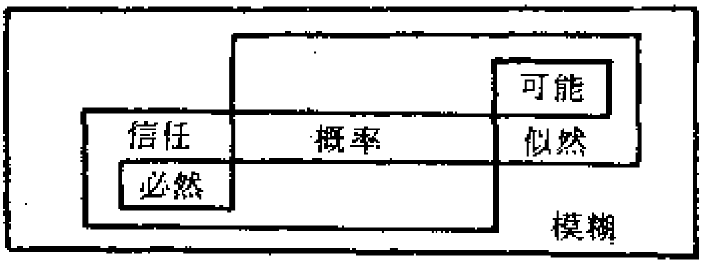


图 2.11　各种模糊测度之间的关系

例 2.13　设 $X=\{x_i;\quad i\leqslant n\}$，且

$$h(x_i)=\begin{cases}\beta_2, & i\leqslant m\\ \beta_1, & i>m\end{cases}$$

其中 $0<\beta_1<\beta_2<1$，$1<m<n$，对于 $A\subset X$，记 $\mu(A)$ 为 A 中元素的个数与 n 之比，于是

$$H_\alpha=\begin{cases}\varnothing, & \alpha>\beta_2\\ \{x_1,\ \cdots,x_m\}, & \beta_1<\alpha\leqslant\beta_2\\ X, & \alpha<\beta_1\end{cases}$$

易证

$$\int_X h\mathrm{d}\mu = \begin{cases} \beta_1, & \frac{m}{n} \leqslant \beta_1 \\ \frac{m}{n}, & \beta_1 < \frac{m}{n} \leqslant \beta_2 \\ \beta_2, & \beta_2 < \frac{m}{n} \end{cases}$$

于是$\int h\mathrm{d}\mu$为β_1,β_2及$\frac{m}{n}$的中位数，且$\beta_1 \leqslant \int h\mathrm{d}\mu \leqslant \beta_2$。

表 2.3　四所学校学生身体素质评分表

	x_1	x_2	x_3	x_4
A	0.54	0.38	0.62	0.59
B	0.57	0.64	0.61	0.43
C	0.72	0.82	0.59	0.89
D	0.58	0.58	0.58	0.47

例 2.14　为综合评价 A,B,C,D 四所学校学生身体素质，考虑四个因素集合 $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$，分别评价为(表 2.3)。

若 X 上的权重为 $\mu(x_1)=0.1, \mu(x_2)=0.1, \mu(x_3)=0.3, \mu(x_4)=0.5$，则

$$\int A\mathrm{d}\mu = 0.59, \qquad \int B\mathrm{d}\mu = 0.5$$

$$\int C\mathrm{d}\mu = 0.7, \qquad \int D\mathrm{d}\mu = 0.5$$

于是 C 校学生身体素质最好。

例 2.15　为诊断疾病考虑 6 种症状集合 $X=\{x_i;\quad i\leqslant 6\}$，利用 g_λ 测度建立两种疾病的数学模型(表 2.14)。若有病例

$$h = 0.4/x_1 + 0.3/x_2 + 0.2/x_3 + 0.1/x_4 + 0.2/x_5 + 0.1/x_6$$

表 2.4 两种疾病诊断模型

	λ	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$g(x_3)$	$g(x_4)$	$g(x_5)$	$g(x_6)$
A	−0.86	0.09	0.18	0.314	0.494	0.359	0.449
B	−0.93	0.185	0.278	0.649	0.324	0.463	0.371

易得

$$\int h\,\mathrm{d}g_{\lambda_1} = 0.5, \qquad \int h\,\mathrm{d}g_{\lambda_2} = 0.8$$

于是诊断为疾病 B。

2.5 模糊度与相似度

模糊集合是用隶属函数表示的,对于不同的模糊集合的模糊程度是不同的。度量模糊集合的模糊程度的量称为模糊性测度,它描述了模糊集的不确定程度,是一种不确定的测度。

定义 2.12 对于 X 上的任意模糊集 A,有取值于区间[0,1]上的值 $f(A)$,称 $f(A)$为模糊集 A 的模糊度,若满足以下条件:

(1) $f(A)=0$,当且仅当 A 为经典集;

(2) $f(A)$取最大值,当且仅当 $A(x)=\frac{1}{2}$ $(x\in X)$;

(3) 当 $\forall x\in X$ 有

$$|A(x)-A^c(x)|\geqslant|B(x)-B^c(x)| \tag{2.32}$$

时有 $f(A)\leqslant f(B)$。

(2.32)式意味着 $\forall x\in X$,当 $B(x)\leqslant\frac{1}{2}$时有 $A(x)\leqslant B(x)$。

定义 2.12 表明,经典集合模糊度为 0,恒取 0.5 的隶属函数的模糊集合是最模糊的。其它的模糊集合的模糊度依赖于接近

0.5 的程度。如果模糊集合的隶属函数的值越是接近于 0.5，模糊度越大；越是远离 0.5，模糊度越小。

下面我们给出计算模糊度的几种公式。假定 X 为有限集，而且 X 中的元素个数为 n。

(1) 利用信息量给出的模糊度计算公式

$$f_1(A)=\frac{4}{n}\sum_{x\in X}A(x)(1-A(x))$$

$$f_2(A)=-\frac{1}{n}\sum_{x\in X}(A(x)\log_2 A(x)+A^c(x)\log_2 A^c(x))$$

(2) 利用与标准集比较给出的模糊度计算公式

$$f_3(A)=\frac{2}{n}\sum_{x\in X}|A(x)-\mathrm{A}(x)|$$

$$f_4(A)=\frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{x\in X}(A(x)-\mathrm{A}(x))^2}$$

其中 $\mathrm{A}(x)$定义为

$$\mathrm{A}(x)=\begin{cases}0, & A(x)\leqslant 0.5\\ 1, & A(x)>0.5\end{cases}$$

(3) 利用模糊度定义给出的模糊度计算公式

$$f_5(A)=\frac{1}{n}\sum_{x\in X}(1-|A(x)-A^c(x)|)$$

$$f_6(A)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{x\in X}(1-(A(x)-A^c(x))^2)}$$

例 2.16 取 $X=\{x_i;\quad i\leqslant 9\}$上的模糊集合为

$$A=0.2/1+0.5/2+0.7/3+0.8/4+0.9/5+0.1/6+$$
$$+0.6/7+0.4/8+0.1/9$$

可以计算得到：

$$f_1(A)=0.76,\qquad f_2(A)=0.58,\qquad f_3(A)=0.49,$$
$$f_4(A)=0.51,\qquad f_5(A)=0.51,\qquad f_6(A)=0.64$$

由此可见，利用不同的模糊度计算公式计算所得的模糊度是不相同的。

如果 X 不是有限集，可以利用积分来代替和式。特别当 X 是 R 上的一个区间$[a, b]$时，有

$$f_1(A) = \frac{4}{b-a}\int_a^b A(x)A^c(x)\mathrm{d}x$$

$$f_2(A) = \frac{-1}{b-a}\int_a^b (A(x)\log_2 A(x) + A^c(x)\log_2 A^c(x))\mathrm{d}x$$

$$f_3(A) = \frac{2}{\sqrt{b-a}}\int_a^b |A(x) - A(x)|\mathrm{d}x$$

$$f_4(A) = \frac{2}{\sqrt{b-a}}\sqrt{\int_a^b (A(x) - A(x))^2\mathrm{d}x}$$

$$f_5(A) = \frac{1}{b-a}\int_a^b (1 - |A(x) - A^c(x)|)\mathrm{d}x$$

$$f_6(A) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\sqrt{\int_a^b (1 - |A(x) - A^c(x)|)^2\mathrm{d}x}$$

例 2.17 给出 $X=[0,4]$上的模糊集

$$A(x) = \frac{1}{1+x}$$

利用公式 f_3 可得

$$\begin{aligned} f_3(A) &= \frac{2}{4}\left[\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x + \int_1^4 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(x - \ln(1+x))\Big|_0^1 + \ln x\Big|_1^4\right] \\ &= \frac{1}{2}(1 + \ln 4 - \ln 2) = 0.85 \end{aligned}$$

利用公式 f_5 可得

$$\begin{aligned} f_5(A) &= \frac{1}{4}\int_0^4 \left(1 - \left|\frac{2}{1+x} - 1\right|\right)\mathrm{d}x \\ &= 1 - \frac{1}{4}\int_0^4 \left|\frac{2}{1+x} - 1\right|\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{2}{1+x} - 1\right)dx - \frac{1}{4}\int_1^4 \left(1 - \frac{2}{1+x}\right)dx$$

$$= 0.61$$

定义 2.13 对于 X 上的任意模糊集 A，有取值于区间[0,1]上的值 $g(A)$，若满足以下条件：

(1) $g(A)=0$ 当且仅当 $A=X$，

(2) $g(A)$取最大值，当且仅当 $A=\varnothing$，

(3) $A \subset B$ 时，$f(A) \geqslant f(B)$，

称 $g(A)$为模糊集 A 的近空度。

从定义 2.12 和定义 2.13 可见，模糊集 A 的模糊度是与 $B(x) \equiv \frac{1}{2}$ 的模糊集接近的程度，近空度是与 $B(x) \equiv 0$ 的模糊集接近的程度。

定义 2.14 若 g 为近空度，称

$$q(A,B) = g(|A-B|) \tag{2.33}$$

为 A 与 B 的相似度。相似度显然有性质：

(1) $0 \leqslant q(A,B) \leqslant 1$，

(2) $A=B$ 时 $q(A,B)=1$

(3) $q(A,B)=q(B,A)$

(4) $A \subset B \subset C$ 时，有

$$q(A,C) \leqslant q(A,B) \wedge q(B,C)$$

由定义 2.11 与定义 2.10 的类比性，可以用构造模糊度的方法构造相似度。

例 2.18 假设 X 中有 n 个元素，在 f_3 与 f_4 中取 $A(x)=1$，则

$$g_1(A) = \frac{1}{n}\sum_{x \in X}(1 - A(x))$$

$$g_2(A) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{x \in X}(1 - A(x))^2}$$

于是有相似度公式

$$q_1(A,B)=\frac{1}{n}\sum_{x\in X}(1-|(A(x)-B(x)|)$$

$$q_2(A,B)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{x\in X}(1-|A(x)-B(x)|)^2}$$

如果 X 为实数 R 中的区间[a, b], 则

$$q_1(A,B)=\frac{1}{b-a}\int_a^b(1-|A(x)-B(x)|)\mathrm{d}x$$

$$q_2(A,B)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\sqrt{\int_a^b(1-|A(x)-B(x)|)^2\mathrm{d}x}$$

我们用 q_1 计算 B 与 A_1,A_2 的相似度(见图 2.12),其中

$$A_1(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

$$A_2(x)=\begin{cases}x-2, & 2\leqslant x\leqslant 3\\ 4-x, & 3\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

$$B(x)=\begin{cases}x-1.5, & 1.5\leqslant x\leqslant 2.5\\ 3.5-x, & 2.5\leqslant x\leqslant 3.5\end{cases}$$

利用计算 q_1 的公式即得

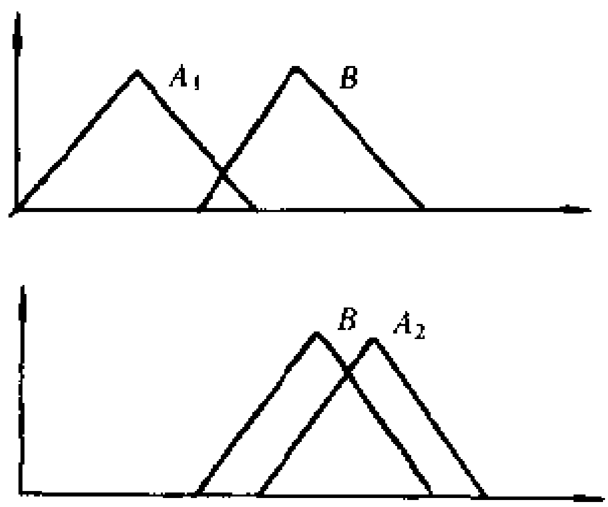


图 2.12　计算相似度示意图

$$q_1(A_1,B)=\frac{1}{4}\int_0^4(1-|A_1(x)-B(x)|)\mathrm{d}x=0.53$$

$$q'_1(A_2,B)=\frac{1}{4}\int_0^4(1-|A_2(x)-B(x)|)\mathrm{d}x=0.72$$

其中积分表示阴影部分的面积。由计算表明 A_2 更相似于 A_1。

定义 2.15 若 $A_i(i\leqslant n)$为 X 上的 n 个模糊集合,B 为 X 上的模糊集合,若有 $r\leqslant n$,使

$$q(B,A_r)=\max_{i\leqslant n}q(B,A_i) \tag{2.34}$$

称 B,相对相似于 A_r。

这即是模糊集理论中的相似度原理。

2.6 模糊集及其运算的扩充

由于经典子集与一个特征函数对应,可以将经典子集看成是取值 0 和 1 的映射。取值域 L={0,1}上定义运算:

$$0\vee 0=0,\quad 0\vee 1=1\vee 0=1\vee 1=1$$

$$1\wedge 1=1,\quad 0\wedge 1=1\wedge 0=0\wedge 0=0.$$

则 L 上的运算 $\vee$,$\wedge$ 满足交换律,结合律和吸收律,即对于任意 a,b,$c\in$ L,有以下性质:

(1) $a\vee b=b\vee a$, $a\wedge b=b\wedge a$ (交换律)

(2) $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$

$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$ (结合律)

(3) $a\wedge(a\vee b)=a$,$a\vee(a\wedge b)=a$ (吸收律)

因此 L={0,1}关于运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 构成一个格。又因为 $\forall a\in$ L 有

$$a\vee(1-a)=1,\quad a\wedge(1-a)=0$$

满足互补律,故 L={0,1}为布尔代数,且 a 的补元素为 $1-a$。

对于 X 上的模糊子集取值域为 L=[0,1],对于任意 a,$b\in$ L,定义运算

$$a \vee b = \max\{a,b\}, \qquad a \wedge b = \min\{a,b\}$$

$L=[a,b]$关于运算$\vee$和$\wedge$也满足交换律、结合律、吸收律，从而构成一个格。但$L=[0,1]$不满足互补律，故L不再是一个布尔代数。

如果L是一个格，$\vee$和$\wedge$是格L上的两种运算，即L关于$\vee$和$\wedge$满足交换律、结合律和吸收律，称

$$A: X \to L$$

为格型模糊集，且可定义模糊集的运算为

$$(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x)$$

$$(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x)$$

如果L到L的映射N满足：

(1) $\forall a,b \in L, a \leqslant b$，即$a \wedge b = a$时，$N(b) \leqslant N(a)$（逆序）

(2) $N(N(a)) = a$（对合）

称N为L的伪补。记模糊集的补运算为

$$A^c(x) = N(A(x))$$

例 2.19 设$\mathscr{P}(Y)$为Y中的全体子集，则$L=\mathscr{P}(Y)$关于$\cup,\cap$为格，则$A: X \to \mathscr{P}(Y)$为格型模糊集，且

$$(A \cup B)(x) = A(x) \cup B(x)$$

$$(A \cap B)(x) = A(x) \cap B(x)$$

$$A^c(x) = (A(x))^c$$

例 2.20 若$L=[0,1]^2$，记

$$(a,b) \vee (c,d) = (a \vee c, b \vee d)$$

$$(a,b) \wedge (c,d) = (a \wedge c, b \wedge d)$$

$$N(a,b) = (1-a, 1-b)$$

则L关于$\vee,\wedge$为格，且N为伪补。于是$A: X \to [0,1]^2$为格型模糊集。若

$$L = \{[a,b]; \quad a \leqslant b, \quad a,b \in [0,1]\}$$

记

$$[a,b]\vee[c,d]=[a\vee c,b\vee d]$$
$$[a,b]\wedge[c,d]=[a\wedge c,b\wedge d]$$
$$N([a,b])=[1-b,1-a]$$
则 L 是格，$A:X\to L$ 是格型模糊集。若
$$L=\{B;\quad B:[0,1]\to[0,1]\}$$
则 L 是格，$A:X\to L$ 是格型模糊集。

设 L 为格，0 和 1 是格 L 中的最小元素和最大元素，“$\leqslant$”表示格 L 上的半序关系。

定义 2.16 映射 $T:L\times L\to L$ 满足

(1) $T(0,0)=0,\quad T(1,1)=1$,

(2) $T(a,b)=T(b,a)$,

(3) $a\leqslant c,\quad b\leqslant d\Rightarrow T(a,b)\leqslant T(c,d)$,

(4) $T(T(a,b),c)=T(a,T(b,c))$。

当 T 满足 $T(a,1)=a$ 时称为三角模，若 T 满足 $T(a,0)=a$ 时称为反三角模。

设 N 为 L 上的伪补，当 T 模 T 和 S 模 S 满足
$$N(T(a,b))=S(N(a),N(b))$$
时，称 T 与 S 为 N 对偶的。

对于格 L 上的运算 $\vee$ 与 $\wedge$，容易验证 $\vee$ 是反三角模，$\wedge$ 为三角模，且对 L 上的任意的伪补，$\vee$ 与 $\wedge$ 是对偶的。

例 2.21 设 $L=[0,1]$，下面的运算为三角模：
$$T_0(a,b)=a\wedge b$$
$$T_1(a,b)=a\cdot b$$
$$T_2(a,b)=\frac{a\cdot b}{1+(1-a)(1-b)}$$
$$T_\infty(a,b)=\max(0,a+b-1)$$
下面的运算是反三角模：
$$S_0(a,b)=a\vee b,$$

$$S_1(a,b)=a+b-a\cdot b$$

$$S_2(a,b)=\frac{a+b}{1+a\cdot b}$$

$$S_\infty(a,b)=\min(1,a+b)$$

可以证明 T_i 和 S_i 关于 $N(a)=1-a$ 是对偶的。例如

$$T_0(N(a),N(b)) = (1-a)\wedge(1-b)$$

$$= 1-a\vee b = 1-S_0(a,b)$$

$$T_1(N(a),N(b)) = (1-a)(1-b)$$

$$= 1-(a+b-ab) = 1-S_1(a,b)$$

若对 L 上的任意两个三角模或反三角模 T'_1 及 T'_2，满足对于任意 $a,b\in L$，有

$$T'_1(a,b)\leqslant T'_2(a,b)$$

称 T'_1 弱于 T'_2，记为 $T'_1\leqslant T'_2$，显然有

$$T_\infty\leqslant T_2\leqslant T_1\leqslant T_0\leqslant S_0\leqslant S_1\leqslant S_2\leqslant S_\infty$$

定理 2.9 设 $g(s):[0,1]\to[0,1]$是严格单调的连续映射，且 $g(0)=0,g(1)=1,G(s)$为 $g(s)$的逆映射，记

$$T(a,b)=G(T'(g(a),g(b)))$$

若 T' 为三角模，则 T 为三角模；若 T' 为反三角模，则 T 为反三角模。

证明 直接利用定义 2.15 验证即可。

若 T 与 S 是格 L 上的三角模与反三角模，T 与 S 关于伪补 N 是对偶的。对于格模糊集 $A,B:X\to L$，定义：

模并： $(A\cup B)(x)=S(A,B)$

模交： $(A\cap B)(x)=T(A,B)$

补： $A^c(x)=N(A(x))$

则模并、模交满足交换律、结合律，且

$$A\cap B\subset A,\ B\subset A\cup B$$

但不一定满足吸收律。因此，格型模糊集关于模并与模交不一定

是格。由于 T 和 S 关于伪补 N 是对偶的，则满足对偶律：

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$$

$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$$

例 2.22 设 L=[0,1]，取

$$T_1(a,b)=a\cdot b$$

$$S_1(a,b)=a+b-a\cdot b$$

对于模糊集 A,B 可定义“模并”与“模交”如下：

$$(A\cup B)(x)=A(x)+B(x)-A(x)\cdot B(x)$$

$$(A\cap B)(x)=A(x)\cdot B(x)$$

若取

$$T_\infty(a,b)=\max(0,a+b-1)$$

$$S_\infty(a,b)=\min(a+b,1)$$

对于模糊集 A,B 可定义“模并”与“模交”为：

$$(A\cup B)(x)=\min(A(x)+B(x),1)$$

$$(A\cap B)(x)=\max(0,A(x)+B(x)-1)$$

模糊集合的模运算，是经典集合“并”与“交”运算的一般化，各种模运算适合于不同的实际问题。因此，在解决实际问题过程中，应根据实际问题的意义选择不同的模运算。也可以根椐计算机仿真选择不同的模运算。模运算的多样性为更好的解决实际问题提供了有利条件。

作为模糊集合及其运算的扩充的应用，我们进一步讨论推理空间。

定义 2.17 设$([0,1],\vee,\wedge)$为格，t,α 为$[0,1]$上的二元运算，且满足：

(1) $xt(y\vee z)\geqslant(xty)\vee(xtz)$

(2) $x\alpha(y\vee z)\geqslant(x\alpha y)\vee(x\alpha z)$

(3) $xt(x\alpha y)\leqslant y$

(4) $x\alpha(xty) \geqslant y$

称$([0,1], t, \alpha)$为推理空间。

设 X 与 Y 为两个基本集合，$A: X \to [0,1]$为 X 上的模糊集，$B: Y \to [0,1]$为 Y 上的模糊集，R 为 $X \times Y$ 上的模糊关系，$([0,1], t, \alpha)$为推理空间。记

$$(A o_t R)(y) = \sup_{x \in X} \{A(x) t R(x, y)\}$$

$$(A \odot_\alpha R)(y) = \inf_{x \in X} \{A(x) \alpha R(x, y)\}$$

$$(A \alpha B)(x, y) = A(x) \alpha B(y)$$

$$(A t B)(x, y) = A(x) t B(y)$$

称$(A o_t R) = B$ 为 t 型模糊关系方程，$(A \odot_\alpha R) = B$ 为 α 型模糊关系方程。

定理 2.10 设$([0,1], t, \alpha)$为推理空间，t 型模糊关系方程$(A o_t R) = B$ 有解 R 的充要条件是 $R^* = A\alpha B$ 是最大解。

证明 若 R 是$(A o_t R) = B$ 的解，则

$$\begin{aligned} R^*(x, y) &= (A\alpha(A o_t R))(x, y) \\ &= A(x)\alpha(\sup_{x'}(A(x') t R(x', y))) \\ &\geqslant A(x)\alpha(A(x) t R(x, y)) \geqslant R(x, y) \end{aligned}$$

$$(A o_t R^*)(y) \geqslant (A o_t R)(y) = B(y)$$

另一方面

$$(A o_t R^*)(y) = \sup_x (A(x) t (A(x) \alpha B(y))) \leqslant B(y)$$

则证$(A o_t R^*) = B$，最大解是显然的。

例 2.23 t 为$[0,1]$上的 T 三角模，α 为

$$a\alpha b = \sup\{x; \quad a t x \leqslant b\}$$

则$([0,1], t, \alpha)$为推理空间。$A o_t R = B$ 有解 R 的充要条件为 $R^* = A\alpha B$ 为最大解。s 为$[0,1]$上的反三角模，σ 为

$$a\sigma b = \inf\{x; \quad a s x \geqslant b\}$$

则$([0,1], \sigma, s)$为推理空间。$A o_\sigma R = B$ 有解 R 的充要条件为 R^*

$=AsB$ 为最大解。

例 2.24 下面的运算构成[0,1]上的推理空间，但不是(反)三角模。

$$atb=\begin{cases}b, & a+b>1\\0, & a+b<1\end{cases}$$

$$a\alpha b=(1-a)\vee b$$

定理 2.11 设$([0,1],t,\alpha)$为推理空间，S 型模糊关系方程 $A\odot_\alpha R=B$ 有解 R 的充要条件是 $R^*=AtB$ 是最小解。

例 2.25 对于例 2.24 中的$([0,1],t,\alpha)$，$A\odot_\alpha R=B$ 有解的充要条件是 $R^*=AtB$ 为最小解。对于$([0,1],\sigma,s)$，$A\odot_s R=B$ 有解的充要条件为 $R^*=A\sigma B$ 为最小解。

定理 2.12 设推理空间$([0,1],t,\alpha)$上的 N 个模糊关系方程 $A_i o_t R_i=B_i(i\leqslant N)$均有解，即

$$\mathbf{R}_i=\{R_i;\quad A_i o_t R_i=B_i\}\neq\varnothing\quad(i\leqslant N)$$

且 $\mathbf{R}=\bigcap_{i=1}^{N}\mathbf{R}_i\neq\varnothing$，则

$$R^*=\bigcap_{i=1}^{N}(A_i\alpha B_i)$$

为 N 个模糊关系方程最大的公共解。

证明 设 $R\in\mathbf{R}$，则

$$A_i o_t R=B_i\quad(i\leqslant N)$$

且 $R\subset R_i^*=(A_i\alpha B_i)(i\leqslant N)$，从而 $R\subset R^*$。又因

$$B_i=A_i o_t R\subset A_i o_t R^*\subset A_i o_t R_i^*=B_i\quad(i\leqslant N)$$

即证 $A_i o_t R^*=B_i\quad(i\leqslant N)$，且 R^* 为最大的公共解。

定理 2.13 设推理空间$([0,1],t,\alpha)$上的 N 个模糊关系方程 $A_i\odot_\alpha R_i=B_i\quad(i\leqslant N)$均有解，即

$$\mathbf{R}_i=\{R_i;\quad A_i\odot_\alpha R_i=B_i\}\neq\varnothing\quad(i\leqslant N)$$

且 $\mathbf{R}=\bigcap_{i=1}^{N}\mathbf{R}_i\neq\varnothing$，则

$$R^* = \bigcup_{i=1}^{N} (A_i t B_i)$$

为 N 个模糊关系方程最小解。

证明 仿定理2.11。

由此可见，推理空间有着很好的性质，在模糊推理研究中有着重要的意义。

第 3 章　模糊推理的基本原理

3.1　模糊推理的基本思想

在形式逻辑中我们经常使用三段论式的演绎推理，即由大前提、小前提和结论构成的推理。比如，平行四边形两对角线相互平分，矩形是平行四边形，则矩形的两条对角线也相互平分。这种推理可以写成以下规则

大前提：	如果 A，则 B
小前提：	X 是 A
结　论：	X 是 B

在这种推理过程中，大前提中的"A"与小前提中的"A"是完全一致的，则结论必然为"B"，这即是二值逻辑的本质。在这种推理过程中，不管"A"与"B"代表什么，推理是普遍适用的。目前的计算机就是基于这种形式逻辑推理进行设计和工作的。如果大前提中的"A"和小前提中的"A"不一致，形式逻辑就无法再进行推理，因此计算机也无法进行推理。但是在这种情况下，人是可以进行思维和推理的。比如：健康的人长寿，孔子非常健康，孔子相当长寿。在这一推理过程中，大前提中的"A"是"健康"，小前提中的"A"是"非常健康"。大前提与小前提不一致，无法使用形式逻辑进行推理。人可以得到"相当长寿"的结论，是根据大前提中的"健康"与小前提中的"非常健康"的"含义"的相似程度。用模糊集方

法模拟人的这样一个思维过程的推理称为模糊推理。又如

大前提：　如果西红柿红了，则熟了
小前提：　这个西红柿有点红

结　论：　这个西红柿差不多熟了

关于模糊推论可以概括为以下的模型

大前提：　如果 x 是 A，则 y 是 B
小前提：　x 是 A′

结　论：　　　　　　　　y 是 B′

其中 A，A'是 X 上的两个模糊集，B 和 B'是 Y 上的两个模糊集。如果在不致混淆的情况下，可以记为

$$\begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ \underline{A' \qquad\quad} \\ \qquad B' \end{array}$$

由于单点集$\{x_0\}$是一个特殊的模糊集，模糊推理有下面的特殊的模型：

$$\begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ \underline{x_0 \qquad\quad} \\ \qquad y_0 \end{array}$$

为了解决模糊推理的实现问题，有两个问题需要解决：

(1) 关系生成规则：　A 是 X 上的模糊集，B 是 Y 上的模糊集，“$A \Rightarrow B$”应是 X 到 Y 的模糊关系 $R(x,y)$。应当有一种办法，由 A 及 B 得到

$$R(x,y) = \text{“}A \Rightarrow B\text{”}(x,y)$$

(2) 推理合成规则： 即由模糊关系 $R=$“$A\Rightarrow B$”和小前提中的 A' 得到 Y 上的模糊集 B'，即(见图 3.1)

$$B' = A' \circ R$$

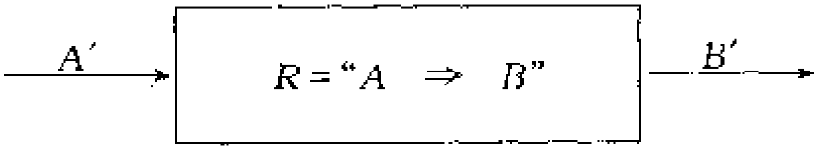


图 3.1　模糊推理模型

以上的模型是单输入与单输出的模型。在模糊推理中，大前提可以有 n 个，即

$$\begin{array}{l} A_1 \Rightarrow B_1 \\ A_2 \Rightarrow B_2 \\ \quad\cdots \\ A_n \Rightarrow B_n \\ \underline{A' \qquad\quad} \\ \qquad\quad B' \end{array}$$

这样就构成多条规则的模糊推理模型。对于这种模型主要是通过 $A_i \Rightarrow B_i (i \leqslant n)$ 计算 X 到 Y 的模糊关系

$$R = \text{“}A_i \Rightarrow B_i (i \leqslant n)\text{”}$$

由 $B' = A \circ R$ 即可得到模糊推理的结果 B'。

对于模糊推理可以建立更一般的数学模型：

$$\begin{array}{l} A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{1m} \Rightarrow B_1 \\ A_{21}, A_{22}, \cdots, A_{2m} \Rightarrow B_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ A_{n1}, A_{n2}, \cdots, A_{nm} \Rightarrow B_n \\ \underline{A_1', A_2', \cdots, A_m' \qquad\quad} \\ \qquad\qquad\qquad\quad B' \end{array}$$

其中 $A_{i1}(i\leqslant n)$是 X_1 上的模糊集，$A_{i2}(i\leqslant n)$是 X_2 上的模糊集，…，$A_{im}(i\leqslant n)$是 X_m 上的模糊集，$B_i(i\leqslant n)$及 B' 是 Y 上的模糊集。于是要解决以下两个问题：

(1) 关系生成规则： 通过 $A_{ij}(i\leqslant n, j\leqslant m)$及 $B_i(i\leqslant n)$ 生成模糊关系 R，R 是 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_m\times Y$ 上的模糊关系。如果记

$$X = X_1\times X_2\times\cdots\times X_m$$

R 仍为 X 到 Y 上的模糊关系。

(2) 推论合成规则： 由 $A_j'(j\leqslant m)$得到 $X=X_1\times\cdots\times X_m$ 上的模糊集 A'，由 $B'=A'\circ R$ 即得到推论结果。

例 3.1 设一个系统输入为误差及误差变化率，用 e 表示误差，de 表示误差变化率，误差及误差变化率是用"正大"、"负大"等这样一些语言值来表示。用 U 表示控制阀门大小的语言值，也是用"正大"、"负大"一些语言值表示。大前提的规则如表 3.1 所表示的关系。

表 3.1 模糊推理规则表

e \ de	NB	NM	NS	Z	PS	PM	PB
PB	–	–	NM	NB	NB	NB	NB
PM	–	–	NM	NB	NB	NB	NB
PS	PS	PS	Z	NB	NB	NB	NB
Z	PM	PM	PS	Z	NS	MN	MN
NS	PB	PB	PM	PM	PM	Z	NS
NM	PB	PB	PB	PB	PM	–	–
NB	PB	PB	PB	PB	PB	PM	–

表中的符号有以下意义：

PB： 正大

PM： 正的中等

PS： 正小

Z： 近似 0

NS： 负小

NM： 负的中等

NB： 负大

利用表 3.1 得到 42 条规则 $A_i, B_i \Rightarrow C_i(i \leqslant n)$。比如，若误差是"正大"，误差变化率为"负小"，则控制输出为"负的中等"。但是这 42 条规则可以作一些合并。比如，如果误差及误差变化率为正时，控制输出为"负大"。

我们也可以进一步考虑多输入与多输出的模糊推理模型：

$$
\begin{array}{l}
A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{1m} \Rightarrow B_{11}, B_{12}, \cdots, B_{1L} \\
A_{21}, A_{22}, \cdots, A_{2m} \Rightarrow B_{21}, B_{22}, \cdots, B_{2L} \\
\qquad \cdots \\
A_{n1}, A_{n2}, \cdots, A_{nm} \Rightarrow B_{n1}, B_{n2}, \cdots, B_{nL} \\
\underline{A_1', A_2', \cdots, A_m' \qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad B_1', B_2', \cdots, B_L'
\end{array}
$$

其中 A_{ij} 及 A_j' $(i \leqslant n, \ j \leqslant m)$ 为 X_j 上的模糊集，B_{ik} 及 $B'_k(i \leqslant n, k \leqslant L)$ 为 Y_k 上的模糊集。

对于多输入与多输出的模糊推理模型可以归结为多输入与单输出的模糊推理模型。在模型中如果仅考虑一个输出 $B_{ij}(i \leqslant n)$，得到模糊关系 $R_j(j \leqslant m)$，利用 $B_j' = A \circ R_j(j \leqslant m)$ 即可得到多个输出结果。

由此可见，解决模糊推理问题，最关键的是给出单输入与单输

出系统的关系生成规则与推理合成规则。

3.2 模糊推理的 Mamdani 算法

在模糊推理的算法中，最关键的是关系生成规则与推理合成规则。给出不同的关系生成规则与推理合成规则，就得到不同的推理算法。1974 年，E. H. Mamdani 提出了模糊控制，并给出了一种模糊推理算法，这种算法为 Mamdani 算法，是一种非常有效的方法。

在 Mamdani 算法中，关系生成规则为：

$$R(x,y)=\text{“}A\Rightarrow B\text{”}(x,y)=A(x)\wedge B(y)$$

推理合成规则为 max－min 复合运算

$$B'(y)=(A'\circ R)(y)=\bigvee_{x\in X}(A'(x)\wedge R(x,y)) \tag{3.1}$$

将关系生成规则与推理合成规则合并在一起，即得

$$\begin{aligned} B'(y)&=\bigvee_{x\in X}(A'(x)\wedge A(x)\wedge B(y)) \\ &=(\bigvee_{x\in X}(A'(x)\wedge A(x)))\wedge B(y) \\ &=q\wedge B(y) \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中

$$q=q(A,A')=\bigvee_{x\in X}(A'(x)\wedge A(x)) \tag{3.3}$$

满足：

(1) $0\leqslant q\leqslant 1$

(2) A 正则时，对于 $A'=A$ 有 $q=1$

(3) $q(A',A)=q(A,A')$

(4) $q(A,A')=0$ 当且仅当 $A\cap A'=\varnothing$

(5) 当 $A\subset B\subset C$ 时有 $q(A,C)\leqslant q(A,B)\wedge q(B,C)$

于是 $q(A,A')$ 是大前提中的 A 与小前提中的 A' 的相似度，即 A 与 A' 的一致的程度。

从图 3.2 可以看出，当 $q_1 \leqslant q_2$ 时，$B_1' \subset B_2'$。即 A' 与 A 相似度越大，模糊推理结果 B' 越大，反之，A' 与 A 相似度越小，模糊推理结果 B' 越小。特别有以下特殊情况：

(1) 当 $A' \cap A = \varnothing$ 时，$q=0$，从而 $B' = \varnothing$；

(2) 当 A 为正则时，若 $A' = A$，则 $B' = B$。

由此可见，模糊推理的 Mamdani 算法是假言推理式形式推理的推广。

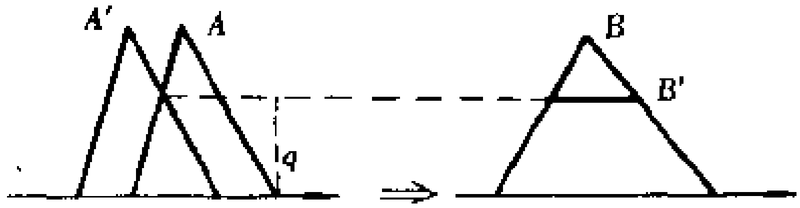


图 3.2　Mamdani 模糊推理算法

若小前提中的 $A' = x_0$，可以将 A' 视为特殊的模糊集合

$$A'(x) = \begin{cases} 1, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}$$

于是

$$q = A(x_0), \qquad B'(y) = A(x_0) \wedge B(y) \qquad (3.4)$$

下面我们进一步讨论多种规则的模糊推理的 Mamdani 算法。考虑一般模型

$$\begin{array}{l} A_i \Rightarrow B_i \quad (i \leqslant n) \\ \underline{A' \qquad\qquad\qquad} \\ \qquad\qquad\quad B' \end{array}$$

由 $A_i \Rightarrow B_i$ 得到 $R_i (i \leqslant n)$，从而得到

$$R(x,y) = \bigvee_{i=1}^{n} R_i(x,y) = \bigvee_{i=1}^{n} (A_i(x) \wedge B_i(y)) \qquad (3.5)$$

于是

$$B'(y)=(A'\circ R)(y)=\bigvee_{x\in X}(A'(x)\wedge R(x,y))$$

$$=\bigvee_{i=1}^{n}\bigvee_{x\in X}(A'(x)\wedge A_i(x)\wedge B_i(y))$$

$$=\bigvee_{i=1}^{n}(q(A',A_i)\wedge B_i(y)) \tag{3.6}$$

特别当 $A'=x_0$ 时有

$$B'(y)=\bigvee_{i=1}^{n}(A_i(x_0)\wedge B_i(y)) \tag{3.7}$$

多重规则的模糊推理是通过小前提中 A' 与每个规则的前件计算与 A_i 的相似度 $q(A',A_i)(i\leqslant n)$，由相似度与大前提中的后件进行比较，并将这些比较的结果综合起来即得到模糊推理的结果。

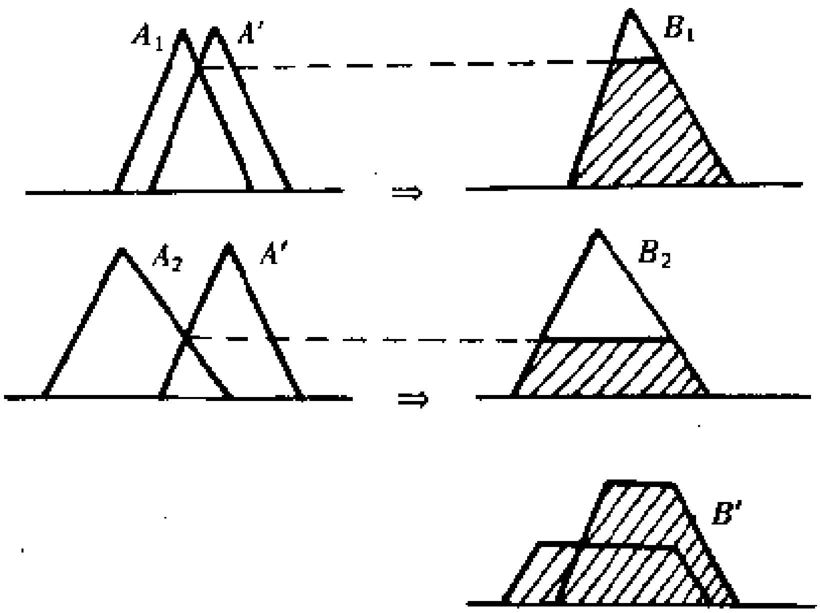


图 3.3　多重模糊推理的 Mamdani 算法

如果是多输入的多重模糊推理模型

$$A_{ij}(j\leqslant m)\Rightarrow B_i \quad (i\leqslant n)$$

$$\underline{A'_j(j\leqslant m)\qquad\qquad}$$

$$B'$$

其中 A_{ij} 及 A_j' 是 X_j 上的模糊集，B_i 及 B' 是 Y 上的模糊集。通过

$$\overline{A}_i(x_1,\cdots,x_m) = A_{i1}(x_1) \wedge A_{i2}(x_2) \cdots \wedge A_{im}(x_m) (i \leqslant n)$$

$$\overline{A}'(x_1,\cdots,x_m) = A'_1(x_1) \wedge \cdots \wedge A'_m(x_m)$$

可以得到 $X=\prod_{i=1}^{m} X_i$ 上的模糊集，从而多输入的多重模糊推理可以归结为单输入的多重模糊推理。

$$\begin{array}{l} \overline{A}_i \Rightarrow B_i (i \leqslant n) \\ \underline{\overline{A}' \qquad\qquad\qquad} \\ \qquad B' \end{array}$$

利用单输入的多重模糊推理算法可以得到多输入的多重模糊推理的算法为(见图 3.4)

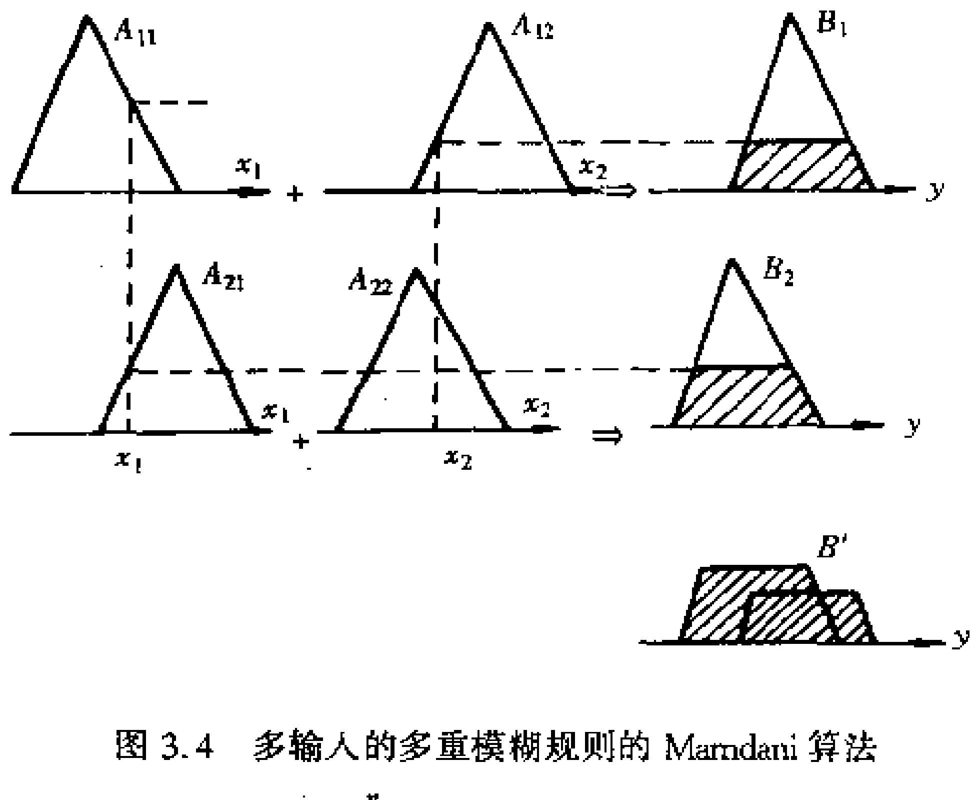


图 3.4　多输入的多重模糊规则的 Mamdani 算法

$$B'(y) = \bigvee_{i=1}^{n} (q(\overline{A}_i, \overline{A}') \wedge B_i(y)) \tag{3.8}$$

其中 $q(\overline{A}_i,\overline{A}')$ 是 $\overline{A}_i$ 及 $\overline{A}'$ 的相似度，即

$$
\begin{aligned}
q(\overline{A}_i,\overline{A}') &= \bigvee_{x\in X}(\overline{A}_i(x) \wedge \overline{A}'(x)) \\
&= \bigvee_{x\in X}\left[\left(\bigwedge_{j=1}^{m} A_{ij}(xj)\right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{m} A'_j(xj)\right)\right] \\
&= \bigvee_{x\in X}\left[\bigwedge_{j=1}^{m}(A_{ij}(xj) \wedge A_j'(xj))\right] \\
&= \bigwedge_{j=1}^{m}\bigvee_{x_j\in X_j}(A_{ij}(xj) \wedge A_j'(xj)) \\
&= \bigwedge_{j=1}^{m} q(A_{ij},A'_j) \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

特别当 $A_j'=x_j$ 时有

$$q(\overline{A}_i,\overline{A}') = \bigwedge_{j=1}^{m} A_{ij}(xj) \qquad (3.10)$$

利用(3.8)及(3.9)进行模糊推理的 Mamdani 算法中，模糊关系已不存在，随之而来的是大量的记忆存储，而且可以把模糊推理算法明确的表示为两部分(见图 3.5)。

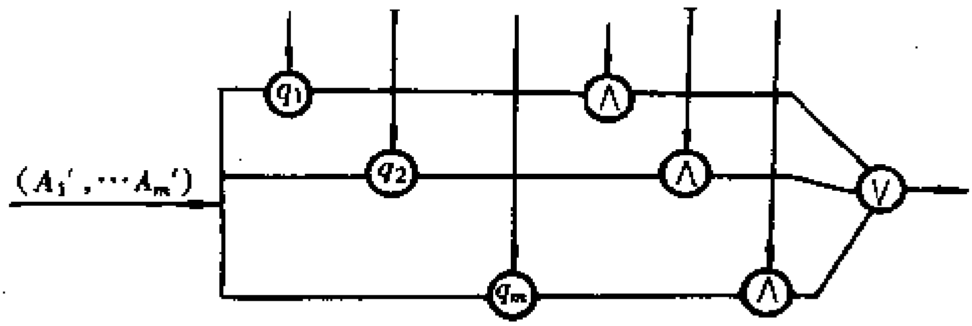


图 3.5　模糊推理 Mamdani 算法

(1) 匹配阶段，通过存储 $A_{ij}(i\leqslant n,\ j\leqslant m)$ 及输入 A_j' $(j\leqslant m)$ 计算

$$q_i = \bigwedge_{j=1}^{m} q(A_{ij},A'_j) \qquad (i\leqslant n) \qquad (3.11)$$

(2) 模糊控制测定阶段,通过存储 $B_i(i\leqslant n)$ 及匹配阶段计算得到的 $q_i(i\leqslant n)$ 计算 $q_i\wedge B_i$,最后通过 $q_i\wedge B_i$ 取并集即得到模糊推理的结果。

对于 Mamdani 模糊推理算法可以考虑一种更简单的模型

$$\begin{array}{ccccc} A_1, & B_1 & \Rightarrow & z_1 \\ & & \cdots & \\ A_n, & B_n & \Rightarrow & z_n \\ \hline x_0, & y_0 & & \\ & & & B' \end{array}$$

$A_i(i\leqslant n)$ 是 X 上模糊集,$B_i(i\leqslant n)$ 是 Y 上的模糊集,$z_i(i\leqslant n)$ 是 Z 中的点,由 Mamdani 算法得到

$$B'(z_i) = A_i(x_0)\wedge B_i(y_0) \tag{3.12}$$

模糊推理输出结果是 $\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ 上的模糊集,称这种推理方式为简易推理法。如果 $z_i=f_i(x_0, y_0)(i\leqslant n)$,称为函数型推理法。

3.3 多段模糊推理的 Mamdani 算法

在形式逻辑中,逻辑推理具有传递性。比如由于正方形是矩形,矩形是平行四边形,则正方形是平行四边形。写成一般形式即是三段论法

$$\begin{array}{c} A\Rightarrow B \\ B\Rightarrow C \\ \hline A\Rightarrow C \end{array}$$

其中"A⇒B"称为第一段,"B⇒C"称为第二段。最关键的是第一段的后件与第二段的前件完全一致 。在这种情况下,它是一种永真的推理方式。即使 A, B, C 是模糊语言的情况下,它同样成立。

如

$$\begin{array}{rcl} \text{生活有规律} & \Rightarrow & \text{健康} \\ \text{健康} & \Rightarrow & \text{长寿} \\ \hline \text{生活有规律} & \Rightarrow & \text{长寿} \end{array}$$

关于三段论式推理，可以写成

$$\text{“}(A \Rightarrow B) \circ (B \Rightarrow C)\text{”} = \text{“}A \Rightarrow C\text{”}$$

对于三段论法可以推广到模糊三段论法

$$\begin{array}{ccc} A & \Rightarrow & B \\ B' & \Rightarrow & C \\ \hline A & \Rightarrow & C' \end{array}$$

其中 A 为 X 上模糊集，B、B' 为 Y 上模糊集，C 与 C' 为 Z 上的模糊集。

对于模糊三段论法中有三个已知的模糊关系：

$$R = \text{“}A \Rightarrow B\text{”}, \qquad S = \text{“}B' \Rightarrow C\text{”}, \qquad Q = \text{“}A \Rightarrow C\text{”}$$

R 是 X 到 Y 的模糊关系，S 是 Y 到 Z 的模糊关系，Q 是 X 到 Z 的模糊关系。我们的目的是由 R, S, Q 计算 X 到 Z 上的模糊关系 $T = \text{“}A \Rightarrow C'\text{”}$，自然应有

$$T = R \circ S \tag{3.13}$$

即

$$T(x, z) = \bigvee_{y \in Y} (R(x, y) \wedge S(y, z)) \tag{3.14}$$

如果对 R 与 S 及 T 的关系生成规则使用 Mamdani 算法，则有

$$\begin{aligned} T(x, z) &= \bigvee_{y \in Y} (A(x) \wedge B(y) \wedge B'(y) \wedge C(z)) \\ &= \left[\bigvee_{y \in Y} (B(y) \wedge B'(y))\right] \wedge (A(x) \wedge C(z)) \\ &= q(B, B') \wedge Q(x, z) \end{aligned} \tag{3.15}$$

其中

$$q(B,\ B')=\bigvee_{y\in Y}(B(y)\wedge B'(y)) \tag{3.16}$$

为 B 与 B' 的相似度。

在图 3.6 中，q 为 B 与 B' 的相似度，于是有

$$“A\Rightarrow C'”(x,z)=q\wedge A(x)\wedge C(z)$$

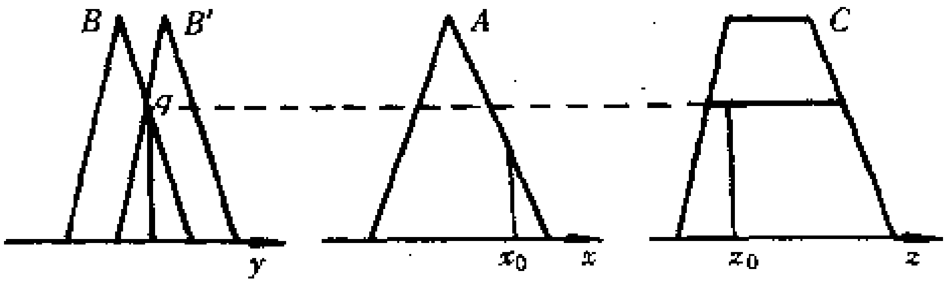


图 3.6 模糊三段论算法

比如对于$(x_0,\ z_0)$有

$$“A\Rightarrow C'”(x_0,\ z_0)=q\wedge A(x_0)\wedge C(z_0)$$

如果 $B=B'$，B 为正则的，则 $q=1$，于是

$$“A\Rightarrow C'”=“A\Rightarrow C”$$

即模糊三段论法是形式逻辑中三段论法的推广。当 B 与 B' 分离时，即 $B\cap B'=\varnothing$时，“$A\Rightarrow C'$”$=\varnothing$。q 越大，三段论法成立的隶属程度越大。三段论法成立的程度依赖于 B 与 B' 的相似度 q，因此也可认为模糊三段论法是在 q 水平下的三段论法。

下面考虑模糊 n 段推理法

$$\frac{A_1\Rightarrow A_2,A_2'\Rightarrow A_3,A_3'\Rightarrow A_4,\cdots,A_{n-1}'\Rightarrow A_n,A_n'\Rightarrow C}{A_1\Rightarrow C'}$$

其中 A_1 为 X_1 上模糊集，A_i 及 A'_i 是 $X_i(2\leqslant i\leqslant n)$上的模糊集，$C$ 及 C' 是 Y 上的模糊集。于是可以建立 $X_i\times X_{i+1}$上的模糊关系

$$R_i=“A_i'\Rightarrow A_{i+1}” \qquad (i\leqslant 2\leqslant n-1)$$

及 $X_1\times X_2, X_n\times Y, X\times Y$ 上的关系 R_1 及 R_n，Q，即

$$R_1 = \text{“}A_1 \Rightarrow A_2\text{”}$$

$$R_n = \text{“}A_n' \Rightarrow C\text{”}, \quad Q = \text{“}A_1 \Rightarrow C\text{”}$$

于是

$$\begin{aligned} R &= \text{“}A_1 \Rightarrow C'\text{”} \\ &= R_1 \circ R_2 \circ R_3 \circ \cdots \circ R_n \end{aligned} \tag{3.17}$$

如果关系生成规则利用 Mamdani 算法，有

$$(R_1 \circ R_2)(x_1, x_3) = q_2 \wedge A(x_1) \wedge A_3(x_3)$$

$$\begin{aligned} &(R_1 \circ R_2 \circ R_3)(x_1, x_4) \\ &= \bigvee_{x\in Z_3}(q_2 \wedge A_1(x_1) \wedge A_3(x_3) \wedge A_3'(x_3) \wedge A_4(x_4)) \\ &= q_2 \wedge q_3 \wedge A_1(x_1) \wedge A_4(x_4) \end{aligned}$$

一般地有

$$\begin{aligned} R &= q_2 \wedge q_3 \cdots \wedge q_n \wedge A_1(x_1) \wedge C(y) \\ &= q_2 \wedge q_3 \wedge \cdots \wedge q_n \wedge Q(x_1, y) \end{aligned} \tag{3.18}$$

其中 $q_i(2\leqslant i\leqslant n)$是 A_i 与A_i' 的相似度，即

$$q_i = q(A_i, A_i') = \bigvee_{x_i\in X_i}(A_i(x_i) \wedge A_i'(x_i)) \tag{3.19}$$

如果 $q_i=1(2\leqslant i\leqslant n)$，同样有“$A\Rightarrow C'$”=“$A\Rightarrow C$”。若有某一个 $q_i=0(2\leqslant i\leqslant n)$，则“$A\Rightarrow C'$”$=\varnothing$。因此，在多段模糊推理中，每一步造成的偏差对整个推理结果都有较大的影响。

接下来讨论多段模糊推理与多重模糊推理的组合形式，即多段多重模糊推理。下面有两组规则

组 1

生活有规律 ⇒ 健康

生活不规律 ⇒ 不健康

组 2

非常健康 ⇒ 相当长寿

一般健康 ⇒ 平均寿命

非常不健康 ⇒ 寿命不长

如果我们已知"生活稍有规律",则会得到什么结论。对于这个模型可以归结为(图 3.7)

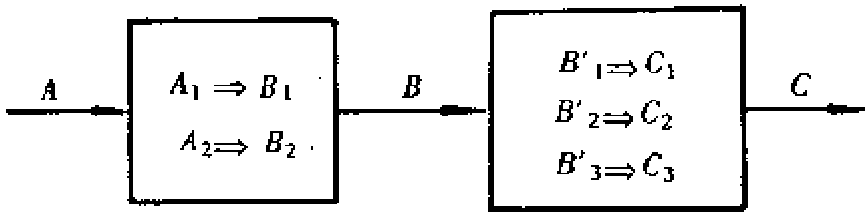


图 3.7　多重 2 段模糊推理

在图 3.7 中,A,A_1,A_2 是 X 上的模糊集,B_1,B_2,B_1',B_2',0B_3'是 Y 上的模糊集,C_1,C_2,C_3,C 是 Z 上的模糊集。

为了实现多重 2 段模糊推理,可以分段考虑。对于第一段,据多重模糊推理的 Mamdani 算法,有

$$B(y)=\bigvee_{i=1}^{2}(q_i \wedge B_i(y)) \tag{3.20}$$

其中 $q_i(i=1,2)$为 A 与 A_1 及 A_2 的相似度,即

$$q_i=q(A,A_i)=\bigvee_{x\in X}(A(x)\wedge A_i(x)) \quad (i=1,2) \tag{3.21}$$

然后将 B 作为第二段的输入,再次根据多重模糊推理的 Mamdani 算法,有

$$C(z)=\bigvee_{j=1}^{3}(q'_j \wedge C_j(z)) \tag{3.22}$$

其中 $q_j'(j=1,2,3)$为 B 与B_1'、B_2' 、B_3' 的相似度,即

$$q_j'=q(B,B_j')=\bigvee_{y\in Y}(B(y)\wedge B_j'(y)) \quad (j\leqslant 3) \tag{3.23}$$

将(3.20)代入(3.23)即得:

$$q_j'=\bigvee_{y\in Y}(\bigvee_{i=1}^{2}(q_i \wedge B'_i(y))\wedge B_j(y))$$

$$= \bigvee_{i=1}^{2} (q_i \wedge q_{ij}) \tag{3.24}$$

其中 q_{ij}为$B_i(i=1,2)$与 $B_j'(j=1,2,3)$的相似度，即

$$q_{ij} = q(B_i, B'_j) = \bigvee_{y \in Y} (B_i(y) \wedge B_j'(y)) \tag{3.25}$$

如果记

$$q = (q_1, q_2) \qquad q' = (q'_1, q_2', q_3')$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

则(3.24)可以写为

$$q' = q \circ Q \tag{3.27}$$

于是得到

$$C(z) = q \circ Q \circ \begin{bmatrix} C_1(z) \\ C_2(z) \\ C_3(z) \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

其中$\circ$表示 max－min 复合运算。

对于一般多重 2 段模糊推理模型(见图 3.8)

$$A \circ \begin{cases} A_1 \Rightarrow B_1 \\ \cdots \\ A_m \Rightarrow B_m \end{cases} \Rightarrow B \circ \begin{cases} B_1' \Rightarrow C_1 \\ \cdots\cdots \\ B_n' \Rightarrow C_n \end{cases} \Rightarrow C$$

有

$$C(z) = (q_1, \cdots, q_m) \circ \begin{bmatrix} q_{11} \cdots q_{1n} \\ \cdots \\ q_{m1} \cdots q_{mn} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} C_1(z) \\ \vdots \\ C_n(z) \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

其中

$$q_i = q(A, A_i) \quad (i \leqslant m)$$

$$q_{ij} = q(B_i, B_j') \quad (i \leqslant m, j \leqslant n)$$

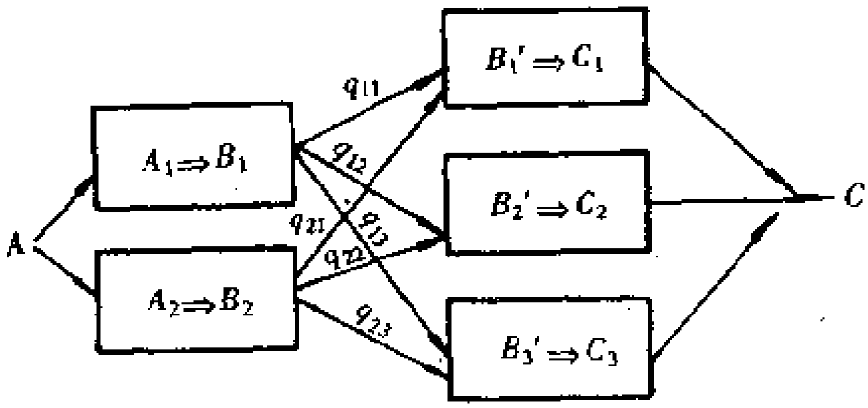


图 3.8　多重 2 段模糊推理

仿照以上的过程，我们可以得到多重 3 段模糊推理的 Mamdani 算法。即对模型

$$A \circ \begin{cases} A_1 \Rightarrow B_1 \\ \cdots \\ A_m \Rightarrow B_m \end{cases} \Rightarrow B' \circ \begin{cases} B_1' \Rightarrow C_1 \\ \cdots \\ B_n' \Rightarrow C_n \end{cases} \Rightarrow C' \circ \begin{cases} C_1' \Rightarrow D_1 \\ \cdots \\ C_L' \Rightarrow D_L \end{cases} \Rightarrow D$$

有算法

$$D(z) = (q_1, \cdots, q_m) \circ \begin{pmatrix} q_{11} \cdots q_{1n} \\ \cdots \\ q_{m1} \cdots q_{mn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} q_{11}' \cdots q_{1L}' \\ \cdots \\ q_{n1}' \cdots q_{nL}' \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} D_1(w) \\ \vdots \\ D_L(w) \end{pmatrix}.$$

其中

$$q_i = q(A, A_i) \qquad (i \leqslant m)$$
$$q_{ij} = q(B_i, B_j') \qquad (i \leqslant m, j \leqslant n)$$
$$q_{jk}' = q(C_j, C_k') \qquad (j \leqslant n, k \leqslant L)$$

对于多段多重模糊推理，决定推理过程的是相似度。因此可以不必存储中间的模糊集（除 $A_i(i \leqslant m)$ 及 $D_k(k \leqslant L)$ 以外），只要存储相似度矩阵，将输入 A 与 $A_i(i \leqslant m)$ 进行模糊匹配后，与相似度矩阵进行复合运算，最后进行模糊限定即得到推理结果。

3.4 模糊推理算法的生成方法

实现模糊推理算法要解决两个问题。一是必须要给出关系 $R=$“$A\Rightarrow B$”的关系生成算法，二是解决推理 $B'=A' * R$ 的推理合成算法。给出其中任意一个问题的不同算法，就得到模糊推理的一种新算法。

设 A、A' 为 X 上的模糊集，B、B' 为 Y 上的模糊集，模糊推理为

$$B'=A' * R \tag{3.30}$$

即

$$B'(y)=\bigvee_{x\in X}(A'(x) * R(x,y)) \tag{3.31}$$

其中

$$R(x,y)=\text{“}A\Rightarrow B\text{”}(x,y) \tag{3.32}$$

“$\Rightarrow$”即是关系生成算法，“$*$”即是推理合成算法。容易看到，这两种算法都是$[0,1]\times[0,1]$到$[0,1]$的映射。

我们再来看 Mamdani 算法。在 Mamdani 算法中，关系生成算法与推理合成算法均为 $a * b=$“$a\Rightarrow b$”$=a\wedge b=\min(a,b)$。用算子“$\wedge$”生成的推理合成算法称为 max-min 复合算法，并记为

$$B'=A'\circ R$$

例 3.2 给出关系生成算法与推理合成算法为

$$\text{“}a\Rightarrow b\text{”}=(1-a+b)\wedge 1 \tag{3.33}$$

$$\text{“}a * b\text{”}=T_{\infty}(a,b)=(a+b-1)\vee 0 \tag{3.34}$$

即得到一种新算法，记为 R_a 算法。于是得到模糊推理算法

$$\begin{aligned}B'(y)&=\bigvee_{x\in X}\{A'(x)+[(1-A(x)+B(y))\wedge 1]-1\}\vee 0\\&=\bigvee_{x\in X}\{[(A'(x)-A(x)+B(y))\vee 0]\wedge A'(x)\}\end{aligned} \tag{3.35}$$

当 A'正则，且 $A'=A$ 时有

$$B'(y) = B(y)$$

即 $B' = B$。

定义 3.1 设$([0,1], t, \alpha)$为推理空间,记

$$a * b = atb \tag{3.36}$$

称 * 为生成算子,而称

$$\text{“}a \Rightarrow b\text{”} = a\alpha b \tag{3.37}$$

为蕴含算子。

定理 3.1 设 * 为生成算子,“⇒”为蕴含算子,且

$$\text{“}a \Rightarrow b\text{”} = \sup\{c;\ a * c \leqslant b\} \tag{3.38}$$

则“⇒”有以下性质

(1) “$a \Rightarrow 1$” $= 1$;

(2) $a * c \leqslant b \Leftrightarrow$ “$a \Rightarrow b$” $\geqslant c$;

(3) $a * c = b \Leftrightarrow$ “$a \Rightarrow b$” $= c$;

(4) $a * (a \Rightarrow b) \leqslant b$;

(5) “$a \Rightarrow (a * b)$” $\geqslant b$;

(6) “$a \Rightarrow b$” 关于 a 单调不增,关于 b 单调不减。

证明 由于$([0,1], *, \Rightarrow)$为推理空间,易证。

例 3.3 给出三角模 T,记

$$a * b = \mathrm{T}(a, b)$$

可以利用(3.38)对三角模 T 求蕴含算子。

若 $a * b = \mathrm{T}_0(a, b) = a \wedge b$,则

$$\text{“}a \Rightarrow b\text{”} = \begin{cases} b, & a > b \\ 1, & a \leqslant b \end{cases}$$

若 $a * b = \mathrm{T}_1(a, b) = a \cdot b$,则

$$\text{“}a \Rightarrow b\text{”} = \begin{cases} \dfrac{b}{a} \wedge 1, & a > 0 \\ 1, & a = 0 \end{cases}$$

若 $a * b = \mathrm{T}_2(a, b) = \dfrac{a \cdot b}{1 + (1 - a)(1 - b)}$,则

$$“a \Rightarrow b” = \begin{cases} \dfrac{(2b - ab)}{a + b - ab}, & a > b \\ 1, & a \leqslant b \end{cases}$$

若 $a * b = T_{\infty}(a, b) = (a + b - 1) \vee 0$，则

$$“a \Rightarrow b” = (1 - a + b) \wedge 1$$

例 3.4 给出反三角模 S，记

$$a * b = S(a, b)$$

对于反三角模 S 可以利用(3.38)求蕴含算子。如果

$$a * b = S(a, b) = a + b - a \cdot b$$

则有

$$\begin{aligned} “a \Rightarrow b” &= \sup\{x; \quad a * x \leqslant b\} \\ &= \sup\{x; \quad a + x - a \cdot x \leqslant b\} \\ &= \sup\{x; \quad (1 - a)x \leqslant b - a\} \\ &= \begin{cases} \dfrac{b - a}{1 - a}, & b \geqslant a, a < 1 \\ 1, & b \geqslant a, \ a = 0 \\ 0, & b < a \end{cases} \end{aligned}$$

对于 $S_0(a, b) = a \vee b$，有

$$“a \Rightarrow b” = \begin{cases} b, & a \leqslant b \\ 0, & a > b \end{cases}$$

对于 $S_2(a, b) = (a + b)/(1 + a \cdot b)$，有

$$“a \Rightarrow b” = \begin{cases} \dfrac{b - a}{1 - a \cdot b}, & b > a, ab < 1 \\ 1, & b \geqslant a, ab = 1 \\ 0, & b < a \end{cases}$$

对于 $S_\infty(a,b)=(a+b)\wedge 1$，有

$$\text{“}a\Rightarrow b\text{”}=(b-a)\vee 0$$

例 3.5 记

$$a*b=\begin{cases}b, & a+b>1\\ 0, & a+b\leqslant 1\end{cases}$$

由于 $a*b\neq b*a$，它不是三角模，也不是反三角模。$([0,1],*,\Rightarrow)$为推理空间。其中

$$\begin{aligned}\text{“}a\Rightarrow b\text{”}&=\sup\{x;\quad a*x\leqslant b\}\\&=(1-a)\vee b\end{aligned}\tag{3.39}$$

同样对于

$$a*b=\begin{cases}a, & b>0\\ 0, & b=0\end{cases}$$

利用(3.38)可得

$$\text{“}a\Rightarrow b\text{”}=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\ 0, & a>b\end{cases}\tag{3.40}$$

对于

$$a*b=\begin{cases}0, & a+b\leqslant 1\\ b, & a+b>1,\quad a\leqslant b\\ 1, & a+b>1,\quad a<b\end{cases}$$

可得

$$\text{“}a\Rightarrow b\text{”}=(a\wedge b)\vee(1-a)\tag{3.41}$$

在这里 $*$ 都不是三角模或反三角模，但是$([0,1],*,\Rightarrow)$都是推理空间。因此“$*$”是生成算子，“$\Rightarrow$”是蕴含算子。

定理 3.2 设$([0,1],*,\Rightarrow)$是推理空间，且有关系

$$\text{“}a\Rightarrow b\text{”}=\sup\{x;\quad a*x\leqslant b\}\tag{3.42}$$

必有

$$a*b=\inf\{x;\quad \text{“}a\Rightarrow x\text{”}\geqslant b\}\tag{3.43}$$

反之亦然。

证明 由定理3.1(5)“$a \Rightarrow (a * b)$”$\geqslant b$，故

$$a * b \in \{x; \text{“}a \Rightarrow x\text{”} \geqslant b\}$$

$$a * b \geqslant \inf\{x; \text{“}a \Rightarrow x\text{”} \geqslant b\}$$

又由定理3.1(2)，若“$a \Rightarrow x$”$\geqslant b$，必有 $a * b \leqslant x$，则

$$a * b \leqslant \inf\{x; \text{“}a \Rightarrow x\text{”} \geqslant b\}$$

于是(3.43)成立。相反的情况类似可证。

设S为反三角模，取

$$\text{“}a \Rightarrow b\text{”} = S(1 - a, b)$$

则对 S_0, S_1, S_2, S_3 有

$$\text{“}a \Rightarrow b\text{”} = (1 - a) \vee b$$

$$\text{“}a \Rightarrow b\text{”} = 1 - a + ab$$

$$\text{“}a \Rightarrow b\text{”} = \frac{2 - a - b}{a + b - a \cdot b}$$

$$\text{“}a \Rightarrow b\text{”} = 1 \wedge (1 - a + b)$$

由定理3.2可求得 $a * b$。

下面我们给出关系生成的主要方法

R_c: “$a \Rightarrow b$” $= a \wedge b$

R_a: “$a \Rightarrow b$” $= (1 - a + b) \wedge 1$

R_m: “$a \Rightarrow b$” $= (a \wedge b) \vee (1 - a)$

R_b: “$a \Rightarrow b$” $= (1 - a) \vee b$

R_p: “$a \Rightarrow b$” $= a \cdot b$

R_{bp}: “$a \Rightarrow b$” $= (a + b - 1) \vee 0$

$$R_{dp}: \text{“}a \Rightarrow b\text{”} = \begin{cases} a, & b = 1 \\ b, & a = 1 \\ 0, & a < 1, b < 1 \end{cases}$$

$$R_s: \text{“}a \Rightarrow b\text{”} = \begin{cases} 1, & a \leqslant b \\ 0, & a > b \end{cases}$$

$$R_g: \text{“}a \Rightarrow b\text{”} = \begin{cases} 1, & a \leqslant b \\ b, & a > b \end{cases}$$

$$R_\triangle:\quad \text{“}a \Rightarrow b\text{”} = \begin{cases} 1, & a \leqslant b \\ \dfrac{b}{a}, & a > b \end{cases}$$

上面罗列的蕴含算子中，R_c，R_p，R_{bp}，R_{dp}是直接利用三角模作为关系生成方法，R_a，R_g，$R_\triangle$是三角模生成的蕴含算子，R_m，R_b，R_s是由合成算子生成的蕴含算子。

对于推理合成的主要方法采用以下两种

$$\text{max-}\wedge:\quad a * b = a \wedge b$$

$$\text{max-}\odot:\quad a * b = (a + b - 1) \vee 0$$

两种推理合成方法分别记为

$$B' = A' \circ \text{“}A \Rightarrow B\text{”}$$

$$B' = A' \odot \text{“}A \Rightarrow B\text{”}$$

两种推理合成方法与上述 10 种关系生成方法即可得 20 种模糊推理算法，不同算法有不同的结果(见图 3.9)。

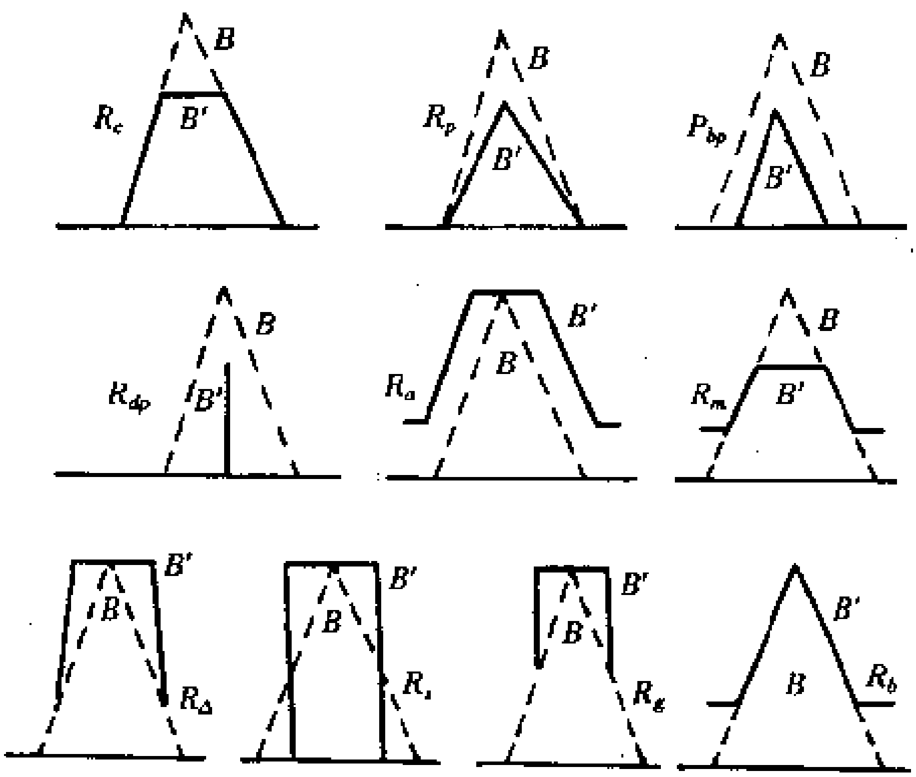


图 3.9 不同的模糊推理方法的推理结果

例 3.6 设 $A' = x_0$，则对于两种推理合成方法都有

$$B'(y) = \text{“}A(x_0) \Rightarrow B(y)\text{”}$$

若 $A(x_0) = 0.7$，上述 10 种方法所得结果如图 3.9。

从图 3.9 可以看到，采用 R_c，R_p，R_{bp}，R_{dp} 有 $B' \subset B$，采用 R_a，R_g，R_b，$R_\triangle$ 有 $B \subset B'$，对于 R_m 与 R_s 随着 $A(x_0)$ 增大，B' 在减小。因此，若利用 R_c，R_p，R_{dp}，R_{bp} 到多重规则时对于推理结果应当用“$\vee$”，而对其它方法用到多重规则时对于推理结果应当用“$\wedge$”。

$$B'(y) = \text{“}A(x_0) \Rightarrow B(y)\text{”}$$

3.5 模糊推理的规则再现算法

由推理空间我们可以得到各种形式的关系生成算法“$\Rightarrow$”与推理合成算法“$*$”。两种算法要相互配合，才能使模糊推理有一个好的效果。模糊推理的规则再现，即是判断两种算法配合效果的一个重要标准。

定义 3.2 若有关系生成算法“$\Rightarrow$”及推理合成算法“$*$”，使对正则模糊集 A 有

$$B = A * \text{“}A \Rightarrow B\text{”}$$

称这种模糊推理算法为规则再现的算法。

显然，Mamdani 算法及 R_a 算法都是关系再现算法。

例 3.7 给出关系生成算法及推理合成算法为

$$\text{“}a \Rightarrow b\text{”} = (1 - a) \vee b$$

$$\text{“}a * b\text{”} = (a + b - 1) \vee 0$$

称为 R_b 算法。于是有

$$B'(y) = (A \odot R)(y)$$

$$= \bigvee_{x \in X} \{A'(x) + [(1 - A(x)) \vee B(y)] - 1\} \vee 0$$

$$= \bigvee_{1-A(x) > B(y)} [(A'(x) - A(x)) \vee 0] \vee \bigvee_{1-A(x) \leqslant B(y)} (B(y) + A'(x) - 1)$$

若 A'为正则的，且 $A' = A$，则

$$B'(y) = B(y)$$

即 $B' = B$，于是 R_b 算法为规则再现算法。

若在例 3.7 中取推理合成算法为

$$a * b = a \wedge b$$

则有

$$B'(y) = \bigvee_{x \in X} [A'(x) \wedge ((1 - A(x)) \vee B(y))]$$

$$= \bigvee_{x \in X} [A'(x) \wedge (1 - A(x))] \vee [(\bigvee_{x \in X} A'(x)) \wedge B(y)]$$

若 $A' = A$，则

$$B'(y) \leqslant \frac{1}{2} \vee B(y)$$

从而 R_b 关于 max-∧不是规则再现算法。同样可以验证 R_a 关于 max-∧也不是规则再现算法。R_Δ 在 max-⊙下是规则再现算法，但在 max-∧下也不是规则再现算法。

例 3.8 R_s 在两种推理合成规则下均为规则再现算法。由

$$R_s: \text{“}a \Rightarrow b\text{”} = \begin{cases} 1, & a \leqslant b \\ 0, & a > b \end{cases}$$

即得

$$\bigvee_{x \in X} (A(x) \wedge \text{“}A \Rightarrow B\text{”}(x, y))$$

$$= \bigvee_{A(x) \leqslant B(y)} A(x) = B(y)$$

$$\bigvee_{x \in X} (A(x) + \text{“}A \Rightarrow B\text{”}(x, y) - 1) \vee 0$$

$$= \bigvee_{A(x) \leqslant B(y)} A(x) = B(y)$$

于是 R_s 对于两种推理合成规则均为规则再现算法。

同样可以验证 R_g, R_c 对于两种推理合成规则均为规则再现算法。

例 3.9 R_m 对于合成规则 max-$\wedge$ 不是规则再现算法。由

$$R_m: \quad \text{“}A \Rightarrow B\text{”} = (a \wedge b) \vee (1-a)$$

则有

$$\begin{aligned}&(A \circ \text{“}A \Rightarrow B\text{”})(y)\\ &\quad = \bigvee_{x \in X} \{A(x) \wedge [(A(x) \wedge B(y)) \vee (1-A(x))]\}\\ &\quad = B(y) \vee (\bigvee_{x \in X} (A(x) \wedge (1-A(x))) \leqslant \frac{1}{2} \vee B(y)\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}&(A \odot \text{“}A \Rightarrow B\text{”})(y)\\ &\quad = \bigvee_{x \in X} \{A(x) + [(A(x) \wedge B(y)) \vee (1-A(x))] - 1\} \vee 0\\ &\quad = B(y) \vee [(\bigvee_{x \in X} (A(x) \vee (1-A(x)) - 1) \vee 0] = B(y)\end{aligned}$$

从而 R_m 对于 max-$\wedge$ 规则不满足规则再现的性质，但对于规则 max-$\odot$ 为规则再现算法。

对于各种模糊推理算法的结果总结如下：

	R_a	R_m	R_c	R_s	R_g	R_b	R_Δ
max-$\wedge$	$0.5(1+B)$	$0.5 \vee B$	B	B	B	$0.5 \vee B$	$\sqrt{B}$
max-$\odot$	B	B	B	B	B	B	B

上面罗列了七种关系生成方法和两种推理合成算法下，小前提为 A，关于 $A \Rightarrow B$ 的推理结果。可以看出推理合成关系 max-$\odot$ 优越于 max-$\wedge$ 的算法。

若 A 表示 X 上的模糊集，则

$$A^2(x) = A(x)^2, \quad \sqrt{A}(x) = \sqrt{A(x)}$$

表示“非常 A”与“稍许 A”。若 A 表示“冷”，则 A^2 表示“非常冷”，$\sqrt{A}$表示“稍许冷”。若 A 表示“大”，则 A^2 表示“非常大”，

$\sqrt{A}$表示"稍许大"。

定义 3.3 设 A 为 X 上的模糊集，B 为 Y 上模糊集，若有合成算子"$*$"及蕴含算子"$\Rightarrow$"是规则再现算法，同时有

$$A^2 * \text{"}A \Rightarrow B\text{"} = B^2$$

$$\sqrt{A} * \text{"}A \Rightarrow B\text{"} = \sqrt{B}$$

称这种模糊推理算法为二次规则再现算法。

例 3.10 R_s 算法是二次规则再现算法。由于

$$\text{"}a \Rightarrow b\text{"} = \begin{cases} 1, & a \leqslant b \\ 0, & a > b \end{cases}$$

$$\text{"}a * b\text{"} = a \wedge b$$

例 3.8 中已知 R_s 为规则再现算法。又因为

$$\bigvee_{x \in X} (A^2(x) \wedge \text{"}A \Rightarrow B\text{"}(x, y))$$

$$= \bigvee \{A^2(x); \quad A(x) \leqslant B(x)\} = B^2(y)$$

$$\bigvee_{x \in X} (\sqrt{A(x)} \wedge \text{"}A \Rightarrow B\text{"}(x, y))$$

$$= \bigvee \{\sqrt{A(x)}; \quad A(x) \leqslant B(y)\} = \sqrt{B(y)}$$

故 R_s 关于 max-$\wedge$ 为二次规则再现算法。同样可以验证 R_s 对推理合成规则

$$a * b = (a + b - 1) \vee 0$$

也是二次规则再现算法。

虽然 R_c 对两种关系合成算法均为规则再现算法，但是有

$$A^2 \circ \text{"}A \Rightarrow B\text{"} = A, \quad \sqrt{A} \circ \text{"}A \Rightarrow B\text{"} = A$$

$$A^2 \odot \text{"}A \Rightarrow B\text{"} = A, \quad \sqrt{A} \odot \text{"}A \Rightarrow B\text{"} = A$$

故 R_c 关于 mas-$\wedge$ 算法不是二次规则再现算法。

定义 3.4 若"$*$"是生成算子，"$\Rightarrow$"为蕴含算子，称区域

$$D = \{(a, b); \quad a * \text{"}a \Rightarrow b\text{"} = b\} \tag{3.44}$$

为再现域。

例 3.11 对于 $a * b = a \wedge b$ 及 R_g

$$“a \Rightarrow b” = \begin{cases} b, & a > b \\ 1, & a \leqslant b \end{cases}$$

有再现域

$$D = \{(a,b); \quad a \geqslant b\}$$

对于 $a * b = a \cdot b$ 及 $R_{\triangle}$

$$“a \Rightarrow b” = \begin{cases} \dfrac{b}{a}, & a > b \\ 1, & a \leqslant b \end{cases}$$

有再现域

$$D = \{(a,b); \quad a \geqslant b\}$$

对于 $a * b = (a + b - 1) \wedge 0$ 及 R_a

$$“a \Rightarrow b” = (1 - a + b) \wedge 1$$

有再现域

$$D = \{(a,b); \quad a \geqslant b\}$$

对于生成算子

$$a * b = \begin{cases} b, & a + b > 1 \\ 0, & a + b \leqslant 1 \end{cases}$$

及蕴含算子 R_b

$$“a \Rightarrow b” = (1 - a) \vee b$$

有再现域

$$D = \{(a,b); \quad a + b > 1\}$$

定理 3.3 规则“$A \Rightarrow B$”关于推理合成算法“$*$”再现的充要条件为，$\forall y \in Y$，存在 $x \in X$，使$(A(x), B(y)) \in D$，其中 D 为由“$\Rightarrow$”及“$*$”确定的再现域。

证明 首先，由定理 3.1，$\forall y \in Y$ 有

$$A(x) * “A(x) \Rightarrow B(y)” \leqslant B(y)$$

于是

$$\bigvee_{x \in X}(A(x) * “A(x) \Rightarrow B(y)”) = B(y) \qquad (3.45)$$

当且仅当存在 $x \in X$ 使

$$A(x) * \text{“}A(x) \Rightarrow B(y)\text{”} = B(y)$$

即存在 $x \in X$ 使 $(A(x), B(y)) \in D$。

严格来说定理 3.3 是对有限集 X 是正确的。若 X 是无限集，要使(3.45)成立，未必有 $(A(x), B(y)) \in D$。这时只要有 $x_n \in X$，使“$A(x_n) * A(x_n) \Rightarrow B(y)$” $\uparrow B(y)$ 即可。

例 3.12 如果 X 是有限集，例 3.11 中的 $R_g, R_\triangle, R_a$ 算法中，使规则“$A(x) \Rightarrow B(y)$”关于相应的“$*$”是规则再现的充要条件为

$$\sup_{x \in X} A(x) \geqslant \sup_{y \in Y} B(y) \qquad (3.46)$$

R_b 使规则“$A(x) \Rightarrow B(y)$”关于相应的“$*$”是规则再现的充要条件为

$$\sup_{x \in X} A(x) + \inf_{y \in Y} B(y) > 1 \qquad (3.47)$$

我们指出，定理 3.3 只是指出了某种模糊推理算法对于具体规则“$A(x) \Rightarrow B(y)$”的规则再现问题的条件。但是，对实用来讲，经常是需要找到一种算法，要对所有的规则“$A \Rightarrow B$”都满足规则再现。比如我们已经指出的 R_c, R_s, R_g 关于推理合成算法：“max-$\wedge$”是规则再现的，R_c，R_s，R_g，R_a，R_n，R_b，$R_\triangle$ 关于规则“max-$\odot$”是规则再现的。由(3.46)可以看出，对于正则模糊集 $\sup_{x \in X} A(x) = 1$，(3.46)总成立，故 $R_g, R_\triangle$ 关于例 3.11 中相应的“$*$”运算是规则再现的。同样，对于正则模糊集，R_b 使规则“$A(x) \Rightarrow B(y)$”关于相应的“$*$”运算是规则再现的充要条件为 $\inf_{y \in Y} B(y) > 0$。

定义 3.5 给出 $X \times Y$ 上的多重规则“$A_i \Rightarrow B_i$”$(i \leqslant n)$，若存在 $X \times Y$ 上的模糊关系 R，使得

$$B_i(y) = \sup_{x \in X} (A_i(x) * R(x, y)) \quad (i \leqslant n) \qquad (3.48)$$

称多重规则“$A_i \Rightarrow B_i$”$(i \leqslant n)$是关于算法“$*$”规则再现的。

定理 3.4 多重规则“$A_i \Rightarrow B_i$”$(i \leqslant n)$关于“$*$”是规则再现

的充分必要条件为，$\forall\, i \leqslant n$ 有

$$B_i(y) = \sup_{x\in X}(A_i(x) * \inf_{j\leqslant n}(A_j \Rightarrow B_j)(x,y)) \tag{3.49}$$

如果"$A_i \Rightarrow B_i$"是由三角模"$*$"运算生成的。

证明 若(3.49)成立，取

$$R(x,y) = \inf_{j\leqslant n}(A_j \Rightarrow B_j)(x,y) \tag{3.50}$$

即得(3.48)，故"$A_i \Rightarrow B_i$"($i \leqslant n$)是规则再现的。若(3.48)成立，由定理 2.12 类似可证(3.48)的解为(3.50)，则证。

例 3.13 设 $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$，$Y=\{y_1, y_2, y_3\}$，取

$A_1 = (0.9, 0.4, 0.3, 0.5)$　　$B_1 = (0.6, 0.7, 0.9)$

$A_2 = (0.4, 0.8, 0, 5, 0.1)$　　$B_2 = (0.4, 0.8, 0.4)$

$A_3 = (0.6, 0.2, 0.9, 0.6)$　　$B_3 = (0.8, 0.3, 0.7)$

$A_4 = (0.5, 0.7, 0.3, 0.6)$　　$B_4 = (0.2, 0,7, 0.5)$

若取生成算子及蕴含算子为

$$a * b = (a + b - 1) \vee 0$$

$$\text{“}a \Rightarrow b\text{”} = (1 - a + b) \wedge 1$$

对于 X×Y 上的模糊关系

$$R = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 & 1.0 \\ 0.5 & 1.0 & 0.2 \\ 0.9 & 0.4 & 0.8 \\ 0.1 & 0.5 & 0.7 \end{pmatrix}$$

有

$$B_i = A_i * R \quad (i \leqslant 4)$$

若取

$$T(x,y) = \inf_{i\leqslant 4}(A_i(x) \Rightarrow B_i(y))$$

即得

$$
T = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 1.0 \\ 0.5 & 1.0 & 0.6 \\ 0.9 & 0.4 & 0.8 \\ 0.6 & 0.7 & 0.9 \end{bmatrix}
$$

而且有

$$
B_i = A_i * T \qquad (i \leqslant 4)
$$

由于定理2.8中指出，模糊关系方程所得到的解是最大解，所以 $T \supset R$。通过 X×Y 上的模糊关系即可进一步进行模糊推理。

3.6 模糊值推理

模糊真值是将逻辑真值模糊化，它是[0,1]上的模糊数。即对于任意 $0<\alpha\leqslant 1$，它的水平集是[0,1]上的非空闭区间。

模糊真值逻辑中的"真的"与"假的"(例1.4)，与经典逻辑中的"真"与"假"的概念是不同的。经典逻辑中的"真"的概念相当于模糊真值逻辑中"完全真"的概念，即

$$
\text{“完全真”}(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \neq 1 \end{cases}
$$

经典逻辑中"假"的概念相当于模糊真值中"完全假"的概念，即

$$
\text{“完全假”}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}
$$

在模糊真值中还有一个特殊概念，即

$$
\text{“不知道”}(x) \equiv 1
$$

设 E 和 F 为两个模糊真值，E_α 与 F_α 为 E 与 F 的 α 水平集，记为 $E_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha]$，$F_\alpha = [c_\alpha, d_\alpha]$ $(\alpha \in (0,1])$。若 $a_\alpha \leqslant c_\alpha, b_\alpha \leqslant d_\alpha (0<\alpha\leqslant 1)$，称 E 不真于 F，记作 $E \leqslant F$。若 $E \leqslant F, F \leqslant E$，则 E 与 F 等价，记作 $E = F$。易见

"完全假" ≤ "假的" ≤ "不知道" ≤ "真的" ≤ "完全真"

对于模糊真值 E 及F,定义逻辑“或”运算为

$$(E \vee F)(z) = \sup_{z=x\vee y}(E(x) \wedge F(y))$$

逻辑“与”运算为

$$(E \wedge F)(z) = \sup_{z=x\wedge y}(E(x) \wedge F(y))$$

模糊真值 E 的补运算为

$$E(x)=E(1-x)$$

如果 E,F 为模糊真值,则 E 与F 的α 水平集为闭区间,记为

$$E_\alpha=[a_\alpha,b_\alpha], \quad F_\alpha=[c_\alpha,d_\alpha]$$

容易证明

$$(E \vee F)_\alpha = E_\alpha \vee F_\alpha = [a_\alpha \vee c_\alpha, b_\alpha \vee d_\alpha]$$

$$(E \wedge F)_\alpha = E_\alpha \wedge F_\alpha = [a_\alpha \wedge c_\alpha, b_\alpha \wedge d_\alpha]$$

$$(E^c)_\alpha = (E_\alpha)^c = [1 - b_\alpha, 1 - a_\alpha]$$

从而证明模糊真值的逻辑运算仍然为模糊真值。

我们可以得到模糊真值逻辑运算的计算公式。记

$$\{x; \quad E(x)=1\}=[x_1,y_1]$$

$$\{x; \quad F(x)=1\}=[x_2,y_2]$$

不妨设 $x_1\leqslant y_2$,则

$$(E \vee F)(x) = \begin{cases} E(x) \wedge F(x), & x \leqslant x_1 \\ F(x), & x_1 < x \leqslant y_2 \\ E(x) \vee F(x), & x > y_2 \end{cases}$$

$$(E \wedge F)(x) = \begin{cases} E(x) \vee F(x), & x \leqslant x_1 \\ E(x), & x_1 < x \leqslant y_2 \\ E(x) \wedge F(x), & x > y_2 \end{cases}$$

设 f: $[0,1]\to[0,1]$是单值映射,由扩张原理可将模糊真值 E 映射到$f(E)$,即

$$f(E)(y)=E(f^1(y))$$

例如 $f_1(x)=\sqrt{x}$，$f_2(x)=x^2$,则(见图 3.10)

$$f_1(E)(y) = E(y^2) = \text{“稍许 }E\text{”}$$

$$f_2(E)(y) = E(\sqrt{y}) = \text{“非常 }E\text{”}$$

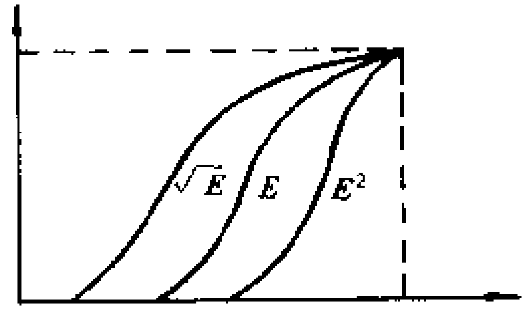


图 3.10 模糊真值的扩张运算

通过“真的”和“假的”少数模糊真值及模糊真值的扩张运算,我们可以得到更多的模糊真值。比如,真,不真,非常真,稍许真,非常非常真,完全真,基本上真,不真不假,或真或假等。

对于模糊控制规则可以用模糊真值加以修饰,因此形成模糊真值推理。模糊真值推理的方法可以借助于模糊推理的方法而形成。

首先考虑最简单的模型

$$\frac{\begin{array}{c}\text{若“X 是 }A\text{”,则“Y 是 }B\text{”}\\ \text{“X 是 }A\text{”是 }\tau\end{array}}{\text{“Y 是 }B\text{”是 }\eta}$$

其中 A 是 X 上的模糊集,B 是 Y 上的模糊集,τ,η 是模糊真值,是[0,1]上的模糊数。这种模型的目的是求 η。为此我们将原来模型修正为以下模型

$$\frac{\begin{array}{c}\text{若 }A\text{,则 }B\\ A'=\tau(A)\end{array}}{B'=\eta(B)}$$

若记蕴含算子 $R(a,b)=$“$a\to b$”，则

$$B'(y)=\sup_x T(A'(x),R(A(x),B(y)))$$
$$=\sup_x T(\tau(A(x)),R(A(x),B(y)))$$
$$=\sup_a T(\tau(a),R(a,(B(y))) \quad (3.51)$$

因此

$$\eta(b)=\sup_a T(\tau(a),R(a,b)) \quad (3.52)$$
$$B'(y)=\eta(B(y)) \quad (3.53)$$

我们指出(3.51)成立要求 $A(x)$取遍[0,1]中的值。但在实际问题中我们可以将(3.52)及(3.53)作为模糊真值的推理方法。

对于多输入的较复杂的模型有类似的方法。例如

若“X是 A”且“Y 是 B”，则“Z 是 C”

“X是 A”是 τ_a，“Y 是 B”是 τ_b，

“Z 是 C”是 τ_c

其中 A,B,C 分别为 X,Y,Z 上的模糊集，τ_a,τ_b,τ_c 是模糊真值，即[0,1]上模糊数。可以将此模型修正为

若 A,B，则 C

$A'=\tau_a(A),B'=\tau_b(B)$

$C'=\tau_c(C)$

按照模糊推理算法有

$$C'(z)=\sup_{x,y} T(T(A'(x),B'(y)),R(T(A(x),B(y)),C(z)))$$
$$=\sup_{a,b} T(T(\tau_a(a),\tau_b(b)),R(T(a,b),C(z)))$$
$$=\sup_w T(\sup_{w=T(a,b)} T(\tau_a(a),\tau_b(b)),R(w,C(z))) \quad (3.54)$$

记

$$\tau_c(u)=\sup_w T(T(\tau_a,\tau_b)(w),R(w,u)) \quad (3.55)$$

则

$$C'(z)=\tau_c(C(z))=\tau_c(C)(z) \quad (3.56)$$

同样指出(3.54)的成立,依赖于 A,B 取遍$[0,1]$中的值及 T 的连续性,不影响(3.55)及(3.56)的使用。

进一步考虑下面的模型

$$\begin{array}{r}
\text{若“X 是 } A\text{”是 } \tau_a\text{,则“}Y\text{ 是 }B\text{”是 } \tau_b \\
\text{“X 是 } A\text{”是 } \tau_c\text{,} \\
\hline
\text{“}Y\text{ 是 }B\text{”}\tau_d
\end{array}$$

则模型可以修正为

$$\begin{array}{r}
\text{若 } A'=\tau_a(A)\text{,则 } B'=\tau_b(B) \\
A''=\tau_c(A) \\
\hline
B''=\tau_d(B')=\tau_d(\tau_b(B))
\end{array}$$

按照模糊推理算法有

$$\begin{aligned}
B''(y) &= \sup_x \mathrm{T}(A''(x),R(A'(x),B'(y))) \\
&= \sup_x \mathrm{T}(\tau_c(A(x)),R(\tau_a(A(x)),\tau_b(B(y)))) \\
&= \sup_a \mathrm{T}(\tau_c(a),R(\tau_a(a),\tau_b(B(y)))) \\
&= \sup_w \mathrm{T}(\sup_{\tau_a(a)=w}\tau_c(a),R(w,\tau_b(B(y)))) \\
&= \sup_w \mathrm{T}(\tau_{ac}(w),R(w,\tau_b(B(y))))
\end{aligned}$$

其中

$$\tau_{ac}(w)=\begin{cases}\sup\{\tau_c(a),w=\tau_a(a)\}, & \tau_a^{-1}(w)\neq\varnothing \\ 0, & \tau_a^{-1}(w)=\varnothing\end{cases}$$

于是

$$B''(y)=\tau_d(B'(y))=\tau_d\circ\tau_b(B(y)) \tag{3.57}$$

$$\tau_d(u)=\sup_w \mathrm{T}(\tau_{ac}(w),R(w,u)) \tag{3.58}$$

若模型是以下面的方式给出的

$$\begin{array}{r}
\text{若“X 是 } A\text{,则 }Y\text{ 是 }B\text{”是 } \tau_R \\
\text{“X 是 } A\text{”是 } \tau_a \\
\hline
\end{array}$$

$$“Y 是 B”是 \tau_b$$

可以直接利用模糊推理算法

$$\begin{aligned}
\tau_b(b) &= \sup_a T(\tau_a(a), \tau_R(R(a,b))) \\
&= \sup_{z=R(a,b)} T(\tau_a(a), \tau_R(z)) \\
&= \sup_{b=T(a,z)} T(\tau_a(a), \tau_R(z)) \\
&= T(a,R)(b)
\end{aligned} \tag{3.59}$$

如果将上述两种模型联合起来即得

$$\frac{\begin{array}{l}[若“X 是 A”是 \tau_a，则“Y 是 B”是 \tau_b]是 \tau_R \\ “X 是 A”是 \tau_c\end{array}}{“Y 是 B”是 \tau_d}$$

则

$$\tau_d(d) = T(\tau_{ac}, \tau_R) \circ \tau_b(d) \tag{3.60}$$

由此可见，对于模糊真值的推理规则模型，只要理解为模糊推理规则模型，不难得到它的推理方法。

若在式(3.30)～式(3.32)中将生成算子“$*$”与蕴含算子“$\Rightarrow$”互换，即得到对偶的模糊推理算法

$$R(x,y) = A(x) * B(y)$$

$$B'(y) = \bigwedge_{x\in X}(A'x) \Rightarrow R(x,y))$$

简记为

$$B' = A' \odot R$$

若对正则模糊集 A 有

$$B = A \odot “A * B”$$

称对偶的模糊推理算法是规则再现的算法。

例 3.14 取生成算子与蕴含算子为

$$a * b = a \wedge b \qquad a \Rightarrow b = \begin{cases} 1, & a \leqslant b \\ b, & a > b \end{cases}$$

于是对于正则模糊集 $A(x)$有

$$B'(y)=\inf_{x\in X}(A(x)\Rightarrow(A(x)\wedge B(y)))$$
$$=\inf\{B(y);\ A(x)>B(y)\}=B(y)$$
即对偶模糊推理算法为规则再现算法。若记
$$D=\{(a,b);\ a\Rightarrow\text{“}a*b\text{”}=b\}$$
称D为对偶再现域。对偶模糊推理算法有与定理3.3和定理3.4类似的结果。

3.7 包含度理论

定义3.6 对于X上任意两个模糊集A,B,若有数$D(B/A)$满足

(1) $0\leqslant D(B/A)\leqslant 1$

(2) 对于经典集A,B,当$A\subset B$时有$D(B/A)=1$

(3) $A\subset B\subset C$时,$D(A/C)\leqslant D(A/B)$

(4) 对于任意模糊集A,B,当$A\subset B$时,对于任意模糊集C有$D(A/C)\leqslant D(B/C)$

称$D(B/A)$为A关于B的包含度。

定理3.5 设T为三角模,α_T满足
$$a\alpha_T b=\sup\{c;\ T(a,c)\leqslant b\}$$
则
$$D(B/A)=\inf_x(A(x)\alpha_T B(x))$$
为包含度,且具有以下性质:

(1) $D(B/A)\geqslant\inf_x B(x)$

(2) $D(B\cap C/A)=D(B/A)\wedge(C/A)$

(3) $D(A/B\cup C)=D(A/B)\wedge D(A/C)$

(4) $D(B\cup C/A)\geqslant D(B/A)\vee(C/A)$

(5) $D(C/A\cap B)\geqslant D(C/A)\vee D(C/B)$

证明　由于 $T(a,b)\leqslant a\wedge b$,则 $a\leqslant b$ 时有

$$1 \geqslant a\alpha_T b \geqslant a\alpha b = \sup\{c;\ a \wedge c \leqslant b\} = 1$$

于是 $a\alpha_T b=1$。因此 $A\subset B$ 时 $A(x)\leqslant B(x)$,从而 $A(x)\alpha_T B(x)=1$,于是 $A\subset B$ 时有 $D(B/A)=1$。由于 $a\alpha_T b$ 是[0,1]上的包含度。其它性质可直接验证。

例 3.15　对于正则模糊集 A 和 B

$$\Pi(B/A) = \sup_x(A(x) \wedge B(x))$$

$$N(B/A) = \inf_x(A^c(x) \vee B(x))$$

$$M(B/A) = \begin{cases}\Pi(B/A), & N(B/A) > 0.5\\ (N(B/A)+0.5)\cdot\Pi(B/A), & N(B/A) \leqslant 0.5\end{cases}$$

是包含度。

证明　Π 和 N 作为包含度直接验证。M 作为包含度只须验证定义 3.6 中的(3)成立,分别考虑 N(A/ C)>0.5,N(A/ C)≤0.5及 N(A/ B)>0.5,N(A/ B)≤0.5 四种组合直接验证。

例 3.16　若 M 为模糊测度,则

$$E(B/A) = M(A^c \cup B)$$

$$F(B/A) = \frac{M(A \cap B)}{M(A)}$$

$$G(B/A) = \frac{M(A^c \cap B^c)}{M(B^c)}$$

$$H(B/A) = M(A\alpha B)$$

为包含度。

例 3.17　设 $X=[0,1]$,$b\leqslant 2a$,$a\leqslant 0.25$

$$A(x) = \begin{cases}\dfrac{x}{a}, & x \leqslant a\\ 2-\dfrac{x}{a}, & a \leqslant x \leqslant 2a\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$B(x)=\begin{cases}\dfrac{x-b}{a}, & b\leqslant x\leqslant a+b\\ 2-\dfrac{x-b}{a}, & a+b\leqslant x\leqslant 2a+b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则得到

$$\Pi(B/A)=1-\frac{b}{2a}$$

$$N(B/A)=0.5\wedge(1-\frac{b}{2a})$$

$$M(B/A)=\begin{cases}\dfrac{2a-b}{2a}, & b<a,\\ (1.5-\dfrac{b}{2a})\cdot(1-\dfrac{b}{2a}), & b\geqslant a\end{cases}$$

$$E(B/A)=\begin{cases}1-\dfrac{a^2+b^2}{2a}, & b<a\\ 1-a, & b\geqslant a\end{cases}$$

$$F(B/A)=\frac{(2a-b)^2}{4a^3}$$

$$G(B/A)=\frac{4a-8a^2+(2a-b)^2}{4a(1-a)}$$

$$H(B/A)=\begin{cases}1, & b=0\\ 1-\dfrac{2a+b}{2}+\dfrac{(2a-b)^2}{8a}, & b>0\end{cases}$$

其中计算 E(B/A)时采用[0,1]上均匀分布。取 $a=0.2, b=0.1$ 可得

$$\Pi(B/A)=0.75,\quad N(B/A)=0.5,\quad M(B/A)=0.75,$$
$$E(B/A)=0.88,\quad F(B/A)=0.84,\quad G(B/A)=0.88,$$
$$H(B/A)=0.8。$$

例 3.18 考虑 $X=\{1,2\}$ 上的模糊集合

$$A=0.8/1+0.5/2,\quad B=0.6/1+0.9/2$$

若 $T(a,b)=a\wedge b$，则

$$D(B/A)=0.6$$

若 $T(a,b)=a\cdot b$，则

$$D(B/A)=0.75$$

若 $T(a,b)=\max(0,a+b-1)$，则

$$D(B/A)=0.8$$

若 $T(a,b)=\dfrac{a\cdot b}{1+(1-a)(1-b)}$，则

$$D(B/A)=0.78$$

定理 3.6 设 P 为概率测度，则

$$D_1(B/A)=\frac{P(A^c\cup B)-P(A^c)}{P(A)}$$

$$D_2(B/A)=\frac{P(A)-P(A\cap B^c)}{P(A)}$$

为包含度。

证明 直接证明即得。

利用例 3.17 中 A,B 以及 X 上的均匀分布可得

$$D_1(B/A)=0.625,\qquad D_2(B/A)=0.615$$

根据包含度的概念可以产生新的模糊推理算法。设有推理规则

$$A_l\ \Rightarrow\ B_l\qquad(l\leqslant k)$$

计算

$$R_l=(A_l(x_i)\wedge B_l(y_i))\qquad(l\leqslant k)$$

$$R=\bigcup_{l=1}^{k}R_l=(r_{ij})$$

若有输入 A'，则输出为

$$B'(y_j)=D(Y_j/A')$$

其中 D 为包含度，且 $Y_j=\sum r_{ij}/x_i$。

若用 $D(B/A)=\Pi(B/A)$，则为 Mamdani 算法。

例 3.19 设 X = {1,2,3}, Y = {1,2,3,4}

A_1 = 小 = (1,0.8,0.3)→B_1 = 大 = (0.1,0.4,0.7,1)

A_2 = 大 = (0.2,0.7,1)→B_2 = 小 = (1,0.8,0.3,0.1)

则

$$R = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.7 & 1 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.8 \\ 1 & 0.8 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Mamdani 方法有结果

$$A_1 \Rightarrow B'_1 = (0.7,0.7,0.7,1)$$

$$A_2 \Rightarrow B'_2 = (1,0.8,0.7,0.7)$$

包含度方法利用公式

$$B'(y_i) = \mathrm{D}(Y_j/A) = \inf_x(A^c(x) \vee Y_j(x))$$

则得到

$$A_1 \Rightarrow B''_1 = (0.2,0.4,0.7,0.7)$$

$$A_2 \Rightarrow B''_2 = (0.7,0.7,0.3,0.3)$$

3.8 可能性推理

可能性推理是基于可能性测度和必然性测度的模糊推理，它是将模糊命题与规则作为一个整体给出真值并进行推理运算。

设 X 是一个论域，G 是 X 上的正则模糊集合，对于任意模糊集合 A，记

$$\Pi(A) = \sup_x(A(x) \wedge G(x))$$

$$\mathrm{N}(A) = \inf_x(A(x) \vee G^c(x))$$

则 $\Pi(A)$为可能性测度，$\mathrm{N}(A)$为必然性测度且

$$\mathrm{N}(A) \leqslant \Pi(A)$$

$$\mathrm{N}(A^c) = 1 - \Pi(A)$$

这时称“X是A”是一个模糊命题记为

$$p = \text{“}X \text{是} A\text{”}$$

$$\Pi(p) = \Pi(A),\ \mathrm{N}(p) = \mathrm{N}(A)$$

定理 3.7 设Π和N分别为X上的模糊集合的可能性测度与必然性测度，A,B是X上的模糊集合，则

$$D_1(B/A) = \mathrm{N}(A^c \cup B)$$

$$D_c(B/A) = \sup\{t;\ \Pi(A \cap B) = \mathrm{T}(t, \Pi(A))\}$$

是模糊命题上的包含度。其中T是三角模。

证明 由于必然性测度为模糊测度，易证D_1是包含度。现证D_2是包含度。首先有$0 \leqslant D_2(B/A) \leqslant 1$。当$A \subset B$时，有

$$\Pi(A \cap B) = \Pi(A) = \mathrm{T}(1, \Pi(A))$$

于是$D_2(B/A) \leqslant 1$。若$A \subset B \subset C$，则

$$\mathrm{T}(t, \Pi(B)) \leqslant \mathrm{T}(t, \Pi(C))$$

于是

$$\begin{aligned} D_2(A/C) &= \sup\{t;\ \Pi(A) = \mathrm{T}(t,\ \Pi(C))\} \\ &\leqslant \sup\{t;\ \Pi(A) = \mathrm{T}(t,\ \Pi(B))\} \\ &= D_2(C/B) \end{aligned}$$

同样可证$A \subset B$时，对于任意C有

$$D(A/C) \leqslant D(B/C)$$

则证D_2为包含度。

定理 3.8 设N为必然性测度，A,B为X上的经典时，记命题

$$p = \text{“}X \text{是} A\text{”},\quad q = \text{“}X \text{是} B\text{”}$$

和可能性推理规则

$$\mathrm{N}(p \to q) = \mathrm{N}(\bar{p} \vee q) = \mathrm{N}(A^c \cup B)$$

$$\Pi(p \to q) = \Pi(\bar{p} \vee q) = \Pi(A^c \cup B)$$

则可能性推理有以下性质：

(1) 若 $N(p\to q)\geqslant\alpha, N(p)\geqslant\beta$，则 $N(q)\geqslant\alpha\wedge\beta$

(2) 若 $N(p\to q)\geqslant\alpha, \Pi(p)\geqslant\beta$，则当 $\alpha>1-\beta$ 时，$\Pi(q)\geqslant\beta$

(3) 若 $\Pi(p\to q)\geqslant\alpha, N(q)\leqslant\beta$，则当 $\alpha>1-\beta$ 时，$\Pi(q)\geqslant\alpha$

(4) 若 $N(p\to q)\geqslant\alpha, N(q)\leqslant\beta$，则当 $\alpha>\beta$ 时，$N(p)\leqslant\beta$

(5) 若 $N(p\to q)\geqslant\alpha, \Pi(q)\leqslant\beta$，则 $\Pi(p)\leqslant(1-\alpha)\vee\beta$

证明 (1)由于

$$p\wedge q=p\wedge(\bar{p}\vee q)$$

则

$$N(q)\geqslant N(p\wedge q)=N(p)\wedge N(p\vee q))$$
$$N(p)\wedge N(p\to q)\geqslant\alpha\wedge\beta$$

(2)由于

$$\bar{q}\wedge\bar{p}=\bar{q}\wedge(\bar{p}\vee q)$$

则

$$N(\bar{p})\geqslant N(p\to q)\geqslant N(\bar{q})\wedge\alpha$$

由假定 $\Pi(p)\geqslant\beta$，于是 $N(\bar{p})\leqslant1-\beta$，从而

$$N(\bar{q})\wedge\alpha\leqslant1-\beta$$

若 $\alpha>1-\beta$，则 $N(\bar{q})\leqslant1-\beta$，于是 $\Pi(q)\leqslant1-N(\bar{q})\geqslant\beta$。

(3)由于

$$\Pi(p\to q)=\Pi(\bar{p}\vee q)=\Pi(\bar{p})\vee\Pi(q)\geqslant\alpha$$

而 $N(p)\geqslant\beta, \Pi(\bar{p})\leqslant1-\beta$。若 $1-\beta<\alpha$，必有 $\Pi(q)\geqslant\alpha$。

(4)由于

$$N(q)\geqslant N(p\wedge q)\geqslant N(p)\wedge N(p\to q)\geqslant N(p)\wedge\alpha$$

当 $\alpha>\beta$ 时，由 $N(q)\leqslant\beta$，则 $N(p)\leqslant\beta$。

(5)由于

$$N(\bar{p})\geqslant N(\bar{q}\to\bar{p})\geqslant N(\bar{q})\wedge N(p\to q)\geqslant\alpha\wedge(1-\beta)$$

则证。

定理 3.9 若 $N(p\to q)\geqslant\alpha, N(q\to p)\geqslant\alpha', \beta\leqslant N(p)\leqslant\beta', r$

$\leqslant \Pi(p) \leqslant r'$,则

$$\alpha \wedge \beta \leqslant N(q) \leqslant \alpha' \alpha \beta'$$

证明 由定理 3.8 即证。

定理 3.10 设 Π 为可能性测度,A,B 为 X 上的经典集,记命题

$$p = \text{“}X \text{ 是 } A\text{”},\quad q = \text{“}X \text{ 是 } B\text{”}$$

和可能性推理规则

$$\Pi(p \to q) = \sup\{t: \Pi(p \wedge q) = T(t, \Pi(p))\}$$
$$= \sup\{t: \Pi(A \cap B) = T(t, \Pi(A))\}$$

则可能性推理具有以下性质:

(1) 若 $\Pi(p \to q) \geqslant \alpha$, $\Pi(p) \geqslant \beta$,则 $\Pi(q) \geqslant T(\alpha, \beta)$

(2) 若 $\Pi(p \to q) \geqslant \alpha$, $\Pi(q) \leqslant \beta$,则 $\Pi(p) \leqslant \alpha \alpha_T \beta$

(3) 若 $\Pi(p \to q) \geqslant \alpha$, $\Pi(q \to p) \geqslant \alpha'$, $\beta \leqslant \Pi(p) \leqslant \beta'$,则

$$T(\alpha, \beta) \leqslant \Pi(q) \leqslant \alpha' \alpha_T \beta'$$

证明 (1)由于

$$q = (p \wedge q) \wedge (\bar{p} \wedge q)$$

于是

$$\Pi(q) = \Pi(p \wedge q) \vee \Pi(\bar{p} \wedge q) \geqslant \Pi(p \wedge q)$$
$$\geqslant T(\Pi(p \to q), \Pi(p \to q), \Pi(p)) \geqslant T(\alpha, \beta)$$

(2)由于

$$\Pi(q) \geqslant T(\Pi(p \to q), \Pi(p))$$

于是

$$\beta \geqslant T(\alpha, \Pi(p))$$
$$\Pi(p) \leqslant \sup\{t;\ T(\alpha, t) \leqslant \beta\} = \alpha \alpha_T \beta$$

(3)由(1)与(2)则证。

第 4 章　模糊控制器的设计

4.1　模糊控制器设计原理

模糊控制器是专门执行模糊控制行为,根据输入信息及控制规则确定控制指令的设备。它的主要功能是执行模糊推理算法。

对于模糊控制器的设计,首先要有推理规则

$$A_{11},\ A_{12},\ \cdots,\ A_{1m} \Rightarrow B_1$$

$$A_{21},\ A_{22},\ \cdots,\ A_{2m} \Rightarrow B_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$A_{n1},\ A_{n2},\ \cdots,\ A_{nm} \Rightarrow B_n$$

模糊规则表示为一些条件语句,即"如果……,那么……"语句。更清楚的表示为,对于 m 个变化条件产生一个决策结果。如果用 X_1, X_2, …, X_m 表示 m 个条件,用 Y 表示结果,模糊规则可以表示为

如果 X_1 是 A_{i1},…,X_m 是 A_{im},那么决策 Y 是 $B_i (i \leqslant n)$

模糊规则可以是通过领域的专家给出的,也可以是通过大量试验数据给出的。要得到模糊规则,首先要解决一个模糊规则生成的问题。特别是在给出一组观测数据的情况下,要有一种方法能够通过观测数据得到模糊规则,这也就是精确数据模糊化的问题。

不管是用领域专家给出的模糊规则,还是用精确数据模糊化的方法给出模糊规则,这些模糊规则都是近似的规则,还需要解决这些模糊规则的谐调的问题。要建立一种方法,删掉一些相互矛

盾的规则,使剩余的模糊规则是基本谐调的。

模糊控制器设计的第二个问题是,选择适当的关系生成方法与推理合成算法。Mamdani 方法是最早最常用的一种方法,也是一种比较简便的方法,但不是普遍的方法。因此,要根据具体控制对象选择适当的模糊推理算法。

模糊推理算法与模糊规则直接相关,它的复杂性依赖于模糊规则语句中的模糊集的隶属函数的确定。选择一些简单的又能反映模糊推理结果的隶属函数可以大大简化模糊推理的计算过程。目前在大多数的控制过程中多选用三角形隶属函数。尽管如此,实现模糊控制的计算量仍是很大的,特别对于一些快速的实时控制不一定能满足要求。如果用硬件设备直接实现模糊推理算法,不仅速度快,而且成本低,使用方便。因此模糊控制器是直接实现模糊推理算法的专用设备。

在模糊推理算法中,主要涉及“$\vee$”及“$\wedge$”运算,同时也可能会有普通的四则运算。对于模糊集,在[0,1]中取值可以用某一区间的电压相对应。日本从 1983 年开始开发模糊推理芯片,可以实现 1 秒钟 1 000 万次推理的速度。为了使模糊控制有良好的效果,首先是推理规则要符合实际,确实符合人们的直观经验,也符合控制过程的定性分析,要有足够的推理规则,在推理规则中的前件要有足够的变量。同时,实现模糊推理的过程要有较快的速度,以保证模糊控制过程的进行。

模糊控制器设计的第三个问题是,模糊推理结果的非模糊化问题。

模糊推理的输出结果是模糊集 B',而在模糊控制中需要输出确定的数值 $y_0 \in Y$,才能为机械控制发布控制指令。这样,就需要求出 B' 的代表点,这就是模糊推理结果的非模糊化问题。

对于模糊推理结果的非模糊化有以下方法:

(1) 简单平均法

取 y_0 为

$$y_0=\frac{1}{2}(\inf A_o+\sup A_o) \tag{4.1}$$

(2) 最大隶属函数法

选择 y_0 使

$$B'(y_0)=\max_{y\in Y}B'(y) \tag{4.2}$$

但有时用(4.2)确定的 y_0 可能不唯一。可以计算使(4.2)成立的 y 的平均值作为 y_0。

方法(1)与(2)不考虑隶属函数的形状,常常使问题简单化,但丢掉了太多的推理结果信息,可能使推理结果失去控制意义。

(3) 重力中心法

选择 y_0 使

$$y_0=\frac{\int_Y yB'(y)\mathrm{d}y}{\int_Y B'(y)\mathrm{d}y} \tag{4.3}$$

这里要求分子与分母的两个积分都存在。重力中心法考虑到 $B'(y)$的形状,采用了较多的信息,是比较常用的方法。

(4) α 水平重力中心法

取

$$y_0=\frac{\int_{B'_\alpha} y\,B'(y)\mathrm{d}y}{\int_{B'_\alpha} B'(y)\mathrm{d}y} \tag{4.4}$$

其中 B'_α 为 B' 的 α 水平集,即

$$B'_\alpha=\{y;\quad B'(y)\geqslant\alpha\} \tag{4.5}$$

例 4.1 取 X=[0,1]上的模糊集(见图 4.1)

$$A(x)=\begin{cases}5x, & 0\leqslant x\leqslant 0.2\\ \frac{5}{4}(1-x), & 0.2<x\leqslant 1\end{cases}$$

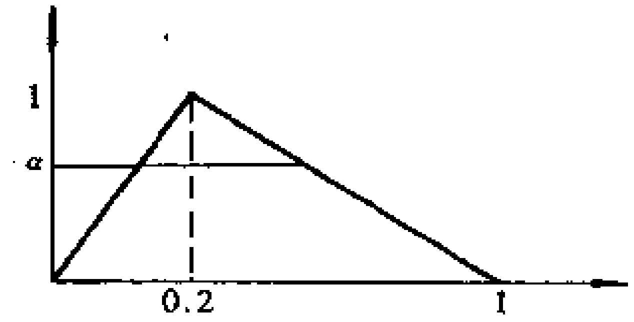


图 4.1 [0,1]上的模糊集

对于 $0<\alpha<1$，有

$$A_\alpha = \left[\frac{\alpha}{5},\ 1-\frac{4}{5}\alpha\right]$$

于是

$$\int_{A_\alpha} A(x)\mathrm{d}x = 5\int_{0.2\alpha}^{0.2} x\mathrm{d}x + \frac{5}{4}\int_{0.2}^{(1-0.8\alpha)} (1-x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{5}{2}x^2\Big|_{0.2\alpha}^{0.2} + \frac{5}{4}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0.2}^{(1-0.8\alpha)}$$

$$= 0.5(1-\alpha^2)$$

$$\int_{A_\alpha} xA(x)\mathrm{d}x = 5\int_{0.2\alpha}^{0.2} x^2\mathrm{d}x + \frac{5}{4}\int_{0.2}^{(1-0.8\alpha)} (x-x^2)\mathrm{d}x$$

$$= 0.2(1-2\alpha^2+\alpha^3)$$

从而得到 α 水平下的重力中心为

$$x_0 = \frac{2(1-2\alpha^2+\alpha^3)}{5(1-\alpha^2)}$$

特别当 $\alpha=0$ 时有 $x_0=0.4$，$\alpha=1$ 时 $x_0=0.2$，$\alpha=\frac{1}{2}$时 $x_0=\frac{1}{3}$（见图 4.2）。

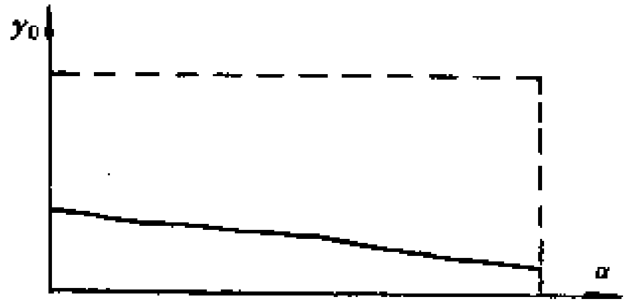


图 4.2　重力中心因 α 水平大小变化情况

定理 4.1　若模糊控制规则为 $A_i \Rightarrow B_i (i \leqslant n)$，模糊推理算法(见图 4.3)为

$$B(y) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i B_i(y) \tag{4.6}$$

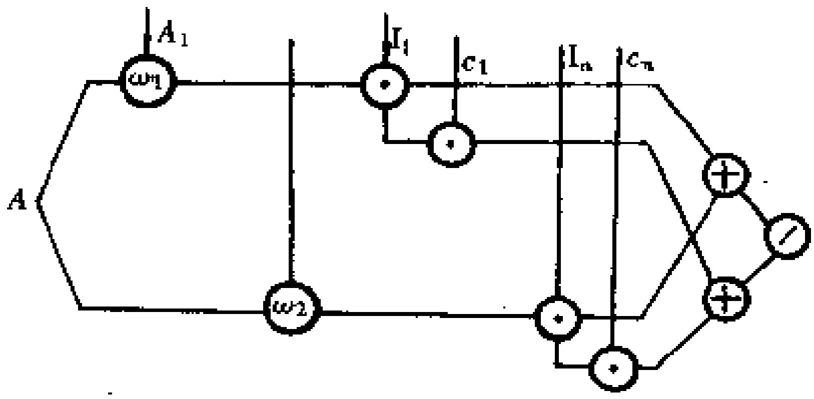


图 4.3　式(4.6)控制算法图

其中

$$\omega_i = \bigvee_{x \in X} (A(x) \wedge A_i(x))$$

A 为输入。此时由重力中心法得到

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i C_i I_i}{\sum_{i=1}^{n} \omega_i I_i} \tag{4.7}$$

其中

$$I_i = \int B_i(y)\mathrm{d}y \qquad (i \leqslant n) \tag{4.8}$$

$$c_i = \frac{\int yB_i(y)\mathrm{d}y}{\int B_i(y)\mathrm{d}y} \qquad (i \leqslant n) \tag{4.9}$$

证明 由于(4.6)，有

$$\begin{aligned}\int B(y)\mathrm{d}y &= \int \sum_{i=1}^{n} \omega_i B_i(y)\mathrm{d}y \\ &= \sum_{i=1}^{n} \omega_i \int B_i(y)\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} \omega_i I_i\end{aligned}$$

又因(4.9)有

$$\int yB(y)\mathrm{d}y = \int y\Big(\sum_{i=1}^{n} \omega_i B(y)\Big)\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} \omega_i c_i I_i$$

则证(4.7)。

由(4.7)式计算重力中心要方便得多。因 c_i 及 $I_i(i \leqslant n)$是可以事先计算储存起来的。

如果模糊控制规则中的 $B_i(i \leqslant n)$是对称的隶属函数，特别像对称的三角形，则 c_i 是使$B(c_i)=1$ 的 Y 中的值。若所有 B_i 的面积均相等时，(4.7)式变为更加简单的计算公式

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i c_i}{\sum_{i=1}^{n} \omega_i} \tag{4.10}$$

例 4.2 设 X=[−8,8]，给出 X 上的 7 个模糊集(图 4.4)。若有模糊推理规则

$$C_i \Rightarrow C_{8-i} \quad (i \leqslant 7)$$

输入为 A，则

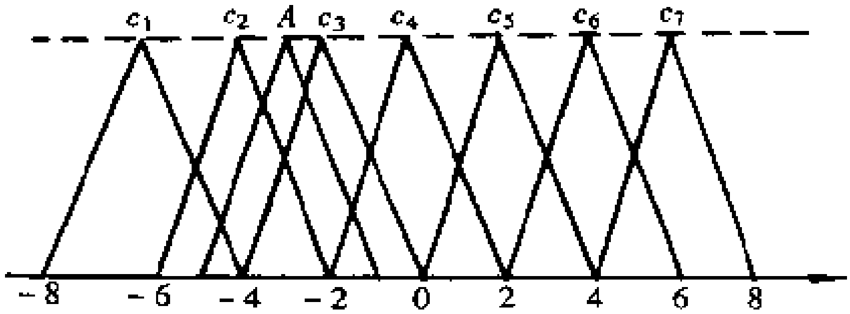


图 4.4 例 4.2 中的标准模糊集

$$\omega_1 = 0.25,\quad \omega_2 = 0.75,\quad \omega_3 = 0.75,\quad \omega_4 = 0.25$$

$$\omega_5 = \omega_6 = \omega_7 = 0$$

$$I_i = \int C_i(y)\mathrm{d}y = 2$$

$$c_1 = +6,\ c_2 = +4,\quad c_3 = +2,\ c_4 = 0$$

于是由(4.10)即得

$$y_0 = \frac{0.25\times(+6)+0.75\times(+4+2)}{2\times 0.75+2\times 0.25} = \frac{+6}{2} = 3$$

例 4.1 中的标准模糊集是常采用的模糊集。它可以表示“负大”，“负中”，“负小”，“近似零”，“正小”，“正中”，“正大”等模糊控制中的常用的概念。例 4.1 中是三角形隶属函数，如果用等腰梯形隶属函数也会得到类似的结果。Mamdani 算法可以输出奇形怪状的隶属函数，但是重力中心法弥补了它的不足。

4.2 模糊控制与 PID 控制的比较

PID 控制是最常用的一种控制方法，它通过误差、误差变化率与误差积累的线性组合给出控制变量的输出值。我们通过用模糊控制实现 PID 控制过程，进一步可以理解模糊控制器的设计原理。

首先介绍简易模糊推理算法。它与一般模糊推理算法不同的是推理规则的后件为一个具体的数量,而不是一个一般的模糊集。具体模型如下

$$\begin{array}{l} 若\ A_1,\ B_1,\ 则\ z_1 \\ 若\ A_2,\ B_2,\ 则\ z_2 \\ \qquad \cdots\cdots \\ 若\ A_n,\ B_n,\ 则\ z_n \\ \underline{x_0,\ y_0,\qquad\qquad\qquad} \\ \qquad\qquad\quad z_0 \end{array}$$

其中 $A_i(i\leqslant n)$为 X 上的模糊集, $B_i(i\leqslant n)$为 Y 上的模糊集,$z_i\in Z(i\leqslant n)$, $x_0\in X$, $y_0\in Y$, $z_0\in Z$, 应用模糊推理算法

$$C'_i(z)=(A_i(x_0)\cdot B_i(y_0))\cdot C_(z) \tag{4.11}$$

于是得到

$$C'_i(z)=\begin{cases} A_i(x_0)\cdot B_i(y_0)=h_i, & z=z_i(i\leqslant n) \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

按照重力中心法有

$$z_0=\frac{\sum\limits_{i=1} h_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} h_i} \tag{4.12}$$

由于简易模糊推理算法直接利用公式(4.12), 所以处理的速度非常快。如果在简易模糊推理算法中用 $f_i(x,y)$代替 z_i, 称为函数模糊推理算法, 这时(4.12)式变为

$$z_0=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} h_i f_i(x_0,\ y_0)}{\sum\limits_{i=1}^{n} h_i} \tag{4.13}$$

函数推理算法同样有处理速度快的特点, 而且提拱了推理规则的灵活性。

下面用简易模糊推理算法分析 PID 控制。

记 $X=[e_1, e_2]$ 为误差 e 的变化范围，$Y=[\Delta e_1, \Delta e_2]$ 为误差变化率的变化范围。给出 X 上的模糊集 E_1，E_2 和 Y 上的模糊集 ΔE_1，ΔE_2。E_1，E_2 分别表示“误差小”和“误差大”，ΔE_1，ΔE_2 分别表示“误差变化率小”和“误差变化率大”(图 4.5)。

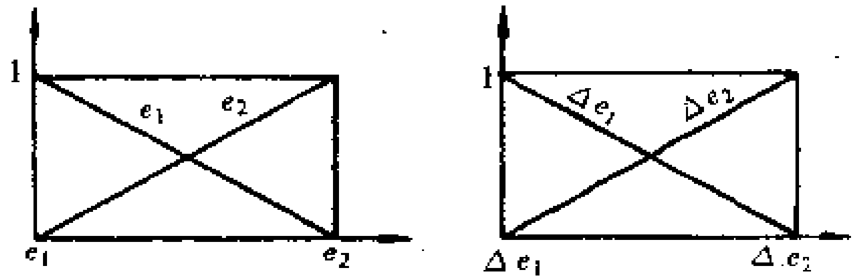


图 4.5　误差与误差变化率的模糊集

给出下面四条模糊规则

若 E_1 和 ΔE_1，则 μ_1

若 E_1 和 ΔE_2，则 μ_2

若 E_2 和 ΔE_1，则 μ_3

若 E_2 和 ΔE_2，则 μ_4

其中

$$\mu_1=\alpha e_1+\beta\Delta e_1$$

$$\mu_2=\alpha e_1+\beta\Delta e_2$$

$$\mu_3=\alpha e_2+\beta\Delta e_1$$

$$\mu_4=\alpha e_2+\beta\Delta e_2$$

如果给出误差 e，误差变化率为 Δe，且

$$a=E_1(e),\ b=\Delta E_1(\Delta e)$$

由图 4.5 即得

$$a=\frac{e_2-e}{e_2-e_1} \tag{4.14}$$

$$b=\frac{\Delta e_2-\Delta e}{\Delta e_2-\Delta e_1} \tag{4.15}$$

有了模糊规则后,我们还要选择模糊推理规则,即选择关系生成算法和推理合成算法。如果关系生成算法与推理合成算法均采用数乘,并采用重力中心法处理输出,即得到(4.12)。根据(4.12)可得

$$\mu=\frac{ab\mu_1+a(1-b)\mu_2+(1-a)b\mu_3+(1-a)(1-b)\mu_4}{ab-a(1-b)+(1-a)b+(1-a)(1-b)}$$

由于分母为 1, 得

$$\mu=ab\mu_1+a(1-b)\mu_2+(1-a)b\mu_3+(1-a)(1-b)\mu_4 \tag{4.16}$$

将(4.13), (4.14)及(4.15)代入(4.16)化简,得

$$\mu = \alpha \cdot e + \beta\Delta e \tag{4.17}$$

(4.17)即是 PD 控制公式(见图 4.6)。

由(4.17)可以看出 PD 控制是简易模糊推理算法的一种特殊情况, 即推理规则中的后件为(4.13)的线性形式。同样, 简易模糊推理算法也可以实现 PID 控制

$$\mu = \alpha \cdot e + \beta \cdot \Delta e + \eta \cdot \int e\mathrm{d}t$$

这时推理规则中的前件有三项, 共有 8 条推理规则。

在以上的简易模糊推理算法中, 关系生成算法与推理合成算法均采用乘法, 也可以采用 Mamdani 算法。这时模糊推理算法不能再实现 PD 控制和 PID 控制。

模糊控制可以实现 PID 控制,但比 PID 控制要灵活得多,因此比 PID 控制取得了明显的效果。将模糊控制应用于空调器,最大效果是温度稳定,基本上保持在设定温度上下, 不会太高,也不

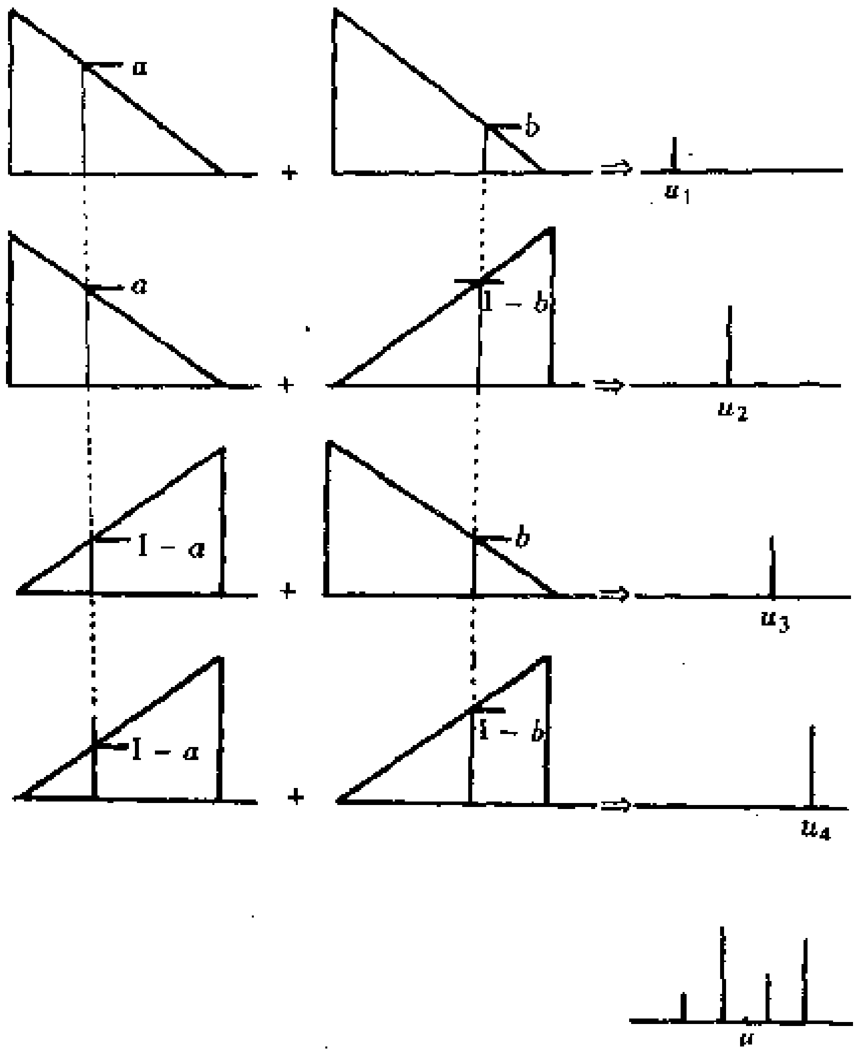


图 4.6　简易模糊推理过程

会太低。如果采用 PID 控制，温度上升太高会断开开关，温度下降太低又接通开关，这样重复下去，温度曲线像锯齿一样(图 4.7)。由于模糊控制温度比较稳定，减少了开关的动作，节能效果显著。通过比较试验，模糊控制空调器消耗电能是 PID 控制空调器的 76%。

模糊控制的另一个优点是对空气温度的急剧变化反应灵敏。假定空调的暖气在开着，某个人到房间来打开了门，房间温度急

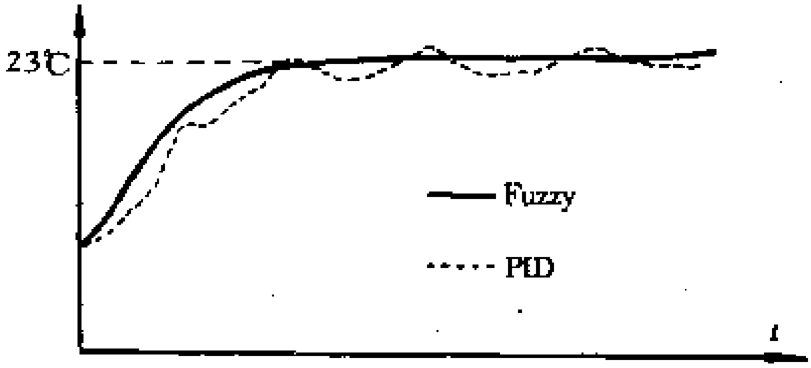


图 4.7 模糊控制与 PID 控制温度变化

剧下降。模糊控制空调器恢复设定温度的速度要比 PID 控制迅速得多。另外实现模糊控制比实现 PID 控制要方便，投资少，通用性相对来说更强一些。

目前比较常用的方法是将模糊控制与 PID 控制结合起来应用到控制过程。在过程变化大时用模糊控制，在过程比较稳定时用 PID 控制，这样可以取得更好的控制效果。

4.3 汽车驾驶系统的模糊控制

考虑一个汽车驾驶系统。汽车在 100 米长 100 米宽的空地上行驶，不管原始位置在什么地方，最终目标为中线的最上方。如果标以横轴为[0,100]，纵轴也为[0,100]的笛卡儿坐标系，最终目标为$(x_f, y_f)=(50, 100)$。汽车头的位置为(x, y)，汽车与 x 轴夹角为 φ，汽车方向盘转换的角度为 θ，且

$$0\leqslant x\leqslant 100$$

$$-90\leqslant \varphi\leqslant 270$$

$$-30\leqslant \theta\leqslant 30$$

我们用模糊语言表示位置 x、角度 φ 及方向盘转换角度 θ

φ	x	θ
RB:右下	LE:左边	NB:负大
RU:右上	LC:左中心	NM:负中
RV:右垂直	CE:中心	NS:负小
CE:中心	RC:右中心	ZE:零
LV:左垂直	RI:右边	PS:正小
LU:左上		PM:正中
LB:左下		PB:正大

表 4.1　汽车驾驶控制规则表

φ \ θ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	NS	PM	PB
CE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NM	NS
LB	NB	NB	NM	NM	NM

对于 x,θ,φ 的语言变量的隶属函数如图 4.8。

对于汽车驾驶系统有 35 条模糊规则。从按照自左到右，自上而下的顺序编号。如

规则 4：若 $x=$RC，$\varphi=$PB，则 $\theta=$PB

规则 18：若 $x=$CE，$\varphi=$VE，则 $\theta=$ZE

规则 35：若 $x=$RI，$\varphi=$LB，则 $\theta=$NS

有了控制规则就可以进行模糊控制。比如可采用熟知的

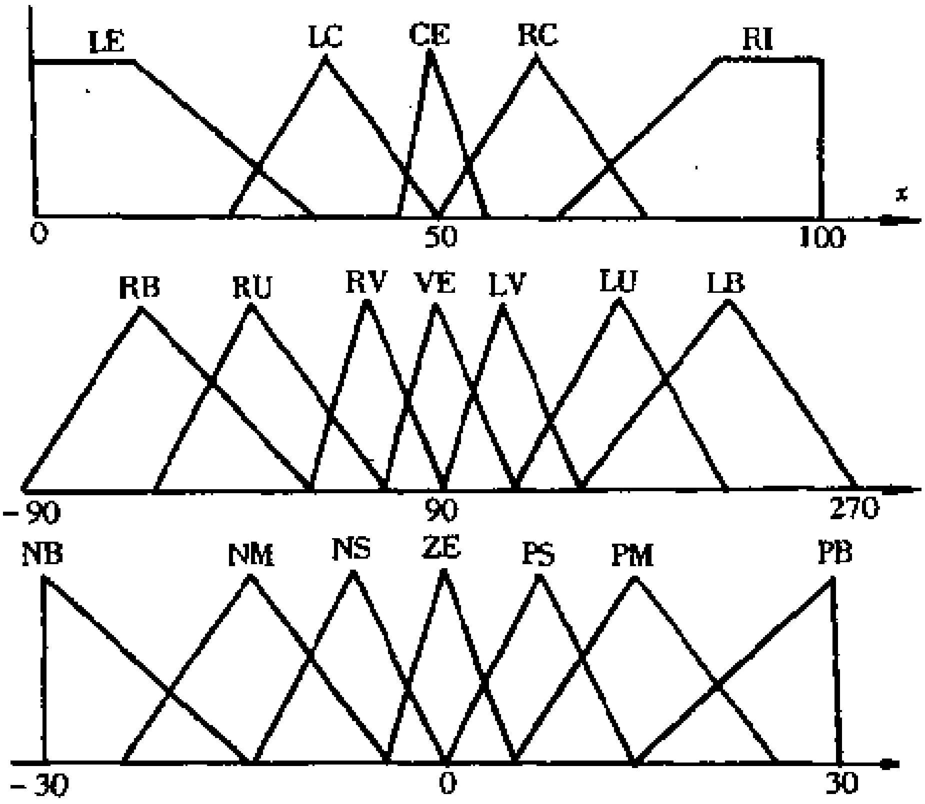


图 4.8　x，φ，θ 的语言变量模糊集

Mamdani 算法等。

模糊控制有一个好处是，改变某些规则或删掉部分规则对控制轨道影响很小，最多影响到轨道的平滑性，而不会影响轨道的大体趋势。

需要指出，汽车驾驶系统虽然有 35 条模糊控制规则，真正实现起来并不需要全部的模糊控制规则。一般是选择其中的部分模糊规则实现模糊控制。这样就涉及到究竟选择哪些模糊规则，选择多少条模糊规则比较合适。一般不要固定一个变量取值而让另一个变量变化，应尽量使两个变量都变化，可以用较少的模糊规则得到较好的效果。

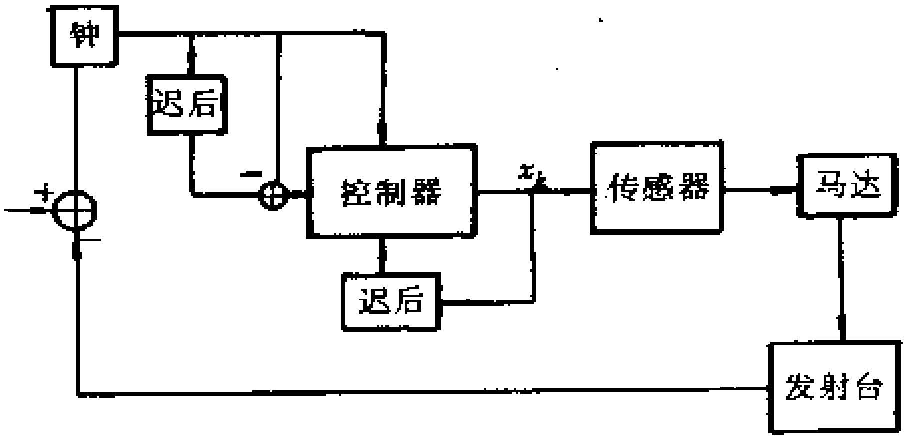


图 4.9　目标跟踪系统

4.4　目标跟踪系统的模糊控制

我们考虑实时目标跟踪系统，比如雷达跟踪系统。它是用水平角与仰角作为输入变量，通过两个马达控制发射台的位置。一般来说，水平角在 0°～180°之间变化，仰角在 0°～90°之间变化。我们通过发射台的位置与目标位置计算当前的误差 e_k 和误差变化率 e'_k，并用 e_k 及 e'_k 作为控制变量，从而得到状态方程与观测方程

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \varphi_{k+1,k} x_k + \Psi_{k+1,k}(e_k + e'_k) + \Gamma_{k+1} W_k \\ Z_k &= H_k x_k + V_k \end{aligned} \qquad (4.18)$$

其中 W_k 及 V_k 为随机向量。特别是，当我们分别研究水平角与仰角时，上面的方程变为一维方程。通过状态方程和观测方程可以实现 Kalman 滤波控制系统。

对于目标跟踪系统也可以实现模糊控制。仍然分别考虑一维情况，即仅考虑水平角或仰角控制。用 e_k，e'_k 及 x_{k-1} 控制 x_k。我们给出 e'_k，x'_{k-1} 的语言变量值

LN：负大	MN：负中
SN：负小	ZE：零
SP：正小	MP：正中
LP：正大	

e_k，e'_k，x_{k-1}的变化范围对应为$[-8,8]$，定义 LN 的隶属函数为

$$\mathrm{LN}(x)=\begin{cases}\alpha(x+8), & -8\leqslant x\leqslant -8+\dfrac{1}{\alpha}\\ 1, & \dfrac{1}{\alpha}-8\leqslant x\leqslant -\left(4-\dfrac{1}{\alpha}\right)\\ -\alpha(x+4), & -\left(4+\dfrac{1}{\alpha}\right)\leqslant x\leqslant 4\end{cases} \tag{4.19}$$

其它的语言变量值可以平移得到。如

$$\mathrm{MN}(x)=\mathrm{LN}(x-2)$$
$$\mathrm{SN}(x)=\mathrm{LN}(x-4)$$
$$\mathrm{ZE}(x)=\mathrm{LN}(x-6)$$
$$\mathrm{SP}(x)=\mathrm{LN}(x-8)$$
$$\mathrm{MP}(x)=\mathrm{LN}(x-10)$$
$$\mathrm{LP}(x)=\mathrm{LN}(x-12)$$

对于 e_k，e'_k 及 x_{k-1}的语言变量值相应的隶属函数可以参照图 4.10。

为了实现模糊控制，我们必须根据经验建立控制规则。比如

若 $e_k=\mathrm{MP}$，$e'_k=\mathrm{SN}$，$x_{k-1}=\mathrm{ZE}$，则 $x_k=\mathrm{SP}$

若 $e_k=\mathrm{ZE}$，$e'_k=\mathrm{SP}$，$x_{k-1}=\mathrm{SN}$，则 $x_k=\mathrm{ZE}$

如果建立所有的规则，需要有 $7^3=343$ 条规则。比如 $e_k=\mathrm{ZE}$ 时就可以建立 49 条规则，如表 4.2。

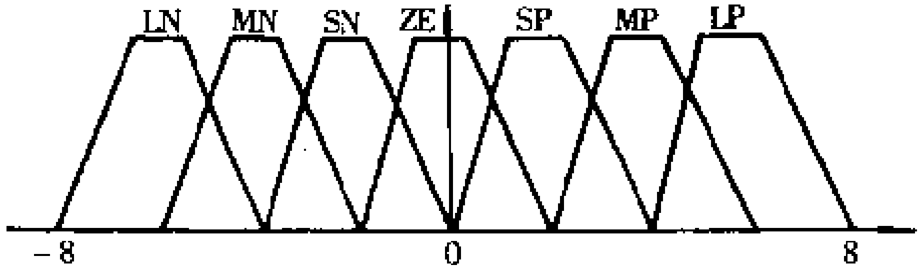


图 4.10 e, e', x 的语言变量值的隶属函数

表 4.2 目标跟踪系统控制规则表

e'_k \ x_{k-1}	LN	MN	SN	ZE	SP	MP	LP
LN	LN	LN	LN	LN	MN	SN	ZE
MN	LN	LN	LN	MN	SN	ZE	SP
SN	LN	LN	MN	SN	ZE	SP	MP
ZE	LN	MN	SN	ZE	SP	MP	LP
SP	MN	SN	ZE	SP	MP	LP	LP
MP	SN	ZE	SP	MP	LP	LP	LP
LP	ZE	SP	MP	LP	LP	LP	LP

假定有 N 条规则,然后选择某种模糊推理算法,我们就得到目标跟踪系统的模糊控制过程(图 4.11)。

实验表明,选择 LN 的隶属函数中的系数 α 对模糊控制有着不同的效果。若 α 太小,则 7 个模糊集交叉部分小;若 α 较大,7 个模糊集交叉部分大。选择适当的 α 值,才能使模糊控制达到最好的效果。

由目标跟踪系统控制过程可以看出,模糊控制也可以实现实时控制,它可以把迟后的状态作为新的输入变量参加模糊推理过程。它甚至于可以用迟后的几个时刻的状态 $x_{k-1}, x_{k-2}, \cdots$,等作

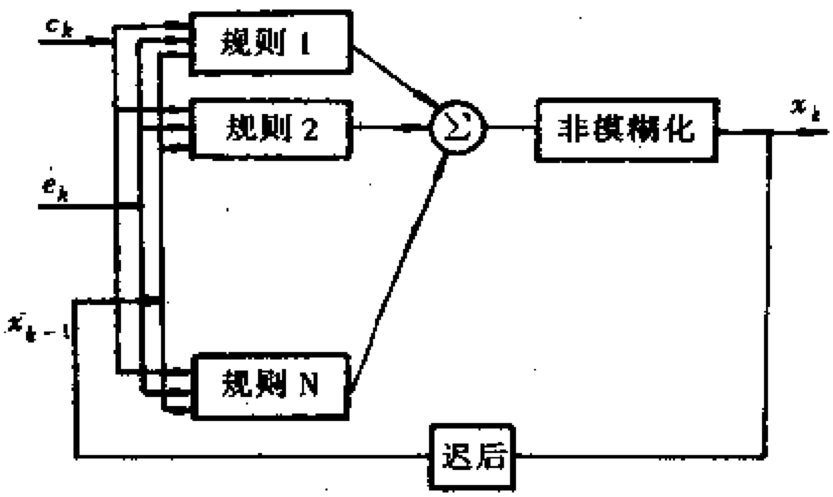


图 4.11　目标跟踪系统控制过程

为新的输入变量。但是输入变量越多,模糊规则越多,更需要对模糊规则进行选择。

4.5 模糊控制器的完备性

为了设计好的模糊控制器,我们研究模糊控制器的性质。

设 X 为输入空间, Y 为输出空间, 控制规则为

$$\text{若 } A_i, \text{ 则 } B_i \qquad (i \leqslant N) \tag{4.20}$$

其中 $A_i(i\leqslant N)$为 X 上的模糊集, $B_i(i\leqslant N)$为 Y 上的模糊集。

我们指出,(4.20)的描述具有一般性, 因为 X 可以是向量空间。比如 $X=X_1\times X_2$,$A_{i1}(i\leqslant N)$为 X_1 上的模糊集, $A_{i2}(i\leqslant N)$为 X_2 上的模糊集, 控制规则为

$$\text{若 } A_{i1} \text{ 且 } A_{i2}, \quad \text{则 } B_i \qquad (i \leqslant N) \tag{4.21}$$

记 $A_i(x)=A_{i1}\wedge A_{i2}$,则(4.21)成为(4.20)式。

模糊控制器的设计是通过 A_i 及$B_i(i\leqslant N)$设计 X×Y 上的模糊关系 R。如果有输入 A,则得到输出

$$B = A \circ R \tag{4.22}$$

$$B(y) = \sup_{x\in X}(A(x) \wedge R(x,y)) \tag{4.23}$$

如果输入为 x_0，则

$$B(y) = R(x_0,\ y)$$

模糊控制器的设计首先要求控制规则的完备性，即对任何模糊输入状态必须产生模糊控制器的输出。

定义 4.1 控制规则集(4.20)称为完备的，若有 $\epsilon>0$，对于任意 $x\in X$，存在 $i\leqslant N$，使 $A(x)>\epsilon$。即

$$(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)(x) > \epsilon \qquad (x \in X) \tag{4.24}$$

完备性对于模糊控制系统是必要的，也是不难满足的。比如对于 Mamdani 算法有

$$R(x,y) = \sup_{i\leqslant N}(A_i(x) \wedge B_i(y)) \tag{4.25}$$

若存在 $x_0\in X$，使 $A_i(x_0)=0$ $(i\leqslant N)$，则 $R(x_0,\ y)=0$。这时对于 x_0 的输入就不会产生控制输出。

4.6 模糊控制器的相容性

设 $A_i(i\leqslant N)$是 X 上的正规模糊集，对于模糊控制规则"$A_i = B_i$"$(i\leqslant N)$生成的模糊关系 R，存在 $j\leqslant N$，使 $A_j\circ R = B_j$，即有 $y_0\in Y$，使

$$(A_j \circ R)(y_0) \neq B_j(y_0) \tag{4.26}$$

称模糊规则具有交互作用。否则称模糊规则是相容的。

我们知道，对于模糊规则"$A_i\Rightarrow B_i$"$(i\leqslant N)$，用下面的方法生成模糊关系

$$R(x,y) = \max_{j\leqslant N}(A_j(x) \wedge B_j(y)) \tag{4.27}$$

恒有

$$B_i \subset A_i \circ R \quad (i \leqslant N) \tag{4.28}$$

设 X 是论域，A 为 X 上的模糊集，若存在且仅存在一个 $x_0 \in$ X，使 $A(x_0)=1$，称 A 是正规模糊峰集。

定义 4.2 设 $A_i(i \leqslant N)$ 为 X 上的 N 个正规模糊峰集，$A_i(x_i)=1(i \leqslant N)$，称 $\{A_i; i \leqslant N\}$ 为 X 的正规模糊分划，若满足以下条件：

(1) $x_i \neq x_j \quad (i \neq j)$

(2) $\sum_{i=1}^{N} A_i(x)=1 \quad (x \in \mathrm{X})$

若进一步满足

(3) 对于任意 $x \in$ X，至多存在两个正规模糊峰集 A_i 和 A_j，使 $A_i(x) \wedge A_j(x) \neq 0$。

称 $\{A_i; i \leqslant N\}$ 为两相正规模糊分划。

定理 4.2 若 $\{A_i; i \leqslant N\}$ 为 X 上的两相正规模糊分划，则有以下性质：

(1) 存在 $\lambda > 0$，使 $\bigcup_{i=1}^{N} (A_i)_\lambda = \mathrm{X}$；

(2) 对于任意 $x \in$ X，存在而且至多存在两个 A_i 和 A_j，使得 $A_i(x) + A_j(x) = 1$。

证明 (2)显然，现证(1)。取

$$\lambda' = \min\{A_i(x) = A_j(x) > 0, \quad i \neq j\}$$

则 $0 < \lambda' \leqslant 0.5$，取 $\lambda \leqslant \lambda'$，则可证(1)。事实上，对于任意 $x \in$ X，必存在 $i \leqslant N$，使 $x \in (A_i)_\lambda$。若对于任意 $i \leqslant N$，$x \notin (A_i)_\lambda$，则 $x \notin (A_i)_{\lambda'}(i \leqslant N)$，$A_i(x) < \lambda'(i \leqslant N)$，于是 $\sum_{i=1}^{N} A_i(x) < 1$，矛盾。

例 4.3 给出区间 $[a, b]$ 的划分

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$$

建立隶属函数如下(见图 4.12)

$$A_1(x) = \begin{cases} (x - x_2)/(x_1 - x_2), & x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \\ 0, & x_2 < x < x_N \end{cases}$$

$$A_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/(x_i - x_{i-1}), & x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i \\ (x - x_{i+1})/(x_i - x_{i+1}), & x_i < x < x_{i+1} \\ 0, & 其它(i = 2 \sim (N-1)) \end{cases}$$

$$A_N(x) = \begin{cases} 0, & x_1 \leqslant x \leqslant x_{N-1} \\ (x - x_{N-1})/(x_N - x_{N-1}), & x_{N-1} \leqslant x \leqslant x_N \end{cases}$$

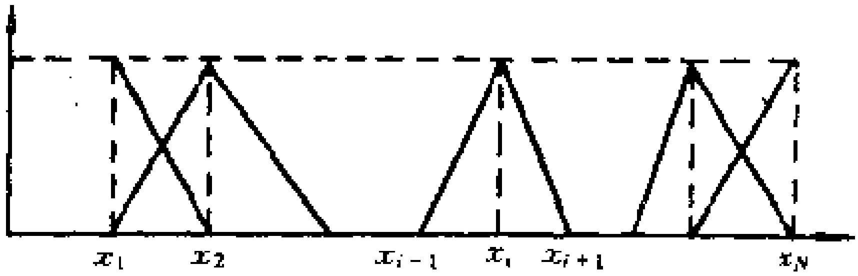


图 4.12 两相正规模糊分划

定理 4.3 设$\{A_i; i \leqslant N\}$为 X 的两相正规模糊分划，模糊规则为 $A_i \to y_i (i \leqslant N)$，其中 $y_i \in Y (i \leqslant N)$，利用数乘作为推理合成算法，并利用重力中心法，对于任意输入 $x \in X$ 有输出

$$\begin{aligned} F(x) &= \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right) y_i + \left(\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i}\right) y_{i+1} \\ &= A_i(x) y_i + A_{i+1}(x) y_{i+1} \\ & \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (i = 1, 2, \cdots, (N-1)) \end{aligned}$$

证明 若 $x \in [x_i, x_{i+1}]$，仅有 $A_i(x) > 0, A_{i+1}(x) > 0$，于是

$$B'(y) = \begin{cases} A_i(x) y_i, & y = y_i \\ A_{i+1}(x) y_{i+1}, & y = y_{i+1} \end{cases}$$

利用(4.4)即得

$$y = F(x) = \frac{A_i(x)y_i + A_{i+1}(x)y_{i+1}}{\sum_{i=1}^{N} A_i(x)}$$

而$\sum_{i=1}^{N} A_i(x) = 1$,则证。

由此可见,如果采用二相正规模糊分划作为模糊规则的前件,则输出为输入的插值。这时,模糊控制器相当于一个插值器。

若在模糊规则"$A_i \Rightarrow B_i$"$(i \leqslant N)$中,$A_i (i \leqslant N)$是正规的,$A_i (i \leqslant N)$是两两不交的,即

$$A_i \cap A_j = \varnothing \qquad (i \neq j) \tag{4.29}$$

$$A_i(x) \wedge A_j(x) = 0 \qquad (i \neq j,\ x \in X) \tag{4.30}$$

则由(4.27)生成的模糊关系是规则再现的,从而是相容的,即

$$A_i \circ R = B_i \quad (i \leqslant N)$$

(4.29)的条件对于模糊规则相容性要求太苛刻,和模糊控制器设计的完备性冲突。为此,我们引进新的概念。对于 X 上两个模糊集 A 及 B,A 和 B 的相似度 $q(A,B)$定义为

$$q(A,B) = \sup_{x \in X}(A(x)tB(x)) \tag{4.31}$$

其中 t 为[0,1]上的三角模。由于三角模关于 max 是可分配的,即

$$(a \vee c)tb = (atb) \vee (ctb) \tag{4.32}$$

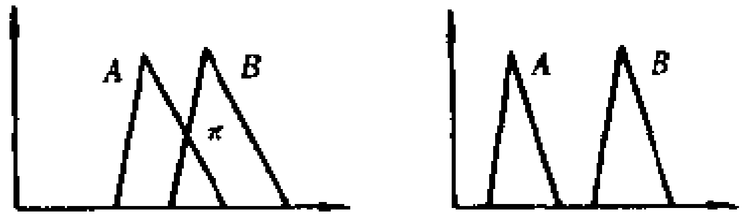
则有性质

$$q(A \cup C/B) = \max(q(A/B),\ q(C/B)) \tag{4.33}$$

$q(A,B)$表示了 A 与 B 的一种相交程度。若 $q(A,B)=0$,显然有 $A \cap B = \varnothing$。反之,若 $A \cap B = \varnothing$,则 $q(A,B)=0$(图 4.13)。因此用相似度 q 刻画无交互影响是合适的。

定理 4.4 若在模糊规则"$A_i \Rightarrow B_i$"$(i \leqslant N)$中,$A_i (i \leqslant N)$是正规的,而且对于任意 $k \leqslant N$,$i \neq k$ 满足对于任意 $y \in Y$ 有

$$q(A_k, A_i) \leqslant B_k(y) \tag{4.34}$$



a) $q(A,B)>0$　　b) $q(A,B)=0$

图 4.13　A 和 B 的相似度

则模糊规则之间无交互作用。这时，模糊规则是相容的。

证明　我们采用(4.27)定义 R，用(4.31)定义相似度，用 sup-min 作为复合运算的情况下进行证明。记

$$B(y)=\sup_{x\in X}(A_j(x)tR(x,y))$$

则有

$$B(y)=\sup_{i\leqslant N}[\sup_{x\in X}(A_j(x)tA_i(x))tB_i(y)]$$
$$=\sup_{i\leqslant N}[q(A_j,A_i)tB_i(y)]$$

由于 $q(A_j,A_j)=1$，则

$$B(y)=\sup_{i\neq j}(q(A_j,A_i)tB_i(y))\vee B_j(y)=B_j(y)$$

于是模糊规则是相容的。

模糊控制器的相容性是指模糊规则的相容性，即无交互作用。在模糊规则中对立的信息可能导致意料之外的和不能令人满意的结果。如果模糊规则中有几条规则有相同的前件，后件却差别很大，都会产生模糊规则的不相容性。

但是模糊规则无交互作用要求规则再现，这对于多条模糊规则的要求也太苛刻，一般是做不到的。为此我们研究模糊规则的模糊谐调性。它比模糊规则的相容性要弱的多，比较符合实际。

定义 4.3　设 S 为 $\mathscr{F}$(X)和 $\mathscr{F}$(Y)上的相似度，对于模糊规则

“$A_1 \to B_1$”和“$A_2 \to B_2$”,称

$$C_{12} = S(A_1, A_2) \alpha_T S(B_1, B_2)$$

为两条模糊规则的谐调度。若 $C_{12} = 1$,称两条模糊规则为模糊谐调的。

谐调度具有如下性质:

a) $C_{12} = 1$,当且仅当 $S(A_1, A_2) \leqslant S'(B_1, B_2)$;

b) $C_{11} = C_{22} = 1$;

c) $C_{12} = C_{21}$。

例 4.4 取 $X = Y = \{1,2,3,4\}$

$$A_1 = (1.0 \quad 0.8 \quad 0.6 \quad 0.2)$$
$$B_1 = (0.2 \quad 0.4 \quad 0.7 \quad 1.0)$$
$$A_2 = (0.1 \quad 0.2 \quad 0.5 \quad 0.9)$$
$$B_2 = (0.9 \quad 0.7 \quad 0.6 \quad 0.2)$$
$$A_3 = (0.9 \quad 0.7 \quad 0.6 \quad 0.3)$$
$$B_3 = (0.8 \quad 0.4 \quad 0.2 \quad 0.1)$$

利用相似度计算公式

$$S(A_1, A_2) = \min_x \frac{A_1(x) \wedge A_2(x)}{A_1(x) \vee A_2(x)} \tag{4.35}$$

$$S(B_1, B_2) = \min_y \frac{B_1(y) \wedge B_2(y)}{B_1(y) \vee B_2(y)} \tag{4.36}$$

即得

$$S(A_1, A_2) = 0.1 \qquad S(B_1, B_2) = \frac{1}{9}$$

再利用包含度公式

$$D(b/a) = 1 \wedge (1 - a + b) \tag{4.37}$$

即得 $C_{12} = 1$。同理可得

$$C_{13} = \frac{13}{30} \qquad C_{23} = 1$$

于是“$A_1 \to B_1$”与“$A_2 \to B_2$”是模糊谐调的,“$A_2 \to B_2$”与“$A_3 \to$

B_3"是模糊谐调的，而"$A_1 \to B_1$"与"$A_3 \to B_3$"不是模糊谐调的。由此可见模糊谐调并没有传递性。

定理 4.5 假设"$A_1 \to B_1$"和"$A_2 \to B_2$"为两条模糊规则，它们均有解，即存在 $R_i: X \otimes Y \to [0,1]$ 满足

$$A_i \circ R_i = B_i \qquad (i=1,2)$$

即

$$\sup_x (A_i(x) \wedge R(x,y)) = B_i(y) \qquad (i = 1,2)$$

则它们有公共解的充分必要条件为

$$C = \min_y \max_x (D(\underline{A}_{12}(x)/\underline{B}_{12}(y)) \wedge D(\underline{A}_{21}(x)/\underline{B}_{21}(y))) = 1 \tag{4.38}$$

其中 D 为 $\mathscr{P}([0,1])$上的包含度，且

$$\underline{A}_{ij}(x) = \begin{cases} [A_i(x), A_j(x)], & A_i(x) \leqslant A_j(x) \\ \varnothing, & A_i(x) > A_j(x) \ (i \neq j) \end{cases}$$

$$\underline{B}_{ij}(y) = \begin{cases} [B_i(y), B_j(y)], & B_i(y) < B_j(y) \\ \varnothing, & B_i(y) \geqslant B_j(y) \ (i \neq j) \end{cases}$$

证明 由定理 2.12 知，"$A_1 \to B_1$"与"$A_2 \to B_2$"有公共解，当且仅当

$$R(x,y) = (A_1(x) \alpha B_1(y)) \wedge (A_2(x) \alpha B_2(y))$$

为公共解，其中 α 是针对三角模 $T(a,b) = a \wedge b$ 的运算。即对于任意 $y \in Y$ 有

$$B_i(Y) = \sup_x [A_i(x) \wedge (A_1(x) \alpha B_1(y)) \wedge (A_2(x) \alpha B_2(y))] \quad (i=1,2)$$

由于 $a \wedge (a \alpha b) = a \wedge b$，则"$A_1 \to B_1$"与"$A_2 \to B_2$"有公共解当且仅当

$$B_1(y) = \sup_x [A_1(x) \wedge B_1(y) \wedge (A_2(x) \alpha B_2(y))] \tag{4.39}$$

$$B_2(y) = \sup_x[A_2(x) \wedge B_2(y) \wedge (A_1(x)\alpha B_1(y))] \tag{4.40}$$

由于 $a\alpha b \geqslant b$，则 $B_1(y)=B_2(y)$时，(4.39)与(4.40)自然成立。当 $B_2(y)>B_1(y)$时，(4.39)自然成立，(4.40)成立当且仅当存在 x 使

$$A_1(x) \leqslant B_1(y) < B_2(y) \leqslant A_2(x) \tag{4.41}$$

同样理由，当 $B_2(y)<B_1(y)$时，(4.40)自然成立，(4.39)成立当且仅当存在 x 使

$$A_2(x) \leqslant B_2(y) < B_1(y) < A_1(x) \tag{4.42}$$

综上讨论，"$A_1 \to B_1$"与"$A_2 \to B_2$"有公共解，当且仅当对于任意 $y \in Y$，$B_i(y)<B_j(y)(i \neq j)$时，必有 x 使

$$[B_i(y), B_j(y)] \subset [A_i(x), A_j(x)]$$

即

$$\underset{\sim}{B}_{12}(y) \subset \underset{\sim}{A}_{12}(x), \quad \underset{\sim}{B}_{21}(y) \subset \underset{\sim}{A}_{21}(x)$$

定理得证。

定理 4.6 若"$A_1 \to B_1$"和"$A_2 \to B_2$"有公共解，则

$$S(A_1, A_2) \leqslant S(B_1, B_2)$$

从而有 $C_{12}=1$，即两条模糊规则是模糊谐调的，其中定义 C_{12}的相似度与包含度为(4.35)～(4.37)。

证明 由定理 4.5 证明知，"$A_1 \to B_1$"与"$A_2 \to B_2$"有公共解当且仅当(4.41)与(4.42)成立，于是对于任意 y，存在 x 使

$$\frac{A_1(x) \wedge A_2(x)}{A_1(x) \vee A_2(x)} \leqslant \frac{B_1(y) \wedge B_2(y)}{B_1(y) \vee B_2(y)}$$

则证。

由定理 4.6 知，若两条模糊规则不是模糊谐调的，则它们必无公共解。

例 4.4 中，由于 $C_{13}<1$，"$A_1 \to B_1$"与"$A_3 \to B_3$"无公共解。$C_{23}=1$，"$A_2 \to B_2$"与"$A_3 \to B_3$"也无公共解，因为$[B_3(4), B_2(4)]$

$=[0.1,0.2]$,不存在 $x=1,2,3,4$,使$[B_3(4),B_2(4)]\subset[A_3(x),A_2(x)]$,由定理 4.5 知,它们无公共解。同样理由 $C_{12}=1$ 且"$A_1\to B_1$"与"$A_2\to B_2$"有公共解。

定理 4.7 假设对于模糊规则"$A_i\to B_i$"($i\leqslant N$)均有解,则它们有公共解 $R:X\otimes Y\to[0,1]$,使 $A_i\circ R=B_i$($i\leqslant N$)的充分必要条件为,对于任意 $y\in Y$ 和 j,存在 x,使对于任意 $B_i(y)<B_j(y)$($i\neq j$),均有

$$A_i(x)\leqslant B_i(y)<B_j(y)\leqslant A_j(x)$$

证明 与定理 4.5 证明类似。为使

$$B_j(y)=\sup_x(A_j(x)\wedge(\bigwedge_{i=1}^{N}(A_i(x)\alpha B_i(y))))$$

只需对于任意 $y\in Y$,存在 x,使 $A_j(x)\geqslant B_j(y)$,且

$$A_i(x)\alpha B_j(y)\geqslant B_j(y)\qquad(i\neq j)$$

即 $i\neq j$,且 $B_i(y)<B_j(y)$时,$A_i(x)\leqslant B_i(y)$,则证。

定义 4.4 设"$A_i\to B_i$"($i\leqslant n$)为 n 条模糊规则,C_{ij}为"$A_i\to B_i$"及"$A_j\to B_j$"的模糊谐调度,称

$$C=\min_{i,j}C_{ij}$$

为"$A_i\to B_i$"($i\leqslant n$)的总模糊谐调度。

对于 n 条模糊规则可以得到模糊谐调度矩阵

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n}\\ & \cdots\cdots & & \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn}\end{bmatrix}$$

矩阵 C 是自反的对称矩阵。在矩阵中找出最小的数,比如 C_{ij}($i\neq j$),排除掉第 i 行第 i 列,依次进行下去,直到所剩的元素均不小于某一预先给定的数($0<\alpha<1$)。

例 4.5 设 $X=Y=\{1,2,3,4\}$

$A_1=\ (0.9\quad 1\quad 0.5\quad 0.1)\qquad B_1=\ (1\quad 0.8\quad 0.4\quad 0.2)$

$A_2=\ (0.1\quad 0.2\quad 0.5\quad 1)\qquad B_2=\ (0.2\quad 0.4\quad 0.7\quad 1)$

$A_3=\ (0.2\quad 0.9\quad 0.6\quad 1)\qquad B_3=\ (0.9\quad 1\quad 0.3\quad 0.2)$

$A_4=\ (0.2\quad 0.4\quad 0.7\quad 1)\qquad B_4=\ (0.1\quad 0.2\quad 0.5\quad 1)$

$A_5=\ (1\quad 0.8\quad 0.4\quad 0.2)\qquad B_5=\ (0.9\quad 1\quad 0.5\quad 0.1)$

$A_6=\ (0.8\quad 1\quad 0.4\quad 0.1)\qquad B_6=\ (0.8\quad 1\quad 0.2\quad 0.1)$

利用(4.35)~(4.37)可得

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.7 \\ 1 & 1 & 0.97 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0.97 & 1 & 0.33 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0.33 & 1 & 0.9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0.9 & 1 & 0.9 \\ 0.7 & 1 & 1 & 1 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

如果 $\alpha=0.7$,可取消规则“$A_3\to B_3$”,如果 $\alpha=0.9$,进一步取消规则“$A_1\to B_1$”。

在模糊控制系统中对于矛盾规则的排除是一个重要问题,它直接关系到控制系统的实用效果。

4.7 模糊控制器的稳健性

像经典控制一样,模糊控制也可以考虑控制器对于输入状态的反应,即由输入的概率特性及模糊控制算子得到相应的控制输出的概率特性。

假定输入变量 ξ 是随机的,P 为 X 上的概率分布,ξ 的分布函数为 $F_\xi(x)$,它表明控制规则的启动阀值也是随机的。对于模糊规则“$A_i\Rightarrow B_i$”($i\leqslant N$),记

$$F_{A_i}(\alpha)=P\{x;\quad A_i(x)<\alpha\}$$

$$= \int_{D_i} \mathrm{d}F_\xi(x)$$

其中

$$D_i = \{x;\quad A_i(x) < \alpha\} \quad (\alpha \in [0,1])$$

则模糊关系 μ 也为随机变量,且

$$\mu(x,y) = \bigvee_{i=1}^{N} (A_i(x) \wedge B_i(y))$$

我们需要计算 μ 的分布函数。首先

$$F_{A_i \wedge B_i}(\alpha) = F_{A_i}(\alpha) + F_{B_i}(\alpha) - F_{(A_i, B_i)}(\alpha, \alpha)$$

由于 B_i 是非随机的,则 A_i 与 B_i 是独立的。于是

$$F_{A_i \wedge B_i}(\alpha) = F_{A_i}(\alpha) + F_{B_i}(\alpha) - F_{A_i}(\alpha) \cdot F_{B_i}(\alpha)$$

其中

$$F_{B_i}(\alpha) = \begin{cases} 0, & B_i(y) > \alpha \\ 1, & B_i(y) \leqslant \alpha \end{cases}$$

$$F_{A_i \wedge B_i}(\alpha) = \begin{cases} F_{A_i}(\alpha), & B_i(y) > \alpha \\ 1, & B_i(y) \leqslant \alpha \end{cases}$$

如果假定模糊规则“$A_i \Rightarrow B_i$”($i \leqslant \mathrm{N}$)之间是相互独立的,则

$$F_\mu(\alpha) = \prod_{i=1}^{N} F_{A_i \wedge B_i}(\alpha)$$

记

$$D_\alpha(y) = \{i; B_i(y) > \alpha\}$$

则

$$F_\mu(\alpha) = \prod_{i \in D_\alpha(y)} F_{A_i}(\alpha)$$

于是得到了模糊控制输出的概率特性。

有了以上的讨论,我们就可以研究模糊控制的稳健性,探求输入扰动是如何影响模糊控制输出的。我们考虑用标准差与均值之比做为变量随机性的度量。记 ξ 和 μ 的均值与方差为

$$m_x = \int x \, \mathrm{d}F_\xi(x)$$

$$\sigma_x = \int (x - m_x)^2 \, \mathrm{d}F_\xi(x)$$

$$m_\mu = \int_0^1 \alpha \mathrm{d}F_\mu(\alpha)$$

$$\sigma_\mu = \int_0^1 (\alpha - m_\mu)^2 \mathrm{d}F_\mu(\alpha)$$

输入与输出的方差与均值的两个比值之间存在特性曲线，即

$$\frac{\sigma_\mu}{m_\mu} = g\left(\frac{\sigma_x}{m_x}\right)$$

利用特性曲线可以讨论模糊控制器的稳健性。如果随着 σ_x/m_x 的增长，σ_μ/m_μ 近似不变，则模糊控制器对于某一范围的输入变量具有稳健性。

从模糊控制器各种静态性能的分析可以看到，它应用于不确定性过程及对于难于阐明和给出数学模型的过程是成功的。模糊控制器可以代替操作员进行，所以它同时具有操作员不利的性质。它能够很快达到设定点并且无显著偏差，但是它在设定点周围扰动或者有些固定误差。在 PID 控制中由于积分运算而去除了稳态误差。这使得我们将模糊控制器与 PID 控制器结合起来构成一个新的控制系统。对于系统离设定点远时采用模糊控制；对于系统离设定点近时采用 PID 控制。V. D. Veen 模拟的结果是令人鼓舞的。但是我们需要知道综合系统选择合适控制器阀值的适当转换点。我们也可以从另外一个角度考虑问题，像 PID 控制器那样引人误差和的模糊变量作为第三个输入变量。

4.8 模糊控制器设计的进展

对于模糊控制器设计的第一个进展是改造模糊控制规则，利

用模糊真值对模糊控制规则进行修饰。比如原来有控制规则"若水流量太大，将闸门关小一些"可以改成以下的规则"若水流量太大是真的，将闸门关小一些是真的，将闸门开大一些是假的"。利用这些规则我们可以使模糊控制规则有更大的灵活性。比如原来有控制规则

$$A \to B$$

A 为 X 上的模糊集，B 为 Y 上的模糊集。A 具有真值 P，B 具有真值 Q，于是有映射

$$A: X \to [0,1], \qquad P: [0,1] \to [0,1]$$
$$B: Y \to [0,1], \qquad Q: [0,1] \to [0,1]$$

可以得到[0,1]上的模糊集

$$P(p) = \sup\{P(A(x));\quad A(x) = p\}$$
$$Q(q) = \sup\{Q(B(y));\quad B(y) = q\}$$

研究多值逻辑的蕴含关系

$$r = p \to q = \begin{cases} 1, & \text{若 } p \leqslant q \\ q, & \text{若 } p > q \end{cases}$$

由模糊集扩张原理可以得到蕴含关系真值在[0,1]上的模糊集

$$R(r) = \sup\{P(p) \wedge Q(q);\ r = p \to q\} \tag{4.43}$$

若记

$$B(p,q,r) = \begin{cases} 1, & r = p \to q \\ 0, & r \neq p \to q \end{cases} \tag{4.44}$$

则有

$$R(r) = \sup_{p,q}(P(p) \wedge Q(q) \wedge B(p,q,r)) \tag{4.45}$$

可以记为模糊关系方程。

$$R = P \circ Q \circ B \tag{4.46}$$

则 $Q(q)$ 为模糊关系方程(4.46)的解。

模糊控制器设计的第二个进展是线性控制系统的模糊化。假定有线性控制系统

$$u = p_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{4.47}$$

$x_i(i \leqslant n)$是输入变量，u 是控制变量。x_i 取值域为 $X_i(i \leqslant n)$，u 的取值域为 U。PID 控制即是线性控制系统。如果输入变量 x_i 是 X_i 上的模糊集，则输出为 U 上的模糊集，即

$$B = p_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i A_i \tag{4.48}$$

其中

$$B(u) = \sup\{\bigwedge_{i \leqslant n} A_i(x_i);\ u = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\} \tag{4.49}$$

控制输出变量为

$$\mu = \frac{\int uB(u)\mathrm{d}u}{\int B(u)\mathrm{d}u} \tag{4.50}$$

类似地，我们可以研究系数 p_i 为模糊集的情形。

模糊控制器设计的第三个进展是模糊推理关系的选择。我们已经知道，可以通过不同的算子来构造模糊推理关系 R。比如已知控制规则 $A_i \Rightarrow B_i(i \leqslant \mathrm{N})$，$A_i(i \leqslant \mathrm{N})$为 X 上的模糊集，$B_i(i \leqslant \mathrm{N})$为 Y 上的模糊集。对于"$A_i \Rightarrow B_i$"可以构造模糊关系 $R_i(i \leqslant \mathrm{N})$。记

$$\mathscr{R}_i = \{R;\ A_i \circ R = B_i\}$$

若 $\mathscr{R}_i \neq \varnothing(i \leqslant N)$，且 $\bigcap_{i=1} \mathscr{R}_i \neq \varnothing$，则 $\forall R \in \bigcap_{i=1}^{N} \mathscr{R}_i$ 有

$$A_i \circ R = B_i(i \leqslant \mathrm{N}) \tag{4.51}$$

于是 R 是使控制规则"$A_i \Rightarrow B_i$"再现的模糊推理关系。但是(4.51)的条件一般说来太强了，经常很难满足。于是我们适当放松(4.51)的要求。

假定 d 是 U 上的函数空间上的某种距离，可以记

$$D = \sum d(A_i \circ R, B_i) \tag{4.52}$$

如果对于模糊推理关系的生成方法Ⅰ和Ⅱ，按照(4.52)得到D(Ⅰ)及D(Ⅱ)，有

$$D(\mathrm{I}) < D(\mathrm{II})$$

称方法Ⅰ比方法Ⅱ优越。

下面我们讨论模糊推理关系的修正。

设“$A_i \Rightarrow B_i$”($i \leqslant N$)为 N 条模糊推理规则，产生 N 个模糊推理关系：

$$R_i(x, y) = A_i(x) \alpha B_i(y) \tag{4.53}$$

可以产生模糊控制的模糊推理关系

$$R = \bigcap_{i=1}^{N} R_i \tag{4.54}$$

如果由“$A_i \Rightarrow B_i$”产生模糊推理关系为

$$R'_i(x, y) = A_i(x) \wedge B_i(y)$$

可以产生模糊控制的模糊推理关系

$$R' = \bigcup_{i=1}^{N} R_i' \tag{4.55}$$

一般来说，这时D(R)可能比较大，于是产生了模糊推理关系的修正。记

$$d_i = (A_i \circ R, B_i), (i \leqslant N) \tag{4.56}$$

$$d' = \min_{i \leqslant N} d_i, \; d'' = \max_{i \leqslant N} d_i$$

$$CF_i = \frac{(d_i - d')}{(d'' - d')} \quad (i \leqslant N) \tag{4.57}$$

则 $CF_i \in [0,1]$($i \leqslant N$)。于是得到(4.54)的修正公式为

$$R_0 = \bigcap_{i=1}^{N} R_i^{CF_i} \tag{4.58}$$

其中

$$R_i^{CF_i}(x, y) = (R_i(x, y))^{CF_i}$$

同样可以得到(4.55)的修正公式为

$$R'_0 = \bigcup_{i=1}^{N} R_i^{(2-CF_i)} \tag{4.59}$$

其中

$$R_i^{(2-CF_i)} = (R_i(x,y))^{(2-CF_i)}$$

Mamdani 于 1977 年将以上方法应用于蒸汽机与锅炉的设计，分别利用了 15 条模糊控制规则与 9 条模糊控制规则，取得了较好的效果。

模糊控制器设计的第四个进展是简化控制过程计算。

在有些控制系统中，模糊控制规则呈现某种关系。比如控制规则前件与后件一致，或者前件和后件是相反的关系，这种情况下可以使模糊控制器设计予以简化。

现在我们考虑模糊控制规则

$$A \text{ and } B \quad \Rightarrow \quad C$$

A,B,C 均为 R 上的模糊数，且隶属函数为等腰三角形。A 可以取以下类型的标准模糊数，设为 $X(n_1,a_1)$(见图 4.14)

$$X(n_1,a_1)(x) = \begin{cases} \dfrac{x-(n_1-1)a_1}{n_1-(n_1-1)a_1}, & (n_1-1)a_1 \leqslant x \leqslant n_1 \\ \dfrac{x-(n_1+1)a_1}{n_1-(n_1+1)a_1}, & n_1 < x \leqslant (n_1+1)a_1 \end{cases}$$

同样地，B 可以取标准模糊数 $Y(n_2,a_2)$，C 可以取标准模糊数 $Z(m,c)$，于是得到模糊控制规则

$$X(n_1,a_1) \quad \text{and} \quad Y(n_2,a_2) \Rightarrow Z(m,c)$$

其中 $m = f(n_1,n_2)$。

考虑 $m = f(n_1,n_2) = -(n_1+n_2)$的情形。

设输入为 x_1 和 x_2，且满足

$$(n_1-1)a_1 \leqslant x_1 \leqslant (n_1+1)a_1$$

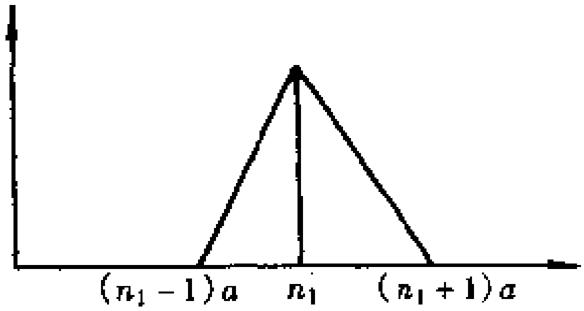


图 4.14 标准模糊数的隶属函数

$$(n_2-1)a_2 \leqslant x_2 \leqslant (n_2+1)a_2$$

于是一般要利用四条规则。不妨设 $x_1 \geqslant n_1, x_2 \geqslant n_2$，这时有以下四条规则

R_1: $X(n_1,a_1)$ and $Y(n_2,a_2) \quad \Rightarrow \quad Z(-(n_1+n_2),c)$

R_2: $X(n_1+1,a_1)$ and $Y(n_2,a_2) \quad \Rightarrow \quad Z(-(n_1+n_2+1),c)$

R_3: $X(n_1,a_1)$ and $Y(n_2+1,a_2) \quad \Rightarrow \quad Z(-(n_1+n_2+1),c)$

R_4: $X(n_1+1,a_1)$ and $Y(n_2+1,a_2) \Rightarrow \quad Z(-(n_1+n_2+2),c)$

由 R_1 得到

$$h_1 = \frac{x_1-(n_1+1)a_1}{n_1-(n_1+1)a_1}, \qquad h_2 = \frac{x_2-(n_2+1)a_2}{n_2-(n_2+1)a_2}$$

于是 $h'_1 = h_1 \wedge h_2$，从而

$$Z'_1(-(n_1+n_2),c) = h'_1 \wedge Z(-(n_1+n_2),c)$$

同样对于 R_2 可计算

$$h_1 = \frac{x_1-n_1a_1}{n_1-n_1a_1}, \qquad h_2 = \frac{x_2-(n_2+1)a_2}{n_2-(n_2+1)a_2}$$

于是 $h'_2 = h_1 \wedge h_2$，从而

$$Z'_2(-(n_1+n_2+1),c) = h'_2 \wedge Z(-(n_1+n_2+1),c)$$

由 R_3 可计算

$$h_1 = \frac{x_1 - (n_1 + 1)a_1}{n_1 - (n_1 + 1)a_1}, \qquad h_2 = \frac{x_2 - n_2 a_2}{n_2 - n_2 a_2}$$

$h'_3 = h_1 \wedge h_2$，从而

$$Z'_3(-(n_1 + n_2 + 1), c) = h'_3 \wedge Z(-(n_1 + n_2 + 1), c)$$

由 R_4 可计算

$$h_1 = \frac{x_1 - n_1 a_1}{n_1 - n_1 a_1}, \qquad h_2 = \frac{x_2 - n_2 a_2}{n_2 - n_2 a_2}$$

$h'_4 = h_1 \wedge h_2$，从而

$$Z'_4(-(n_1 + n_2 + 2), c) = h'_4 \wedge Z(-(n_1 + n_2 + 2), c)$$

记

$$G = Z'_1 \cup Z'_2 \cup Z'_3 \cup Z'_4$$

于是控制输出为

$$u = \frac{\int uG(u)\mathrm{d}u}{\int G(u)\mathrm{d}u}$$

特别当 $c = 0$ 时，有

$$u = \frac{-(n_1 + n_2)h'_1 - (n_1 + n_2 + 1)(h'_2 \vee h'_3) - (n_1 + n_2 + 2)h'_4}{-4(n_1 + n_2 + 1)}$$

于是对于模糊控制的计算变得非常简单。

第 5 章　模糊系统模型

5.1　模糊系统模型的模糊性

在复杂系统的分析中，都是无法用以往准确、严密的分析方法处理的。比如生物学、社会科学、经济学、哲学、心理学等软科学领域，又如大规模交通控制系统、模式识别系统、机器翻译、大规模信息处理系统、大规模电力送配网、神经网络等科学领域，都因其复杂性难于用传统的数学方法进行处理。它们不仅有概率意义下的不规则性，而且有识别分类意义下的不分明性。

所谓模糊系统是指输入、输出、状态都具有模糊性的系统。比如，假定某人目前的状态是“严重感冒”，作为“输入”是“吃了好药”，作为输出“体温稍有下降”，而下一个状态即是“感冒稍有好转”。由于这些状态、输入、输出都是模糊的，所以可以把“某人”看作是模糊系统。

设 X 是状态空间，U 为输入空间，Y 为输出空间。对于某个系统，x_t，u_t，y_t 分别表示在时刻 t 的状态、输入与输出。它们有关系

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t, u_t) \\ y_{t+1} = g(x_{t+1}) \end{cases}$$

其中 f 是 X×U 到 X 的映射，g 为 X 到 Y 的映射。那么这样的系统为确定的系统。

如果 X_t 取值为 X 中的子集合，U_t 取值为 U 中的子集合，Y_t 取值为 Y 中的子集合，它们有关系

$$\begin{cases} X_{t+1} = F(X_t, U_t) \\ Y_{t+1} = G(X_{t+1}) \end{cases}$$

其中

$$F(X_t, U_t) = \{f(x,u); \quad x \in X_t, u \in U_t\}$$

$$G(X_{t+1}) = \{g(x); \quad x \in X_{t+1}\}$$

这样的系统称为不确定系统。

如果 X_t 为 X 上的模糊集，U_t 为 U 上的模糊集，Y_t 为 Y 上的模糊集，它们有关系

$$\begin{cases} X_{t+1} = U_t \circ X_t \circ R \\ Y_{t+1} = X_{t+1} \circ H \end{cases} \tag{5.1}$$

其中 R 是 U⊗X⊗X 上的模糊关系，H 为 X⊗Y 上的模糊关系，这样的系统称为模糊系统。

在模糊系统中，我们需要指出运算"∘"的意义。具体地，可以表示为

$$\begin{cases} X_{t+1}(x) = \sup\limits_{u,x'}(U_t(u) \wedge X_t(x') \wedge R(u,x',x)) \\ Y_{t+1}(y) = \sup\limits_{x}(X_{t+1}(x) \wedge H(x,y)) \end{cases} \tag{5.2}$$

称这种复合运算为 sup-∧运算。也可以用乘法代替"∧"而构成复合运算 sup-·。一般地，我们用 T 模 t 代替"∧"而构成复合运算 sup-t。

例 5.1 设 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$，其中 x_i 表示感冒症状的程度分类。x_1 表示最轻症状，x_2, x_3 表示依次加重的症状，x_4 是感冒最重的症状。严重感冒可以视为 X 上的模糊集

$$X_t = 0/x_1 + 0.1/x_2 + 0.5/x_3 + 0.9/x_4$$

或者简写为

$$X_t = (0, 0.1, 0.5, 0.9)$$

$U = \{a, b\}$，a 是比 b 更好的药。若 $u_t = a$ 时有 X×X 上的关系

$$R(a)=\begin{bmatrix}0.3 & 0.6 & 0.9 & 0.4\\ 0 & 0.3 & 0.6 & 0.9\\ 0 & 0 & 0.3 & 0.6\\ 0 & 0 & 0 & 0.3\end{bmatrix}$$

若 $u_t=b$ 时有 X×X 上的关系

$$R(b)=\begin{bmatrix}0.7 & 0.9 & 0.6 & 0.3\\ 0 & 0.7 & 0.9 & 0.6\\ 0 & 0 & 0.7 & 0.9\\ 0 & 0 & 0 & 0.7\end{bmatrix}$$

若 X_t =“感冒严重”, $U_t=a$,则用 sup-∧复合运算即得

$$X_{t+1}=X_t\circ R(a)=(0,0.1,0.3,0.5)$$

若 X_t =“感冒严重”, $U_t=b$,则用 sup-∧复合运算即得

$$X_{t+1}=X_t\circ R(b)=(0,0.1,0.5,0.7)$$

显然服用 a 药后比服用 b 药后感冒症状减轻的多。

例 5.2 对于一个活性污水处理过程缺乏精确的测试设备,而且是未被充分理解和分析的生化机理。经过污水处理以后有两个变量:一是溶解氧的语言值,可以视为状态变量 X_k;另一个是生化耗氧量语言值,可以视为输入变量 U_k。则有模糊关系方程

$$X_{k+1}=U_{k-1}\circ X_k\circ R$$

例 5.3 我们考虑气体熔炉放出的废气中的二氧化碳的浓度。设状态变量为废气中的二氧化碳的浓度,输入变量为气体流入熔炉的流速,通常这个过程的模型可依据一个时间序列来给出。如果系统的状态与输入变量都是语言值,则为模糊系统模型,即

$$X_{k+1}=U_{k-\tau}\circ X_k\circ R$$

现在我们进一步分析由(5.2)描述的模糊系统的结构,分析模糊性的来源及处理方式。

(1) 模糊的内在表现:模糊性表现在状态变量同控制变量之

间关系的不确定性，它们的关系只能用模糊关系来表示，而不能用逻辑关系与函数关系来表示。比如"若过去的控制相当好，则状态变量在相邻的时间大体上保持不变"即是模糊的内在表现。模糊的内在表现表明在(5.2)中的 R 必为一个模糊关系，而不是一个经典关系。如果考虑输入与状态是确定的情况，即

$$U_k(u) = \delta(u, u_k) = \begin{cases} 1, & u = u_k \\ 0, & u \neq u_k \end{cases}$$

$$X_k(x') = \delta(x', x_k) = \begin{cases} 1, & x' = x_k \\ 0, & x' \neq x_k \text{。} \end{cases}$$

由(5.2)即得

$$\begin{aligned} X_{k+1}(x) &= \sup_{u,x'} \{ U_k(u) \wedge X_k(x') \wedge R(u, x', x) \} \\ &= \sup_{u,x'} \{ \delta(u, u_k) \wedge \delta(x', x_k) \wedge R(u, x', x) \} \\ &= R(u_k, x_k, x) \end{aligned}$$

由于模糊的内在表现，尽管输入是确定的 u_k，状态是确定的 x_k，但下一个状态仍然是模糊的，即为 X 上的模糊子集。

(2) 模糊的外在表现：如果状态变量与输入变量之间的关系是确定的，可以用函数或逻辑关系表示。而状态变量与输入变量本身是模糊的，是用语言值来表达的，导致了系统的模糊性，这即是模糊的外在表现。比如一个容器的体积、气体温度和气体压力之间关系是确定的，若体积与温度用语言值表达时，压力也变成语言值。对于模糊的外在表现，可以视 R 为一个经典关系，比如 R 是一个函数关系，即

$$\mathrm{R}(u, x', x) = \begin{cases} 1, & x = f(u, x') \\ 0, & x \neq f(u, x') \end{cases}$$

也即

$$\mathrm{R}(u, x', x) = \delta(f(u, x'), x)$$

利用(5.2)式可以得到

$$X_{k+1}(x) = \sup\{U_k(u) \wedge X_k(x') \wedge R(u,x',x)\}$$
$$= \sup\{U_k(u) \wedge X_k(x'); \quad x = f(u,x')\}$$

因此,对于具有确定关系的系统,实际上是将扩张原理应用于状态变量及输入变量。

对于模糊系统(5.2)有一些特殊情形:

(1) 无记忆的模糊系统,即

$$\begin{cases} X_{k+1} = U_k \circ R \\ Y_{k+1} = X_{k+1} \circ H \end{cases} \tag{5.3}$$

其中 R 为 U×X 上的模糊关系。对于(5.3)可以更清楚地表示为

$$\begin{cases} X_{k+1}(x) = \sup\limits_{u}\{U_k(u) \wedge R(u,x)\} \\ Y_{k+1}(y) = \sup\limits_{x}\{X_{k+1}(x) \wedge H(x,y)\} \end{cases} \tag{5.4}$$

例 5.4 设 X=Y=U={1,2,3},且

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

若模糊输入为“近似于 1”,即

$$U_k = (1,0.2,0.1)$$

则

$$X_{k+1} = U_k \circ R = (1,0.3,0.2)$$

即下一个时刻的状态“近似于 1”。

(2) 平稳的模糊系统。一般来说,R 和 H 是与时间 t 有关的模糊关系。例如:对于一般的系统有关系

$$\begin{cases} X_{k+p} = U_k \circ X_k \circ X_{k+1} \circ \cdots \circ X_{k+p-1} \circ R \\ Y_{k+p} = X_{k+p} \circ H \end{cases} \tag{5.5}$$

若记

$$R_k = X_{k+1} \circ \cdots \circ X_{k+p-1} \circ R$$

则(5.5)式变为

$$
\begin{cases} X_{k+p} = U_k \circ X_k \circ R_k \\ Y_{k+p} = X_{k+p} \circ H \end{cases} \tag{5.6}
$$

于是(5.6)即是一个非平稳的模糊系统。若 R_k 与 k 无关，称为平稳模糊系统。

(3) 输入为确定的模糊系统。设输入空间为

$$U = \{u_1', \cdots, u_m'\}$$

模糊关系可以表示为

$$R(u_i') = (R(u_i', x', x)) \qquad (i \leqslant m)$$

于是对于 U 中输入序列 u_k, u_{k+1}, $\cdots$, u_{k+p-1}有

$$X_{k+1} = X_k \circ R(u_k)$$

$$X_{k+2} = X_{k+1} \circ R(u_{k+1}) = X_k \circ R(u_k) \circ R(u_{k+1})$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$X_{k+p} = X_k \circ R(u_k) \circ R(u_{k+1}) \cdots R(u_{k+p-1})$$

这些关系非常类似于具有转移概率的模糊系统。

分析(5.1)与(5.2)可以看出，如果将 u_t 视为控制变量，则模糊系统是一个具有反馈的控制系统。如果下一时刻的状态与过去时刻的状态无关，即变为

$$Y_{t+1} = U_t \circ S$$

S 即是控制系统的模糊推理关系"⇒"，复合运算即是推理合成。因此，不管从模糊系统，还是从控制系统，我们都需要知道 R 与 H，才能加以正式应用。解决这一问题，即是模糊系统模型的辨识问题。

5.2 模糊系统模型的辨识

为了讨论模糊系统模型的辨识问题，首先给出模糊关系方程的性质。

设 $X=\{x_1,\cdots,x_n\}$，$Y=\{y_1,\cdots,y_m\}$，A 为 X 上的模糊集，B 为 Y 上的模糊集，记为

$$A=(a_1,\cdots,a_n)$$
$$B=(b_1,\cdots,b_m)$$

$R=(r_{ij})$ 为 $X\times Y$ 上的模糊集，即为 X 到 Y 的模糊关系，T 为[0,1]上的三角模，则

$$B=A\circ_T R \tag{5.7}$$

即

$$b_j=\sup_{i\leqslant n}\{a_i t r_{ij}\}\quad (j\leqslant m) \tag{5.8}$$

为模糊关系方程。如果(5.7)有解 R，记

$$a\alpha_T b=\sup\{\alpha;\quad a t\alpha\leqslant b\} \tag{5.9}$$

由例 2.23 知

$$R^*=A\alpha_T B=(a_i\alpha_T b_j;\ i\leqslant n,j\leqslant m) \tag{5.10}$$

为使(5.7)成立的最大解。即满足

$$B=A\circ_T R^*$$

且当有 R'满足(5.7)时，必有 $R'\subset R^*$。

如果有下面一组模糊关系方程

$$B_k=A_k\circ R\qquad (k\leqslant N) \tag{5.11}$$

其中

$$A_k=(a_1^{(k)},\ \cdots,\ a_n^{(k)})$$
$$B_k=(b_1^{(k)},\ \cdots,\ b_m^{(k)})$$

若对于 $k\leqslant N$，$B_k=A_k\circ_T R$ 有解，则

$$R_k=(a_i^{(k)}\alpha_T b_j^{(k)})=A_k\alpha_T B_k$$

必为 $B_k=A_k\circ R$ 的最大解。若令

$$R=\bigcap_{k=1}^{N}R_k$$

由于 $R\subset R_k(k\leqslant N)$，必有

$$A_k \circ_T R \subset A_k \circ_T R_k = B_k \qquad (k \leqslant N) \tag{5.12}$$

如果对于一个输入输出系统

$$Y = X \circ R$$

已知输入为 A_k 时输出为 $B_k(k \leqslant N)$，根据定理 2.12，当 $A_k \circ R = B_k$ 有公共解时，由

$$R = \bigcap_{k=1}^{N} (A_k \alpha_T B_k)$$

得到的模糊关系即是模糊系统的最大解。于是给出了模糊系统模型的识别。

一般地，对于一个模糊系统模型辨识包含有下面三个步骤。

第一是模糊系统模型结构的确定。

这一步骤对系统的辨识是关键的，对于确定的或随机的系统情况更为复杂，要通过经验和机理分析判断系统模型需要一个什么样的函数关系。在最简单的意义下可以考虑利用线性关系。对于模糊系统确定模型结构反而更加简单，可以用下面的统一形式

$$\begin{cases} X_{k+p} = U_k \circ_T X_k \circ_T X_{k+1} \circ_T \cdots \circ_T X_{k+p-1} \circ_T R \\ Y_{k+p} = X_{k+p} \circ_T H \end{cases} \tag{5.13}$$

也就是说，如果在过去的时刻 $k, k+1, \cdots, k+p-1$，系统的状态用符号 $X_k, X_{k+1}, \cdots, X_{k+p-1}$ 给出，输入用 U_k 给出，则下面时刻 $k+p$ 的状态由 X_{k+p} 通过(5.13)给出。在(5.13)中，除了确定用什么 T 模以外，主要是计算下一时刻的状态与过去的历史长度 p 的关系。模糊系统模型结构的辨识即是模型阶数 p 的辨识。在统计模型中，需要很复杂的数学工具估计模型的类型(线性或非线性)以及模型方程的阶。在模糊系统模型中，模型类型是已知的，主要是要解决阶数的最优化。一般来说，低阶模型对于模糊系统是足够充分的。

第二是对模糊系统模型的确认。

我们考虑以下的 $p = 2$ 的模型

$$X_{k+2} = U_k \circ_T X_k \circ_T X_{k+1} \circ_T R \tag{5.14}$$

其中 U_k 是输入空间 U 上的模糊集合，X_k, X_{k+1}, X_{k+2}是状态空间 X 上的模糊集合。如果有经验

$$\begin{array}{llll} U_1, & X_1, & X_2, & X_3 \\ U_2, & X_2, & X_3, & X_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_N, & X_N, & X_{N+1}, & X_{N+2} \end{array}$$

希望通过这一组经验来确定 R。如果记

$$A_k = U_k \circ_T X_k \circ_T X_{k+1}$$

$$B_k = X_{k+2}$$

则(5.14)变为模糊关系方程

$$B_k = A_k \circ_T R \quad (k \leqslant N) \tag{5.15}$$

第三是选择模糊系统模型辨识方法。

设(5.15)有公共解，则得到(5.14)的模糊系统模型的辨识结果为

$$\begin{aligned} R &= \bigcap_{k=1}^{N} (A_k \alpha_T B_k) \\ &= \bigcap_{k=1}^{N} ((U_k \circ_T X_k \circ_T X_{k+1}) \alpha_T X_{k+2}) \end{aligned} \tag{5.16}$$

需要指出的是，用(5.16)计算的模糊关系首先要求(5.15)必有公共解，这在实际中要检验这一事实是非常困难的。但这并不意味着上述的辨识方法只有理论意义没有实用价值而被放弃。事实上，上面的方法可以被慎重的使用，并且仔细检验其结果的有效性，但不要过高的估计其结果的意义。即使上述方法在应用上不是令人满意的，然而它们为建立更好的识别方法提供了一个好的起点。

5.3 模糊系统模型辨识的强力方法

我们进一步考虑模糊关系方程

$$Y = X \circ_T R$$

若给出输入输出模糊集对$(X_k, Y_k)(k \leqslant N)$，由模糊关系

$$R = \bigcap_{k=1}^{N}(X_k \alpha_T Y_k) \tag{5.17}$$

得到的辨识结果满足(5.12)，用(5.17)作为模糊系统模型的辨识结果，称为模型系统模型辨识的强力方法。由于(5.17)一般并不满足(5.15)，也就是说它不能够实现规则再现，即模糊规则不一定是相容的。因此，我们需要进一步改进模糊系统模型辨识的强力方法。

我们可以从几个方面改进强力方法。

第一种方法是将输入的模糊集对$(X_k, Y_k)(k \leqslant N)$聚类成M组，即得到

$$(X_{i1}, Y_{i1}) \cdots (X_{iN_i}, Y_{iN_i}) \qquad (i \leqslant M)$$

其中$N_1 + N_2 + \cdots + N_M = N$。计算每一组的平均值

$$A_i(x) = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} X_{ij}(x) \qquad (i \leqslant M)$$

$$B_i(y) = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} Y_{ij}(y) \qquad (i \leqslant M)$$

于是得到一组新的模糊集对$(A_i, B_i)(i \leqslant M)$，由强力方法可得模糊关系

$$R = \bigcap_{k=1}^{M}(A_k \alpha_T B_k)$$

计算

$$D = \sum_{k=1}^{N} d(X_k \circ_T R, Y_k)$$

其中 d 为Y上两个模糊集之间的距离。若D足够小，认为分类是合适的。否则调整对原始模糊集对$(X_k, Y_k)(k \leqslant N)$的聚类，包括调整M的大小和每一类的结构。M的大小是很重要的，太大和太小都不合适。具体聚类的方法可以采用经典聚类，也可采用模糊聚类。

例5.5 考虑模糊关系方程

$$B = A \circ R$$

其中 A 是X上模糊集，B 是Y上模糊集，且

$$X = Y = \{1,2,3,4,5\}$$

若输入输出模糊集对是精确的数，如

$$(1,1),\quad (2,2),\quad (3,1),\quad (2,4)$$
$$(4,1),\quad (4,3),\quad (4,4),\quad (5,5)$$

显然使 $Y_k = X_k \circ R(k \leqslant 8)$成立的 R 是不存在的。因为输入为1,3,5时输出单一。但输入为2,4时输出是多值。不可能使用同一公式计算出多值。通过把数据聚类分成五组，对每一组中的数据对计算平均值得到五个数据对，再利用强力方法得到模糊关系

$$R = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.22 & 0.00 & 0.08 & 0.00 \\ 0.40 & 0.90 & 0.00 & 0.80 & 0.00 \\ 1.00 & 0.09 & 0.00 & 0.08 & 0.00 \\ 0.40 & 0.90 & 0.00 & 0.80 & 0.00 \\ 0.05 & 0.11 & 0.00 & 0.08 & 1.00 \end{pmatrix}$$

记模糊关系为 $R = (r_{ij})$。第 i 行可以看作X上的模糊集

$$R_i = r_{i1}/1 + r_{i2}/2 + r_{i3}/3 + r_{i4}/4 + r_{i5}/5$$

计算重心得到

$$y_i^* = \frac{\sum_{j=1}^{5} j r_{ij}}{\sum_{j=1}^{5} r_{ij}} \qquad (i \leqslant 5)$$

于是有

$$D=\frac{1}{8}\{|y_1^*-1|+|y_2^*-2|+|y_3^*-1|+|y_2^*-4|$$
$$+|y_4^*-1|+|y_4^*-3|+|y_4^*-4|+|y_5^*-5|\}=0.82$$

对于强力方法进行改进的第二种方法是对复合运算进行概率约束。考虑模糊关系方程

$$Y=X\circ_T R$$

假定 X 的取值域 X 及 Y 的取值域 Y 是有限空间，记为

$$\mathrm{X}=\{x_1,\cdots,x_n\}$$
$$\mathrm{Y}=\{y_1,\cdots,y_m\}$$

在 X×Y 上有联合概率分布 $\mathrm{P}(x_i,y_i)$，于是有条件概率

$$\mathrm{P}(y_i/x_i)=\frac{\mathrm{P}(x_i,y_i)}{\sum_{j=1}^{m}\mathrm{P}(x_i,y_i)}$$

$\mathrm{P}(y_i/x_i)$表示 x_i 到 y_i 的转移强度。如果在模糊关系的复合运算中仅仅考虑那些有足够强的概率转移的那些元素 x_i，可以修正模糊关系方程为

$$Y(y_i)=\max\{X(x_i)\circ_T R(x_i,y_i);P(y_i/x_i)\geqslant\alpha\}$$

其中 α 是阀值水平，显然有 $\alpha\in[0,1]$。记

$$B_\alpha(x_i,y_i)=\begin{cases}1, & P(y_i/x_i)\geqslant\alpha\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则

$$Y^\alpha=X\circ_T B_\alpha\circ R$$

当 $\alpha<\beta$ 必然有 $Y^\alpha\supset Y^\beta$。上述概率约束方法将排斥掉一些不相容的输入输出模糊对。

阀值 α 的选择有着重要意义。α 太低可能导致给出的输入输出模糊集对仅仅有太少的对被排除，此方法就失去意义。如果 α 太大，仅仅有少数输入输出模糊集对参加运算，模糊关系不反映整

体性质。

例 5.6 设 X 和 Y 中仅有两个元素

$$X = \{x_1, x_2\}$$

$$Y = \{y_1, y_2\}$$

有 $2(n+1)$ 对输入输出。其中 (x_1, y_2) 和 (x_2, y_1) 各有一对，(x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 各有 n 对。按照频率计算方法可得 $X \times Y$ 的联合概率分布为

$$(P(x_i, y_j)) = \begin{bmatrix} \frac{n}{2(n+1)} & \frac{1}{2(n+1)} \\ \frac{1}{2(n+1)} & \frac{n}{2(n+1)} \end{bmatrix}$$

从而得到条件转移概率分布

$$(P(y_j/x_i)) = \begin{bmatrix} \frac{n}{n+1} & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{n+1} & \frac{n}{n+1} \end{bmatrix}$$

如果阈值 $\alpha > \frac{1}{n+1}$，只有 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 不参加复合运算，这样根据强力方法可得模糊关系为单位矩阵，在 $2(n+1)$ 对输入输出中只有 2 对不符合模糊关系方程。若取 $\alpha \leqslant \frac{1}{n+1}$，则所有的输入输出对都参加复合运算，结果是不会令人满意的。

以上的两种方法都是利用概率约束方法对模糊系统模型识别的强力方法进行改进。第一种方法是通过平均减弱输入输出模糊集对的不协调性，第二种方法是用概率约束删除输入输出模糊集对中的不协调规则。因此，不管那一种方法其目的都是为了减少输入输出模糊集对中的不协调性。

在 4.6 节中，我们给出了模糊规则的谐调性和矛盾规则的排除方法。利用谐调度矩阵，可以排除相互矛盾的规则，然后再利用

强力方法得到模糊系统模型辨识中的模糊关系。

我们可以用改进的强力方法生成模糊规则“$A_i \to B_i$”($i \leqslant N$)。模糊规则可由人的经验直接给出，这时表现为一些语句。对于语句中的模糊概念要用模糊集来表示。在这种情况下，选择适当的模糊集合的隶属函数成为模糊规则好坏的关键。一般情况下，我们可以通过计算机仿真选择适当的隶属函数。

如果测量的数据对为$(x_r, y_r)(r \leqslant n)$，其中 $x_i \in X, y_i \in Y$，我们可以将 X 分划为$\{A_i; i \leqslant N\}$，即 $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$，$\bigcup_{i_1}^{N} A_i = X$。同样将 Y 分划为$\{B_i;\ i \leqslant N\}$，即 $B_i \cap B_j = \varnothing (i \neq j)$，$\bigcup_{i_1}^{N} B_i = Y$。计算

$$D(B_j / A_i) = \frac{|A_i \otimes B_j|}{|A_i|}$$

其中$|A_i|$表示$(x_r, y_r)(r \leqslant n)$中 x_r 落在 A_i 中的个数，$|A_i \otimes B_j|$表示$(x_r, y_r)(r \leqslant n)$落在 $A_i \otimes B_j$ 中的个数，易证 $D(B_j / A_i)$为包含度。对于 A_i 取 B_{j_i} 使

$$D(B_{j_i} / A_i) = \max_{j \leqslant N} D(B_j / A_i) = \alpha_i$$

则得到规则“$A_i \to B_{j_i}$”($i \leqslant N$)，其中 α_i 为规则“$A_i \to B_{j_i}$”的强度。若

$$\alpha = \max_{i \leqslant N} \alpha_i = \max_{i \leqslant N} D(B_{j_i} / A_i)$$

接近于1，则认为所得规则是合理的。这时我们可以将 A_i 和 B_{j_i}($i \leqslant N$)变为模糊集而形成模糊规则。

例5.7 设 $X = Y = [0,8]$，分划为

$$A_1 = B_1 = [0,2),$$

$$A_2 = B_2 = [2,4)$$

$$A_3 = B_3 = [4,6),$$

$$A_4 = B_4 = [6,8]$$

若有$(x_i, y_i)(i \leqslant n)$，且它们落在 $A_i \times B_j$ 的数目为如表 5.1 所示。

表 5.1　例 5.7 中数据表

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5	5	10	20
A_2	0	5	10	5
A_3	5	20	5	0
A_4	8	2	0	0

于是$|A_1| = 40$，$|A_2| = 20$，$|A_3| = 30$，$|A_4| = 10$。计算

$$D(B_1/A_1) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} = 0.125$$

$$D(B_2/A_1) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} = 0.125$$

$$D(B_3/A_1) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$D(B_4/A_1) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} = 0.5$$

于是得到规则“$A_1 \to B_4$”，规则强度为 0.5。

同样，我们可以得到规则 $A_2 \to B_3$，$A_3 \to B_2$，$A_4 \to B_1$。

下面我们进一步将规则模糊化。取

$$A_1(x) = B_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{3-x}{2}, & 1 < x \leqslant 3, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$A_2(x) = B_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2}, & 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ \dfrac{5-x}{2}, & 3 < x \leqslant 5, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$A_3(x)=B_3(x)=\begin{cases}\dfrac{x-3}{2}, & 3\leqslant x\leqslant 5\\ \dfrac{7-x}{2}, & 5<x\leqslant 7\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$A_4(x)=B_4(x)=\begin{cases}\dfrac{x-5}{2}, & 5\leqslant x\leqslant 7\\ 1, & 7<x\leqslant 8\end{cases}$$

于是我们得到模糊规则“$A_i \to B_{5-i}$”($i\leqslant 4$)。

如果一个模糊系统为

$$X^{(k+1)}=X^{(k)}\circ X^{(k-1)}\circ X^{(k-2)}\cdots\circ X^{(k-p)}\circ U^{(k)}\circ R$$

那么我们也可以用上述方法选择 R。这时研究每个 $X^{(k-i)}$($i=0,p$)及 $U^{(k)}$与 $X^{(k+1)}$的关系得到模糊规则。选择规则总强度最大的作为模型中的条件。比如可能为

$$X^{(k+1)}=X^{(k)}\circ X^{(k-2)}\cdots\circ U^{(k)}\circ R$$

这样模糊系统模型改进的强力方法也可以作为系统阶数辨识的一种方法。

例 5.8 取 X = Y = [0,8],划分与例 5.7 相同。$X^{(k)}$与 $X^{(k-1)}$,$X^{(k-2)}$,$X^{(k-3)}$,$X^{(k-4)}$的关系如表 5.2。

计算

$$D(X^{(k)}/X^{(k-1)})=D(B_4/A_1)\wedge D(B_3/A_2)\wedge D(B_2/A_3)\wedge D(B_1/A_4)=\frac{3}{4}\wedge\frac{12}{20}\wedge\frac{20}{30}\wedge\frac{10}{10}=\frac{3}{5}$$

$$D(X^{(k)}/X^{(k-2)})=D(B_4/A_1)\wedge D(B_3/A_2)\wedge D(B_2/A_3)\wedge D(B_1/A_4)=\frac{25}{40}\wedge\frac{10}{20}\wedge\frac{10}{30}\wedge\frac{5}{10}=\frac{1}{3}$$

$$D(X^{(k)}/X^{(k-3)})=D(B_1/A_1)\wedge D(B_2/A_2)\wedge D(B_3/A_3)\wedge D(B_4/A_4)=\frac{10}{15}\wedge\frac{30}{40}\wedge\frac{10}{10}\wedge\frac{30}{35}=\frac{2}{3}$$

$$D(X^{(k)}/X^{(k-1)}) = D(B_1/A_1) \wedge D(B_2/A_2) \wedge D(B_3/A_3)$$
$$\wedge D(B_4/A_4) = \frac{10}{15} \wedge \frac{20}{40} \wedge \frac{5}{10} \wedge \frac{20}{35} = \frac{1}{3}$$

于是得到模型

$$X^{(k)} = X^{(k-1)} \circ X^{(k-3)} \circ U^{(k)} \circ R$$

仿照例 5.7 的方法可以得到模糊规则。

表 5.2 例 5.8 中的模糊关系

X^{k-1} \ X^k	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	0	10	30
A_2	0	4	12	4
A_3	5	20	5	0
A_4	10	0	0	0

X^{k-2} \ X^k	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	5	10	25
A_2	0	5	10	5
A_3	10	10	10	0
A_4	5	5	0	0

X^{k-3} \ X^k	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	5	0	0
A_2	5	30	5	0
A_3	0	0	10	0
A_4	0	0	5	30

X^{k-4} \ X^k	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	5	0	0
A_2	10	20	10	0
A_3	0	0	5	5
A_4	0	0	15	20

5.4 模糊系统模型辨识的逼近方法

设 X 为状态集，U 为控制集，X 与 U 为有限集，即

$$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$$
$$U = \{u_1, u_2, \cdots, u_M\}$$

非模糊离散时间动力系统可以表示为

$$x^{(k)} = f(x^{(k-1)}, u^{(k-1)}) \tag{5.18}$$

其中 $x^{(k)}, x^{(k-1)} \in X, u^{(k-1)} \in U$。

若 $x^{(k-1)} = x' \in X$,变 $x^{(k-1)}$为 X 上的模糊集为

$$X^{(k-1)}(x_i) = A_i(x') = A_i(x^{(k-1)}) \quad (i \leqslant N) \tag{5.19}$$

为了使(5.18)式变成模糊系统,在 X 上建立标准模糊集 A_1,…,A_N,(图 5.1)。

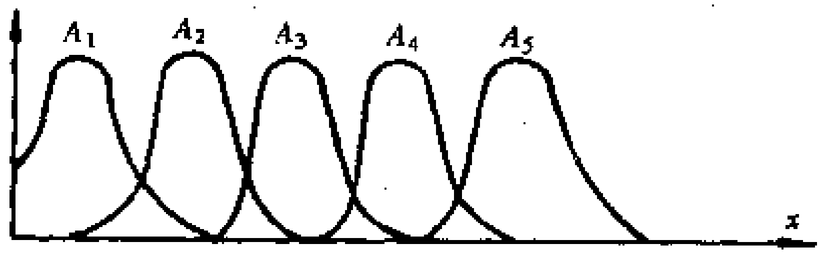


图 5.1 标准模糊集

同样可将 U 中的 $u^{(k-1)}$变为 U 上的模糊集 $U^{(k-1)}$,于是(5.18)式变为(图 5.2)

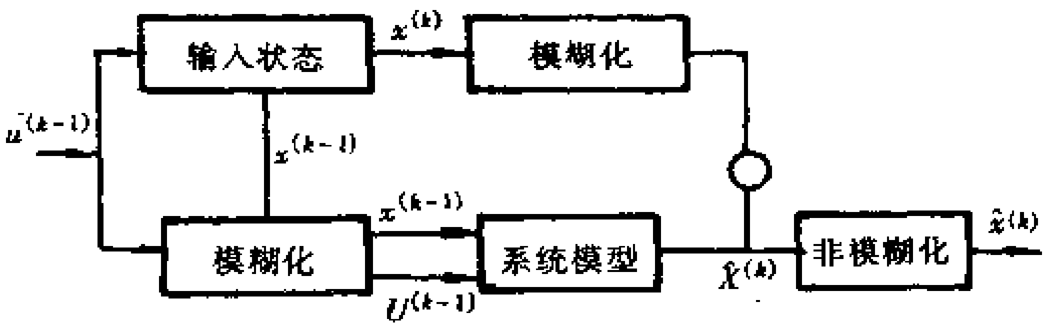


图 5.2 模糊系统模型的结构

$$\hat{X}^{(k)} = U^{(k-1)} \circ X^{(k-1)} \circ R^{(k)} \tag{5.20}$$

即

$$\hat{X}^{(k)}(x_p) = \max_{\substack{m \leqslant M \\ n \leqslant N}} \mathrm{T}(X^{(k-1)}(x_n), U^{(k-1)}(u_m), R^{(k)}(x_n, u_m, x_p))$$

可以简单记作

$$\hat{x}_p^{(k)} = \max_{\substack{m \leqslant M \\ n \leqslant N}} \mathrm{T}(u_m^{(k-1)}, x_n^{(k-1)}, r_{mnp}^{(k)}) \tag{5.21}$$

其中 T 可取任意三角模，如

$$\mathrm{T}(a, b, c) = a \cdot b \cdot c$$

$$\mathrm{T}(a, b, c) = a \wedge b \wedge c$$

下面进一步建立(5.20)中 $R^{(k)}$的估计方法，即逐步逼近方法。

在(5.21)中，由于 X 与 U 都是有限集，可设

$$\mathrm{T}(u_{\cdot}^{(k-1)}, x_{\cdot}^{(k-1)}, r_{\cdot\cdot p}^{(k)}) = \max_{\substack{m \leqslant M \\ n \leqslant M}} \mathrm{T}(u_m^{(k-1)}, x_n^{(k-1)}, r_{mnp}^{(k)})$$

$$(p = 1, 2, \cdots, N)$$

利用修正公式

$$r_{ijp}^{(k+1)} = \min\left[(r_{(ijp)}^{(k)} + \frac{\mathrm{T}(u_i^{(k-1)} x_j^{(k-1)})}{C_{ijp}^{(k+1)}} (x_p^{(k)} - \mathrm{T}(u_{\cdot}^{(k-1)}, x_{\cdot}^{(k-1)}, r_{\dot{p}}^{(k)})), 1 \right]$$

修正 $r_{ijp}^{(k)}$，其中

$$C_{ijp}^{(k+1)} = C_{ijp}^{(k)} + \mathrm{T}(u_i^{(k-1)}, x_j^{(k-1)})^2$$

一直到 $r_{ijp}^{(k)}$不能再修正为止，即得 R。

例 5.9 考虑二阶线性系统

$$x^{(k)} = 0.5x^{(k-1)} - 0.5x^{(k-2)} + u^{(k-1)}$$

得到模糊关系方程

$$\hat{X}^{(k)} = U^{(k-1)} \circ X^{(k-1)} \circ X^{(k-2)} \circ R$$

取 $u^{(k)}=0.3\sin(2\pi/100k)$,X 及 U 采取 5 个标准集,即 M=N=5,通过仿真可得实际输出与模拟输出结果(见图 5.3)。

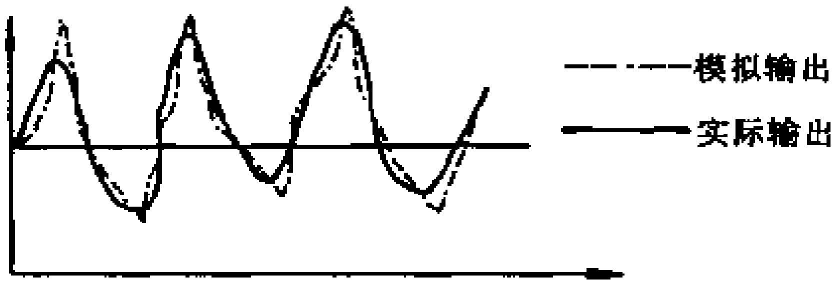


图 5.3　二阶线性系统模拟比较

例 5.10　对于一阶非线性系统

$$x^{(k)}=\frac{x^{(k-1)}}{(1+x^{(k-1)})^2}+u^{(k-1)}$$

也可写为模糊关系方程:

$$\hat{X}^{(k)}=U^{(k-1)}\circ X^{(k-1)}\circ R$$

辨识 R 而得到模糊系统模型。

有了模糊系统模型

$$\hat{X}^{(k)}=U^{(k-1)}\circ X^{(k-1)}\circ R$$

可以用来进行模糊控制。

设 B_j 为 U 上的 M 个模糊集,考虑对于不同的模糊控制 $B_j(j\leqslant M)$下产生的输出

$$Y_j=B_j\circ X^{(k-1)}\circ R$$

即

$$Y_j(x_p)=\max_{\substack{m\leqslant N\\ n\leqslant N}}\mathrm{T}(B_j(u_m),X^{(k-1)}(x_n),R_{mnp})$$

利用公式

$$U^{(k-1)}(u_l) = \max_{x_p} T(Y_l(x_p), X^{(k)}(x_p))$$

即得 U 上的模糊集 $U^{(k-1)}$,非模糊化即得

$$u^{(k-1)} = \frac{\sum u_l U^{(k-1)}(u_l)}{\sum U^{(k-1)}(u_l)}$$

即得控制输出(见图 5.4)。

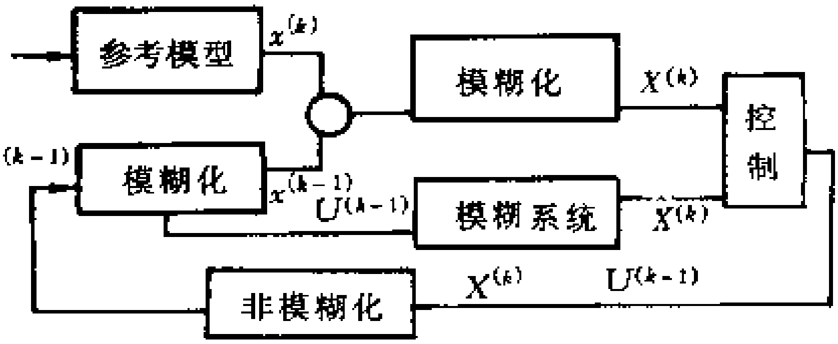


图 5.4 模糊控制模型

5.5 模糊系统模型辨识的代数方法

为了研究模糊系统模型辨识的代数方法,首先给出模糊数的运算。

设 A,B 为实数 R 上的模糊数,即 $\forall\alpha\in(0,1]$,A_α 及 B_α 为非空有界闭区间,且支集为有限集。对于二元函数 $y = f(x_1,x_2)$,利用模糊集扩张原理得到新的模糊集 $C = f(A,B)$,即

$$C(y) = \sup\{A(x_1) \wedge B(x_2); y = f(x_1,x_2)\}$$

如果 f 是四则运算,则得到模糊数的四则运算,如:

$$(A + B)(y) = \sup\{A(x_1) \wedge B(x_2); y = x_1 + x_2\}$$

$$(A - B)(y) = \sup\{A(x_1) \wedge B(x_2); y = x_1 - x_2\}$$

$$(A \cdot B)(y) = \sup\{A(x_1) \wedge B(x_2); y = x_1 \cdot x_2\}$$

$$(A \div B)(y) = \sup\{A(x_1) \wedge B(x_2); y = x_1 / x_2\}$$

为了使模糊系统模型辨识的代数方法具体化，我们考虑以下形式的模糊数。

$$L(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{a - x}{\alpha}, & x \leqslant a, \alpha > 0 \\ 1, & a < x \leqslant b \\ 1 - \dfrac{x - b}{\beta}, & x > b, \beta > 0 \end{cases}$$

设 $L(x) = (a, b, \alpha, \beta)$，可用这种形式的隶属函数定义各种语言变量，例如表(5.3)中的"LP"，"MP"等模糊变量(见图 5.5)。

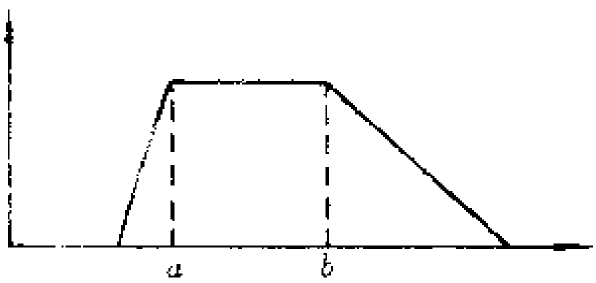


图 5.5 标准模糊数

表 5.3 标准语言变量

语言变量	a	b	α	β
LP	0.55	1.00	0.28	0.00
MP	0.70	0.85	0.56	0.28
SP	0.25	0.55	0.52	0.33
ZO	0.00	0.00	0.41	0.41
SN	−0.55	−0.25	0.33	0.32
MN	−0.85	−0.70	0.28	0.56
LN	−1.00	−0.55	0.00	0.28

为了研究模糊系统模型辨识的代数方法，我们考虑模糊数的除法。记

$$B = (c, d, \gamma, \delta)$$
$$A = (a, b, \alpha, \beta)$$
$$R = B \div A = (g, h, \varphi, \psi)$$

引进记号

$$a' = 1/b$$
$$b' = 1/a$$
$$\alpha' = \frac{4\beta}{(a+b)^2}$$
$$\beta' = \frac{4\alpha}{(a+b)^2}$$

如果 $a, b, c, d > 0$，则 $R = B \div A$ 是标准模糊数，且

$$g = ca', \ h = b'd$$
$$\varphi = 0.5((c+d)\alpha' + a'(a'+b')\gamma)$$
$$\psi = 0.5((c+d)\beta' + b'(a'+b')\delta)$$

如果 $a, b, c, d < 0$，则 $R = B \div A$ 是标准模糊数，且

$$g = ca', h = db',$$
$$\varphi = -0.5((a'+b')\delta + (c+d)\beta')$$
$$\psi = -0.5((a'+b')\gamma + (c+d)\alpha')$$

如果 $c, d < 0, a, b > 0$，则 $R = B \div A$ 是标准模糊数，且

$$g = ca', h = db',$$
$$\varphi = 0.5((a'+b')\gamma - (c+d)\beta')$$
$$\psi = 0.5((a'+b')\delta - (c+d)\alpha')$$

如果 $c, d > 0, a, b < 0$，则 $R = B \div A$ 是标准模糊数，且

$$g = ca', h = db',$$
$$\varphi = 0.5((c+d)\beta' - (a'+b')\gamma)$$

$$\psi = 0.5((c+d)\alpha' - (a'+b')\delta)$$

像对上面表中定义的模糊变量可以得到以下的计算结果

$$LP \div LP = (0.30, 0.81, 0.33, 0.00)$$

$$MP \div LP = (0.38,\ 1.54,\ 0.66,\ 0.33)$$

$$SP \div LP = (0.13,\ 1.00,\ 0.37,\ 0.39)$$

$$ZO \div LP = (0.00,\ 0.00,\ 0.48,\ 0.48)$$

$$SN \div LF(-0.30,\ -0.45,\ 0.37,\ 0.39)$$

$$MN \div LP = (-0.46,\ -1.27,\ 0.33,\ 0.66)$$

$$LN \div LP = (-0.55,\ -1.00,\ 0.00,\ 0.33)$$

同样可以得到其它情形下标准模糊数相除的运算结果。

考虑一个最简单的输入输出系统

$$y = Rx$$

其中 x, y 为实变量,R 为系数。如果 R 为模糊数,x 为模糊变量 A,则由模糊数乘法的扩张运算得到

$$B = R \cdot A$$

于是为识别系统 R 即得

$$R = B \div A$$

假定输入为 MP 情形下有以下的输入输出对

$$(MP,\ ZO),\ (MP,\ ZO),(MP, SP),$$
$$(MP,\ ZO),\ (MP,\ SP),\ (MP,\ ZO),$$
$$(MP,\ ZO),\ (MP;\ MP),\ (MP,\ ZO),$$
$$(MP,\ ZO)$$

通过这些训练样本可以得到

$$R_1 = R_2 = R_4 = R_6 = R_7 = R_9 = R_{10}$$
$$= ZO \div MP = (0.0,\ 0.0,\ 0.43,\ 0.43)$$

$$R_3 = R_5 = SP \div MP = (0.17,\ 0.78,\ 0.52,\ 0.66)$$

$$R_8 = MP \div MP = (0.48,\ 1.21,\ 0.95,\ 0.89)$$

加权平均即得

$$R = \frac{7R_1 + 2R_3 + R_8}{10} = (0.08,\ 0.28,\ 0.50,\ 0.52)$$

对于动态系统

$$A_{t+1} = R_t \cdot A_t + ku_t$$

其中 k 与 u_t 是普通数与变量。记

$$A'_{t+1} = A_{t+1} - ku_t$$

则

$$A'_{t+1} = R_t \cdot A_t$$

于是

$$R_t = A'_{t+1} \div A_t$$

$$R_{t+1} = A'_{t+2} \div A_{t+1} \qquad (t = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ T)$$

可以解出 $R_t (t = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ T)$。

利用代数方法对模糊系统模型进行辨识，主要利用模糊数的运算，特别是利用标准模糊数运算的性质。因此在模糊关系运算中一般采用乘法作为三角模。模糊系统模型辨识代数方法更类似于经典系统辨识方法。

5.6 神经网络与模糊系统的等价性

神经网络是一个多层的前续网络，具有输入神经单元 $x_1,\cdots,x_m$ 和输出神经元 $y_1,\cdots,y_n$。对于输入神经元上特有输入值 $u=(u_1,\cdots,u_m)$，其中 u_i 表示 x_i 神经元上的输入值。输出神经元上有输出值 $v=(v_1,\cdots,v_n)$，其中 v_i 为 y_i 神经元上的输出值。输出值与输入值有关系 $v=F(u)$，F 是连续函数。比如：

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} W_{ji} u_i \tag{5.22}$$

我们假定 $u\in[0,1]^m$，$v\in[0,1]^n$，即 u_i 及 v_j 均在区间[0,1]中区

值。这时(5.22)式可写为

$$v_j = f(\sum_{i=1}^{m} W_{ji}u_i) \tag{5.23}$$

其中 f 为 R 到[0,1]上的映射，即为 R 上的模糊集合。

模糊专家系统是包含了一组模糊推理规则的系统，比如它有 N 条模糊规则：

$$\mathbf{R}_i: \quad A_i \to B_i \qquad (i \leqslant N) \tag{5.24}$$

其中 $A_i(i \leqslant N)$是 $X=\{x_1,\cdots,x_m\}$上的模糊集合，$B_j(j \leqslant N)$是 $Y=\{y_1,\cdots,y_n\}$上的模糊集合。$A_i(x)$及 $B_j(y)$是相应模糊集合 A_i 及 B_j 的隶属函数。由模糊规则(5.24)可以得到连续映射 $v=G(u)$，$u\in[0,1]^m$，(5.24)及 $G(u)$称为模糊专家系统。

定理 5.1 对于神经网络系统 F 及 $\epsilon>0$，存在模糊专家系统 $A_i \to B_i(i \leqslant N)$及 G，使$|F(u)-G(u)|<\epsilon$，$(u\in[0,1]^m)$。$|\cdot|$表示 R^n 上的欧氏距离。

证明 给定 $\epsilon>0$，固定 m 及 n，选择 $0<\epsilon_1<\frac{1}{3}\epsilon$，由于 F 是紧集$[0,1]^m$上的连续函数，从而是一致连续的。这就意味着给定 $\epsilon_1>0$，存在 $\delta>0$，只要 $|u-u'|<\delta(u,u'\in[0,1]^m)$，便有 $|F(u)-F(u')|<\epsilon_1$。

现在给出$[0,1]^m$上的格子点。取 $N>\max(\sqrt{n}/\epsilon_1, \sqrt{m}/2\delta)$，即得格子为

$$t = (k_1\lambda, k_2\lambda, \cdots, k_m\lambda)$$

其中 $k_i=0,1,2,\cdots,N(i \leqslant m)$，$\lambda=\frac{1}{N}$，于是有 $K=(N+1)^m$ 个格子点。如果对于 u，u'是最接近 u 的格子点，则

$$|u-u'| \leqslant \frac{\sqrt{m}\lambda}{2} = \frac{\sqrt{m}}{2N} < \delta$$

于是$|F(u)-F(u')|<\epsilon_1$。

将格子点编号为 $u_k(k\leqslant K)$,取

$$A_k(x_i)=u_k(i)\qquad (i\leqslant m)$$

其中 $u_k=(u_k(1),\cdots,u_k(m))$。记

$$B_k(y_j)=\mathrm{F}(u_k)(j)=v_k(j)$$

其中 $v_k=(v_k(1),\cdots,v_k(n))$。于是得到 K 条模糊规则

$$A_k\to B_k\quad (k\leqslant K)$$

下面的问题是寻找模糊专家系统的连续映射 $G:[0,1]^m\to[0,1]^n$,使

(1) $G(u_k)=F(u_k)$;

(2) 对于任意 $u\in[0,1]^m$,$|F(u)-G(u)|<\varepsilon$.

为了使(1)成立,必须要求

$$B_i=A_i\circ R_i\qquad (i\leqslant K)$$

有解 $R_i(i\leqslant K)$。当 A_i 及 B_i 是正则的,有许多方法可以得到这种解。在一般的情况下,可以按照 P. Magrez 和 P. Smets 提供的方法得到这种解。比如 $B'=A\circ R_k$ 的计算公式为

$$B'(y_i)=\min(1,B_k(y_i)+a)$$

$$a=\max_{i\leqslant m}[\max(0,A(x_i)-A_k(x_i))]\quad (i\leqslant n)\quad (5.25)$$

当 $A=A_k$ 时有 $B'=B_k$,即 $B_k=A_k\circ R_k$。于是

$$G(u_k)=u_k\circ R_k=A_k\circ R_k=B_k=F(u_k)\quad (k\leqslant K)$$

对于任意 $u\in[0,1]^m$,记

$$G(u)=\frac{\sum_{k=1}^{N}D_k(u)(u\circ R_k)}{\sum_{k=1}^{N}D_k(u)}$$

其中 $D_k(u)$表示 u 与 u_k 的距离。令

$$\triangle=\triangle(u,u_k)=\max_{i\leqslant m}|u(i)-u_k(i)|$$

$$\mathrm{D}_k(u)=\begin{cases}\dfrac{\lambda-\triangle}{\lambda}, & 0\leqslant\triangle\leqslant\lambda\\ 0, & \triangle>\lambda\end{cases}$$

则 G 是连续映射。即得模糊专家系统 $A_i\to B_i\,(i\leqslant K)$ 及 $v=\mathrm{G}(u)$。下面证明 $|\mathrm{F}(u)-\mathrm{G}(u)|<\varepsilon\quad(u\in[0,1]^m)$。

设 $u\in[0,1]^m$，u^* 是最接近 u 的格子点。则 $|u-u^*|<\delta$，于是有 $|\mathrm{F}(u)-\mathrm{F}(u^*)|<\varepsilon_1$。在 u^* 上有 $\mathrm{F}(u^*)=\mathrm{G}(u^*)$，于是

$$\begin{aligned}|\mathrm{F}(u)-\mathrm{G}(u)|&\leqslant|\mathrm{F}(u)-\mathrm{F}(u^*)|+|\mathrm{F}(u^*)-\mathrm{G}(u^*)|\\&\quad+|\mathrm{G}(u^*)-\mathrm{G}(u)|\leqslant\varepsilon_1+|\mathrm{G}(u^*)-\mathrm{G}(u)\end{aligned}$$

下面只须证 $|\mathrm{G}(u^*)-\mathrm{G}(u)|\leqslant2\varepsilon_1$，其中 u^* 为离 u 最近的格子点。由于

$$|\mathrm{G}(u^*)-u\circ R_k|\leqslant|\mathrm{G}(u^*)-\mathrm{G}(u_k)|+|\mathrm{G}(u_k)-u\circ R_k|$$

对于

$$u_k\in\Gamma=\{u_k;\quad \mathrm{D}_k(u)>0\}=\{u_k;\triangle(u,u_k)<\lambda\}$$

由 $\triangle(u,u_k)=\max\limits_{i\leqslant m}|u(i)-u_k(i)|<\lambda$ 有

$$|u-u_k|<\sqrt{m}\lambda$$

而 u^* 是 u 的最邻近点，$|u-u^*|<\dfrac{\sqrt{m}}{2}\lambda$，从而

$$|u_k-u^*|<\frac{3}{2}\sqrt{m}\lambda<\delta$$

于是

$$|\mathrm{G}(u_k)-\mathrm{G}(u^*)|=|\mathrm{F}(u_k)-\mathrm{F}(u^*)|<\varepsilon_1$$

再证 $|\mathrm{G}(u_k)-u\circ R_k|\leqslant\varepsilon_1\,(u_k\in\Gamma)$。由于 $|u(i)-u_k(i)|<\lambda\,(i\leqslant m)$，于是 $0\leqslant a\leqslant\lambda$，从而由(5.25)有

$$\mathrm{G}(u_k)(j)\leqslant u\circ R_k(j)\leqslant\mathrm{G}(u_k)(j)+\lambda$$

于是 $|\mathrm{G}(u_k)-u\circ R_k|\leqslant\sqrt{n}\lambda<\varepsilon_1$，从而

$$|\mathrm{G}(u^*)-u\circ R_k|<2\varepsilon_1$$

又因 G(u)为 $u \circ R_k(u_k \in \Gamma)$的凸组合,则证 $|G(u^*) - G(u)| < 2\varepsilon_1$。

5.7 模糊系统模型辨识的神经网络方法

设 $X = \{x_1, \cdots, x_n\}, Y = \{y_1, \cdots, y_m\}$, $A_i(i \leqslant N)$为 X 上的模糊集,$B_i(i \leqslant N)$为 Y 上的模糊集,有 N 条模糊规则

$$A_i \Rightarrow B_i \qquad (i \leqslant N)$$

记 $R = \{1, 2, \cdots, N\}$和

$$W = \{w_1, \cdots, w_N\}$$

其中 $w_i \in I = [0,1](i \leqslant N)$,即 $W \in I^N$。w_i 表示规则 $A_i \Rightarrow B_i$ 的权重。于是具有权重 W 的模糊系统模型为 B=(R,W)。

对于 $W \in I^n$,记 $g: \mathscr{P}(R) \to [0,1]$,且满足

(1) $g(\varnothing) = 0$

(2) $g(i) = w_i$;

(3) $g(A) = \bigvee_{i \in A} w_i$

(4) $g(R) = 1$

则 g 为 $\mathscr{P}(R)$上的模糊测度。对于 X 上的模糊集 A,计算模糊积分

$$B(y) = \int (A \circ \text{“}A_i \Rightarrow B_i\text{”}) \circ g(i) \tag{5.26}$$

特别对于 Mamdani 算法有

$$\begin{aligned}&(A \circ \text{“}A_i \Rightarrow B_i\text{”})(y)\\&= \bigvee_x (A(x) \wedge A_i(x)) \wedge B_i(y)\\&= q_i \wedge B_i(y)\end{aligned}$$

于是

$$B(y) = \bigvee_{Z \subset R} \{\bigwedge_{i \in Z} (q_i \wedge B_i(y)) \wedge g(Z)\} \tag{5.27}$$

若将“$A_i \Rightarrow B_i$”规则作为第 i 个输入，则形成一个神经网络系统。于是可以通过神经网络的学习算法得到权重 $w_i(i \leqslant n)$，比如 Y 是单点集$\{y\}$时，训练模型为(A,B)，神经网络学习算法的过程如下：

(1) 给出初始权重 W_1 和训练样本 $H=(A,B)$；

(2) 利用(5.26)计算

$$B'(y) = \bigvee_{Z \in R} \{ \bigwedge_{i \in Z} (q_i \wedge B_i(y)) \wedge g(Z) \}$$

(3) 若 $B'(y)=B(y)$，则终止；否则修正 W_1。

(4) 若以上过程进行到第 k 步得到 $W_k=(w_{k1},\cdots,w_{kN})$使

$$B'_k(y) = \bigvee_{z \in R} \{ \bigwedge_{i \in Z} (\lambda_i \wedge B_i(y)) \wedge g_k(Z) \} = B(y)$$

则终止，其中 g_k 为形成的模糊测度，即

$$g_k(i) = w_{ki}$$

否则按照以下规则修正权重 w_{ki}。

若 $B'_k(y)<B(y)$： 当 $w_{ki}<B(y)$，记

$$w_{(k+1)i} = 1 \wedge (w_{ki} + c\triangle B'_k(y))$$

当 $w_{ki} \geqslant B(y)$，记

$$w_{(k+1)i} = w_{ki}$$

若 $B'_k(y)>B(y)$：当 $w_{ki}>B(y)$时有

$$w_{(k+1)i} = 0 \vee (w_{ki} - c\triangle B'_k(y))$$

当 $w_{ki} \leqslant B(y)$，记

$$w_{(k+h)i} = w_{ki}$$

其中 $c \in (0,1]$，且

$$\triangle B'_k(y) = |B'_k(y) - B(y)|$$

学习模型见图 5.6。

例 5.11 设 $X=\{x_1,x_2\}$，$Y=\{y\}$，有三条规则

$$A_1 = (1.0,0.5) \Rightarrow B_1 = (0.6)$$

$$A_2 = (0.7,0.5) \Rightarrow B_2 = (0.8)$$

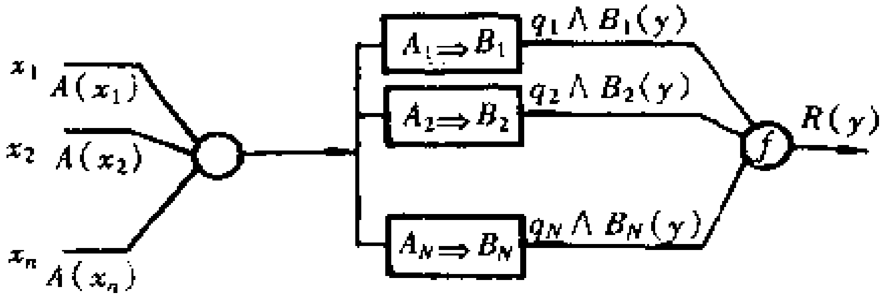


图 5.6　神经网络的学习算法

$$A_3 = (0.4, 0.6) \quad \Rightarrow \quad B_3 = (0.5)$$

学习训练样本为 $H = \{A = (0.8, 0.7) \Rightarrow B = (0.6)\}$。首先计算

$$q_1 = \bigvee_x (A_1(x) \wedge A(x)) = 0.8$$

$$q_2 = \bigvee_x (A_2(x) \wedge A(x)) = 0.7$$

$$q_3 = \bigvee_x (A_3(x) \wedge A(x)) = 0.6$$

若 $W = (0.5, 0.4, 0.7)$，计算得到 $B'_1(y) = 0.5$，由于 $B'_1(y) < B(y)$，取 $c = 1$，修正权重

$$w_{21} = 0.5 + 0.1 = 0.6$$

$$w_{22} = 0.4 + 0.1 = 0.5$$

$$w_{23} = 0.7$$

经过修正后的 W_2 适合于 $B'_2(y) = B(y)$。

定义 5.1　对于模糊规则 $R = \{A_i \Rightarrow B_i (i \leqslant N)\}$ 及训练样本 $H = \{A \Rightarrow B\}$，称神经网络学习算法是收敛的，若存在 $k_0 \in N^+$ 及 $W_{k0} = (w_{k_0 1}, \cdots, w_{k_0 N})$，使

$$B(y) = \bigvee_{Z \subset R} \{ \bigwedge_{i \in Z} (q_i \wedge B_i(y)) \wedge g_{k_0}(Z) \}$$

定理 5.2　在神经网络的学习算法中有以下性质：

(1) 若 $B'_k(y) > B(y)$，则 $B'_{k+1}(y) \geqslant B(y)$；

(2) 若 $B'_k(y) < B(y)$，则 $B'_{k+1}(y) \leqslant B(y)$。

证明 对于 Z⊂R,有

$$g_k(Z)=\bigvee_{i\in Z} w_{ki}$$

(1) 由 $B'_k(y)>B(y)$ 及 R 为有限集,则存在 $Z_k\subset R$,使

$$\bigwedge_{i\in Z_k}(q_i\wedge B_i(y))\wedge g_k(Z_k)>B(y)$$

即有

$$V_{Z_k}(y)=\bigwedge_{i\in Z_k}(q_i\wedge B_i(y))>B(y)$$

$$g_k(Z_k)>B(y)$$

由于 Z_k 是有限集,故存在 $i_k\in Z_k$,使 $g_k(Z_k)=w_{ki_k}$,根据神经网络学习算法有

$$\begin{aligned} w_{(k+1)i_k} &= 0\vee(w_{ki_k}-c\triangle B'_k(y)) \\ &\geqslant 0\vee(w_{ki_k}-\triangle B'_k(y)) \\ &= 0\vee B(y)=B(y) \end{aligned}$$

于是 $V_{Z_k}(y)\wedge w_{(k+1)i_k}\geqslant B(y)$。从而对于某 $Z_{k+1}\subset R$ 有

$$\begin{aligned} B'_{k+1}(y) &= V_{Z_{k+1}}(y)\wedge g_{k+1}(Z_{k+1}) \\ &\geqslant V_{Z_k}(y)\wedge w_{(k+1)i_k}\geqslant B(y) \end{aligned}$$

(2) 类似于(1)可证。

定理 5.3 神经网络学习算法关于训练样本 $H=\{A\Rightarrow B\}$ 收敛的充分必要条件为存在 $i,j\in R$,使

$$q_i\wedge B_i(y)\geqslant B(y),\quad q_j\wedge B_j(y)\leqslant B(y) \tag{5.28}$$

证明 若(5.28)不成立,不妨设 $\forall i\in R$ 有

$$q_i\wedge B_i(y)<B(y)$$

则对于 Z⊂R 必有

$$V_z(y)=\bigwedge_{i\in z}(q_i\wedge B_i(y))<B(y)$$

在神经网络学习算法中,对任意步 k 必有

$$B'_k(y)=\bigvee_{z\subset R}\{V_z(y)\wedge g_k(Z)\}<B(y)$$

定理必要部分成立。现证充分部分。若神经网络学习算法是不收敛的，则对任意步 k，或 $B'_k(y) > B(y)$，或 $B'_k(y) < B(y)$。若 $B'_k(y) > B(y)$，利用定理 5.2 必有 $B'_k(y) \geqslant B(y)$，但学习算法是不收敛的，则必有 $B'_k(y) > B(y)$。这样利用归纳法可证对于任意步 k 有 $B'_k(y) > B(y)$。若存在 $Z_k \subset R$，使

$$B'_k(y) = V_{Z_k}(y) \wedge g_k(Z_k) > B(y)$$

则 $V_{Z_k}(y) > B(y)$ 和 $g_k(Z_k) > B(y)$。继续修正算法到 $Z_k = R$，则有 $V_R(y) > B(y)$，则证。

若 Y 不是单点集，训练样本为 $H = \{A \Rightarrow B\}$，可令

$$C_j(y) = \begin{cases} B(y_j), & y = y_j \\ 0, & y \neq y_j \end{cases}$$

于是得到一族训练样本 $H_j = \{A \Rightarrow C_j\}$，通过神经网络的学习算法得到一族权重 $W_j = \{w_{j1}, \cdots, w_{jN}\}$。

第6章　模糊专家系统

6.1　专家系统与模糊性

所谓专家系统就是一列计算机程序，在一个没有人类专家的领域内实现模拟人类专家的推理过程，或以一个专家，或以一组专家的方式工作，主要对不确定的和不精确的信息进行推理。

一个专家系统主要由三部分组成：知识库、推理机、工作记忆部分。知识库包括了专家用于解决问题的领域知识，工作记忆部分存贮系统从用户获得的信息，推理机用领域专门知识和获取的信息对问题提供一个专家的结论。

除了上述三部分以外，大多数专家系统还包括一个独立的语言解释机制，它使得专家系统能向用户解释它的推理过程，使得用户能确知为什么系统要问这些信息，中间结果和最后结论是怎样得到的，有些什么缺陷，需要那些更正，使得使用专家系统的专家干涉计算机推理过程，得到更好的结论。

一个专家系统不一定只有一个知识源，可以有几个知识源。每个知识源都具有知识库、推理机和工作记忆部分。知识源与知识源之间通过交流连接设备相互连接，进行信息交流，使 n 个知识源相互合作，发挥更好的效益。

由于人类的知识是不完善的，现实中有许多不精确的和不确定的信息来源，很多事实和用户提供的信息也是不确定的，因此，一个专家系统本质上是一个模糊的专家系统。现实的经典专家系统一般都是对不确定信息进行精确化处理而简化的专家系统。

我们可以从不同的角度将专家系统进行分类。比如可以从专

家系统的用途进行分类，也可以从专家系统的智能水平进行分类。下面我们从用户承认的程度进行分类。

一类专家系统：容易得到用户承认和接受的系统。这类专家系统都有一个涉及面很窄的领域，需要足够的知识，容易找到专家解释关于解决问题所用的知识；它们的输入与输出信息一般都很准确，并能直接决定结果的正确性；它们与用户的交互作用很小，使用简单。

有相当多的一类专家系统已付诸于应用。比如应用于物质结构分析、符号数学运算、计算机系统配置等的专家系统，都属于这一类专家系统。这些专家系统虽然应用的领域不同，但是它们都定义了一个很好的问题领域。因此，只需要局限知识，便于找到专家来咨询，而且坦率无争议的决定问题的正确性，给出专家清晰的答案。

二类专家系统：未能被普通用户接受的系统。这类专家系统包括咨询或诊断系统等，它们不能对自身作很好的解释以满足用户。它们只给出自己诊断与咨询结果，而不涉及专家的结论。由于缺乏足够的知识，连专家都会与计算机诊断结果不一致。

典型的二类专家系统是医学中疾病诊断专家系统。由于症状与疾病间的复杂关系，找不到合适的专家来解释关于解决问题所用的知识。知识库多半是某些专家个人的解释，它使得专家系统只有一定的准确性。特别是对于疑难疾病很难给出一个准确结果。因此，二类专家系统依赖于专家本身，它必须在专家那里不断地获取知识。如果要使专家系统有效的发挥作用，必须有一个及时、有效、准确的方式获取新的知识，以便在动态领域内的咨询系统完全被人们所接受。

三类专家系统：很难被普通用户接受的系统。这类专家系统包括语言理解或数学发现系统，它有一个很大的时间超领域，处理的是不可靠的数据或不可靠的知识。这时系统通常解决的问题是

很随意的，大多数这类系统已被推至知识的前沿。它有一个宽广的领域，将最困难的问题给不能思考和学习的机器去解决。这样，人类给三类专家系统提出了太艰巨的任务而又未能提供恰当的方法。

典型的三类专家系统是数学发现系统。初等数学的发现与证明已取得了明显成功，甚至可以发现某些新的数学原理，而建造一个能够像数学家那样的工作的专家系统却是十分困难的。专家系统可以从集合论的基本思想开始，用直观推理法通过基本元素的组合，产生新的基本原理。但是它总是一个有限的知识空间，产生有限的组合，又缺乏对假设的比较与论证，使得三类专家系统与专家有明显的差异。

三种类型的专家系统有明显的区别，它们是从低级向高级发展的不同系统。随着系统类别的增高，所要描述的专家的本领越大。也即越是只有少数人才能做的工作，越是通过学习和研究后才能成为专家，专家系统的改建越困难，专家系统的类别越高。越是高级的专家系统，人机相互配合才能发挥专家系统的作用。

三种类型专家系统有一个本质的区别是知识库的不确定性和模糊性。知识库中信息不确定性越大，系统所属类别越高。知识与信息的模糊性，不仅给知识与信息的表示带来困难，给它们的获取与推理带来困难，而且给推理结果的评价也带来困难。所有这些，正是类型越高的专家系统越难于为人们接受的重要原因。

在一个专家系统中，有许多不确定性与模糊性的来源。首先提出的问题常常是不精确的，不精确的问题导致不精确的答案。一个专家系统必然以一种带有它们的一些模糊信息的方式表示问题，还要提供一个包括不确定答案的语义解释，以及对不确定的信息的不确定推理过程。同时，知识获取的过程也是不精确的。最大的可能是不能准确地捕捉知识，因为常常连专家自己也不准确地知道自己在推理过程中所用的工具，也即专家用知识去推理和

决定问题的解答是一个不确定的过程。这样专家系统与专家真实的推理过程很难匹配。

在专家系统中,不确定性与模糊性的另一个来源是信息的不完整性。专家系统不可能从专家那里获取全部信息,还要从完整的信息中获取知识得到结论,这就形成了专家系统信息与知识的不确定性与模糊性。

在专家系统中,不能回避不确定性和模糊性。只有建立描述不确定性与模糊性的好的方法,才能使专家系统向更高类别进行过渡。专家系统向模糊专家系统的演变,是专家及专家系统本身的不确定性与模糊性所决定的。

6.2 模糊专家系统

模糊专家系统是这样一个系统,它是利用模糊集理论与技术表示知识与进行模糊推理的一组程序。

模糊集理论产生 30 年来在专家系统中得到了成功的应用。特别是在专家系统中存储的知识大多是用自然语言来描述的,例如“如果人是年轻、漂亮、高个子,可以参加模特队”,这里的年轻、漂亮、高个子都是自然语言,模糊集理论提供了表示自然语言的一种方法。同时,模糊集理论中的模糊系统也提供了描述上述事实的一种工具。对知识进行表示是专家系统中的主要内容,没有知识表示就没有知识库,也没有知识库的使用和推理,就不可能有专家系统。模糊集理论提供了对不确定概念的表示方法,提供了不确定性知识与事实的表示方法,也提供了不确定的知识与信息的合成方法,这就形成了模糊专家系统。

我们研究一个事实,它是一条规则,或一则知识,是由前提条件 E 和假设结论 H 连接起来的,即“如果 E,那么 H”,其中 E 和 H 是不确定的。例如

规则:“如果(人)高,那么重”

“高”和“重”都是自然语言,可以用模糊集合来表示。设“高”的论域为

$$X = \{0.75,\ 1,\ 1.25,\ 1.5,\ 1.75,\ 2,\ 2.25\}$$

则“高”可以表示为 X 上的模糊集

$$E = 0.15/0.75 + 0.3/1 + 0.45/1.25 + 0.6/1.5 + 0.75/1.75 + 0.9/2 + 1/0.25$$

同样,设“重”的论域为

$$Y = \{10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50,\ 60,\ 70,\ 80,\ 90,\ 100\}$$

则“重”可以表示为 Y 上的模糊集

$$H = 0.2/10 + 0.3/20 + 0.4/30 + 0.5/40 + 0.6/50 + 0.7/60 + 0.8/70 + 0.9/80 + 0.95/90 + 1/100$$

对于“如果高,那么重”的事实可以用 X$\otimes$Y 上的模糊关系来表示,即表示为

$$R(x, y) = E(x) \wedge H(y)$$

表示在表 6.1 中。

表 6.1 “高”和“重”的模糊关系

E \ H	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0.75	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
1	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
1.25	0.3	0.4	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45
1.5	0.3	0.4	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
1.75	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.75	0.75	0.75
2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.9	0.9
2.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	1

一个规则或事实可以用上面的方式计算得到,也可以直接给出模糊关系。例如:

如果(人)高,那么可以参加模特队　(0.8)

张三是高个子　(0.9)

都是直接用模糊关系表示事实和知识。若用 x 表示高,y 表示模特队,则 $R(x,y)=0.8$,同样若用 x 表示张三,y 表示高个子,则 $R(x,y)=0.9$。

有了对于自然语言和事实与知识的表示,就可以在专家系统中进行模糊推理。

例如我们取 $X=Y=\{1,2,3,4\}$。给出事实"H 近似于 E",可以表示为 $X\otimes Y$ 上的模糊关系

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

若给出 E'="小",即

$$E'=1/1+0.6/2+0.2/3$$

则利用

$$H'(y)=\sup_x(E'(x)\wedge R(x,y))$$

即得

$$H'=1/1+0.6/2+0.5/3+0.2/4$$

H'表示"有点小"。

为了建立模糊专家系统,一般需包含以下步骤:

(1) 知识获取。知识是决定一个专家系统性能的首要因素。一个专家系统拥有丰富而准确的知识程度是专家系统能力的重要因素。一般来说,设计专家系统的人(知识工程师)本身并不一定具有所建造的专家系统的知识,他必须从书本和专家那里获取知识。他通过大量阅读,从书本上获取知识,或者是通过与专家的对话从专家那里获取知识。知识工程师把专家知识表示成规则是一个枯燥而费时的过程,人们逐渐希望通过计算机与专家直接对话

获取知识，进行学习，自动获取知识，不断扩充知识库。这样就产生了知识的自动获取，即机器学习问题。

(2) 知识表示。知识表示是把从专家那里得到知识存储在计算机中，这样就必须解决知识表示问题。这种表示方法要描述简便，易于改进和进行语义解释，同时它具有表达知识的能力。在模糊专家系统中，由于使用模糊集理论，必须建立适当的论域和适当的标准模糊集。如果用离散型模糊集表示，要规定适当的采样。如果用连续型模糊集表示，要建立一些特殊的模糊集，比如梯形，三角形等。可用少数特征刻画的模糊集，这样就易于表达知识和改进知识，并通过对专家系统的使用逐步进行修正。

(3) 推理机制。推理机制是在系统运行时，根据知识库中的知识和临时获取的信息得到新的结论的一种方法。模糊推理有各种各样的方法，没有一种方法可以适用于任何专家系统，要根据专家系统的特点选择适当的推理机制。有时，很难从直观上选择合适的推理机制，我们可以通过已有的事实，通过各种推理机制的计算机仿真选择合适的推理机制。

(4) 人机界面。一个完整的模糊专家系统，不仅要有知识库与推理机制，还要有一个好的人机界面，使专家系统使用者比较自然的输入信息，比较直观的了解专家系统的推理过程，比较容易改变知识库中的知识和推理过程，比较容易了解推理的结果。知识库与推理机制是专家系统的内涵，人机界面是专家系统的外壳。专家系统有一个好的外壳，才能使专家系统为用户所接受。

要成功地建造一个专家系统，是一个不断扩充与不断完善的过程。一般都是从一个较小的系统开始，然后逐步扩大为一个具有相当规模的可以试验的系统，并通过实践的反复验证得到一个比较完善的专家系统。

评价一个专家系统，要有几方面的人员参加。作为专家系统的设计者要检查所使用的方法和程序的正确性；作为领域专家要

检查知识库的全面性、准确性以及系统结论与实际的吻合程度；作为专家系统的用户要检查专家系统的价值以及使用的方便性。这三个方面都满意的专家系统，才是一个比较完善的专家系统。

6.3 相似度在专家系统中的应用

在专家系统的运行过程中，主要是靠输入信息去激发知识库中的知识。如果知识库中的知识是由结构给出的，要靠输入信息去激发某一个结点。如果知识库中的知识是由规则给出的，要靠输入信息去激发某一条规则的条件。由于结构和规则的有限性和输入信息形式的无限性，输入信息不可能直接去激活结构中的某一结点，也不可能直接激活某一条规则的条件，除了一类专家系统以外。因此，就产生了相似度，通过相似度利用输入信息去激活结构中的某一结点或某一条规则的条件。特别是在信息不精确与不完全的情况下，这样做是非常必要的。

由定义 2.14，对于 X 上的任意两个模糊集 A 和 B，有数 $S(A,B)$对应，且满足以下条件：

(1) $0 \leqslant S(A,B) \leqslant 1,\ S(A,A)=1$

(2) $S(A,B)=S(B,A)$

(3) $A \subset B \subset C$ 时，$S(A,C) \leqslant S(A,B) \wedge S(B,C)$

称 S 为 X 上的相似度。

定理 6.1 若 D 是 X 上的包含度，T 为三角模，则

$$S_1(A,B) = T(D(B/A), D(A/B))$$

$$S_2(A,B) = D(A \cap B / A \cup B)$$

为 X 上的相似度。

证明 由于 $0 \leqslant D(A/B) \leqslant 1$，则 $0 \leqslant S_1(A,B) \leqslant 1$。由于 $D(A/A)=1$，则证 $S_1(A,A)=1$。由于三角模 T 的对称性，易证

$$S_1(A,B) = S_1(B,A)$$

现假定 $A\subset B\subset C$，由于 D 为包含度，则 $D(A/C)\leqslant D(A/B)$，于是由

$$S_1(A,C)=T(D(C/A),D(A/C))=T(1,D(A/C))=D(A/C)$$
$$S_1(A,B)=T(D(B/A),D(A/B))=T(1,D(A/B))=D(A/B)$$

即证 $S_1(A,C)\leqslant S_1(A,B)$。同理，可证 $S_1(A,C)\leqslant S_1(B,C)$。证得 S_1 为相似度。

对于 S_2 可以类似证明。

例 6.1 设 X 是有限集，由于

$$D(B/A)=\frac{\sum_x (A(x)\wedge B(x))}{\sum A(x)}$$

为 X 上的包含度，则

$$S_1(A,B)=\frac{\sum_x (A(x)\wedge B(x))}{\left(\sum_x A(x)\right)\vee\left(\sum_x B(x)\right)}$$

$$S_2(A,B)=\frac{\sum_x (A(x)\wedge B(x))}{\sum_x (A(x)\vee B(x))}$$

为 X 上的相似度。

由例 6.1 可以看出，利用同一种包含度，由定理 6.1 中两种方法得到的相似度可能是不同的。

例 6.2 设 $X=\{x_1,\cdots,x_{10}\}$，$A=\{x_i;\ i\leqslant 7\}$，$B=\{x_i,\ i\geqslant 4\}$，P 为 X 上的均匀分布，取包含度 $D(B/A)=P(B/A)$，于是

$$D(B/A)=D(A/B)=\frac{4}{7}$$

$$D(A\cap B/A\cup B)=\frac{4}{10}$$

$$S_1(A,B)=\frac{4}{7},S_2(A,B)=\frac{4}{10}$$

$$S_1(A,B)\neq S_2(A,B)$$

定义 6.1 对于[0,1]中的任意两个数 a 和 b，有 $S(a,b)$ 对应，且满足以下条件：

(1) $0\leqslant S(a,b)\leqslant 1$， $S(a,a)=1$

(2) $S(a,b)=S(b,a)$

(3) $a\leqslant b\leqslant c$ 时有 $S(a,c)\leqslant S(a,b)\wedge S(b,c)$

称 S 为[0,1]上的相似度。

定理 6.2 设 D 为[0,1]上的包含度，T 为三角模，则

$$S_1(a,b) = T(D(b/a),\ T(a/b))$$

$$S_2(a,b) = D(a \wedge b/a \vee b)$$

为[0,1]上的相似度。

证明 与定理 6.1 相同。

例 6.3 由于

$$D(b/a) = \begin{cases} 1, & a \leqslant b \\ b, & a > b \end{cases}$$

是[0,1]上的包含度，则

$$S(a,b) = D(b/a) \wedge D(a/b) = D(a \wedge b/a \vee b)$$

$$= \begin{cases} 1, & a = b \\ a \wedge b, & a \neq b \end{cases}$$

是[0,1]上的相似度。

定理 6.3 设 D 是[0,1]上的包含度，S 为[0,1]上的相似度，P 为 X 上的概率分布，则

$$D(B/A) = P(D(B(\cdot)/A(\cdot)))$$

为 X 上的包含度，而

$$S(A,B) = P(S(A(\cdot),B(\cdot)))$$

为 X 上的相似度。

证明 直接验证即得。

定理 6.4 设 A,B 是正则模糊集，则

$$D(B/a)=\begin{cases}\Pi(B/A), & N(B/A)>0.5\\ (N(B/A)+0.5)\cdot\Pi(B/A), & N(B/A)\leqslant 0.5\end{cases}$$

为包含度。且对于两种相似度

$$S_1(A,B)=D(B/A)\wedge D(A/B)$$

$$S_2(A,B)=D(A\cap B/A\cup B)$$

有性质 $S_1(A,B)=S_2(A,B)$。

证明 首先有

$$\Pi(A\cap B/A\cup B)=\Pi(A/B)=\Pi(B/A)$$

$$N(A\cap B/A\cup B)=N(A/A)\wedge N(B/B)$$
$$\wedge N(B/A)\wedge N(A/B)$$

若 $N(A\cap B/A\cup B)>0.5$，则 $N(A/B)>0.5$ 且 $N(B/A)>0.5$，于是

$$\begin{aligned}D(A\cap B/A\cup B)&=\Pi(A\cap B/A\cup B)\\&=\Pi(A/B)=\Pi(B/A)\\&=\Pi(A/B)\wedge\Pi(B/A)\\&=D(A/B)\wedge D(B/A)\end{aligned}$$

若 $N(A\cap B/A\cup B)\leqslant 0.5$，则

$$\begin{aligned}&S(A\cap B/A\cup B)\\&=(N(A/A)\wedge N(B/B)\wedge N(A/B)\wedge N(B/A)\\&\quad+0.5)\cdot\Pi(A/B)\end{aligned}$$

这时有以下四种情况

(1) $N(A/B)>0.5$, $N(B/A)>0.5$

(2) $N(A/B)\leqslant 0.5$, $N(B/A)>0.5$

(3) $N(A/B)>0.5$, $N(B/A)\leqslant 0.5$

(4) $N(A/B)\leqslant 0.5$, $N(B/A)\leqslant 0.5$

不妨证(4)，其它情况类似可证。由于

$$N(A/A)\geqslant 0.5,\ N(B/B)\geqslant 0.5$$

则

$$\mathrm{D}(A \cap B/A \cap B) = (\mathrm{N}(A/B) \wedge \mathrm{N}(B/A) + 0.5) \cdot \Pi(A/B)$$
$$= (\mathrm{N}(A/B) + 0.5) \cdot \Pi(A/B) \wedge (\mathrm{N}(B/A) + 0.5) \cdot \Pi(A/B)$$
$$= \mathrm{D}(A/B) \wedge \mathrm{D}(B/A)$$

定理得证。

定理 6.5 设 $X_i(i \leqslant m)$为论域,$D_i(B_i/A_i)(i \leqslant m)$为 X 上的包含度,$S_i(A_i, B_i)$为 X 上的相似度,则

$$\mathrm{D}_1(B/A) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathrm{D}_i(B_i/A_i)$$

$$\mathrm{D}_2(B/A) = \min_{i \leqslant m} \mathrm{D}_i(B_i/A_i)$$

为 $A = (A_1, \cdots, A_m)$对于 $B = (B_1, \cdots, B_m)$的包含度。同样

$$\mathrm{S}_1(A, B) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathrm{S}_i(A_i, B_i)$$

$$\mathrm{S}_2(A, B) = \min_{i \leqslant m} \mathrm{S}_i(A_i, B_i)$$

为 A 与 B 的相似度。

证明 直接验证即得。

在专家系统中的规则由前提条件和反应框架构成。前提条件将提供具备一个反应框架进程,它是专家系统采取行动的一种估计。如果输入某种信息与某一个规则前提条件最相似,则规则被激活,相应地行为发生。前提条件也可能被分解,这时就需要多个输入信息,才能用相似度选择激活规则而产生专家系统的行为。通常在一类专家系统中不需要相似度。规则是确定的,输入信息也是确定的,它按照专家系统的要求输入信息,并直接激活某些规则。而在第二类、第三类专家系统中,就必须用相似度去激活某些规则。输入信息可能同时激活多条规则,这时就需要通过人机界面提供更多的信息,使专家系统取得所需要的结果。

6.4 专家系统中证据的合成传播与修正

在专家系统中，一种结果行为依赖于多个证据，若给出了证据 E_1 关于假设 H 的确定度为 a，证据 E_2 关于假设 H 的确定度为 b，证据 E_1 及 E_2 同时被激活时，对假设 H 应该有一个什么样的估计，这即是专家系统中的证据合成问题。

在以往的专家系统中，反三角模 F 常常用来作为合成算子。因为它有以下性质

(1) $F(1, y)=1$

(2) $F(x, y)=F(y, x)$

(3) $F(x, F(y, z))=F(F(x, y), z)$

(4) $x_1<x_2, y_1<y_2 \Rightarrow F(x_1, y_1) \leqslant F(x_2, y_2)$

若 D 为包含度，"$E_1 \rightarrow H$"的确定度为 $D(H/E_1)$，"$E_2 \rightarrow H$"确定度为 $D(H/E_2)$，则

$$D(H/E_1 \cup E_2)=F(D(H/E_1), D(H/E_2))$$

一般情况下，我们可以称反三角模，为广义合成算子。例如我们可以采用以下一些计算公式

$$D_1(H/E_1 \cup E_2)=D(H/E_1) \vee D(H/E_2)$$

$$D(H/E_1 \cup E_2)=D(H/E_1)+D(H/E_2)-D(H/E_1) \cdot D(H/E_2)$$

$$D_2(H/E_1 \cup E_2)=\frac{D(H/E_1)+D(H/E_2)}{1+D(H/E_1)D(H/E_2)}$$

$$D_2(H/E_1 \cup E_2)=\min(1, D(H/E_1)+D(H/E_2))$$

广义合成算子有一些明显的矛盾，比如 $D(H/E_1)=1, D(H/E_2)=0$，这时仍然有 $D(H/E_1 \cup E_2)=1$。有一种证据肯定假设，而另外有一种证据否定假设，当两种证据同时成立时，否定假设不起

作用，也有人利用加权算法，即

$$D(H/E_1 \cup E_2) = \alpha D(H/E_1) + (1-\alpha) D(H/E_2)$$

但是加权算法使两个证据不对称，为此，我们引进下面的合成算子的概念。

定义 6.2 称 $F:[0,1]^2 \to [0,1]$ 为合成算子，若满足以下条件

(1) $F(1,y)=1\ (y \neq 0)$，$F(0,y)=0\ (y \neq 1)$

(2) $F(x,1-x)=0.5$

(3) $F(x,y)=F(y,x)$

(4) $F(F(x,y),z)=F(x,F(y,z))$

(5) $x_1 < x_2$ 时，$F(x_1,y) \leqslant F(x_2,y)$

例 6.4 设

$$F(x,y) = \frac{xy}{2xy-(x+y-1)} \tag{6.1}$$

则 F 为合成算子。容易验证 $F(x,y)$ 满足定义 2.17 的条件。同时易证

$$F(0.5,y) = \frac{0.5}{y-(0.5+y-1)} = \frac{0.5y}{0.5} = y$$

我们可以用包含度 D 表示"$E_1 \to H$"的确定度，即 $D(H/E_1)$ 表示证据 E_1 对假设 H 的估计，$D(H/E_2)$ 表示证据 E_2 对假设 H 的估计。于是

$$D(H/E_1 \cup E_2) = \frac{D(H/E_1)D(H/E_2)}{2D(H/E_1)D(H/E_2)-(D(H/E_1)+D(H/E_2)-1)}$$

可以作为证据 E_1 及 E_2 对假设 H 的估计。

例 6.4 中给出的合成算子具有以下性质：

(1) 当 $x \wedge y \geqslant 0.5$ 时，$F(x,y) \geqslant x \vee y$

(2) 当 $x \vee y \leqslant 0.5$ 时，$F(x,y) \leqslant x \wedge y$

(3) 当 $x < 0.5 < y$ 时，$x < F(x,y) < y$

事实上，当 $x \wedge y \geqslant 0.5$ 时，有

$$F(x,y) \geqslant F(0.5,y)=\frac{0.5y}{0.5y+0.5(1-y)}=y$$

$$F(x,y) \geqslant F(x,0.5)=\frac{0.5x}{0.5x+0.5(1-x)}=x$$

则证 $F(x,y) \geqslant x \vee y$,其它情形证明类似。

例 6.5 下面的算子是合成算子,具有与例 6.4 定义的合成算子相同的性质。

$$F(x,y)=$$

$$\begin{cases} 2(x+y-xy)-1, & x \wedge y \geqslant 0.5 \\ 2xy, & x \vee y \leqslant 0.5 \\ \dfrac{x+y-1}{1-|2x-1| \wedge |2y-1|}+0.5, & x \wedge y \leqslant 0.5 \leqslant x \vee y \\ 0.5, & |x-y|=1 \end{cases}$$

定理 6.6 设 F_1, F_2, F_3 均为合成算子,则

$$F(x,y)=F_1(F_2(x,y),F_3(x,y))$$

仍然为合成算子。

证明 直接验证 F 满足定义 6.3 中的条件。

例 6.6 取 $F_1=F_2=F_3$ 为(6.1)式定义的合成算子,则由定理 6.6 知

$$F(x,y) = F_1(F_2(x,y),F_3(x,y)) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^2}{(xy)^2+(1-x)^2(1-y)^2}, & |x-y| \neq 1 \\ 0.5, & |x-y|=1 \end{cases}$$

为合成算子。

定理 6.7 对于任意 $n \geqslant 1$

$$F_n(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(xy)^n}{(xy)^n+(1-x)^n(1-y)^n}, & |x-y| \neq 1 \\ 0.5, & |x-y|=1 \end{cases}$$

为合成算子。

证明 由数学归纳法,利用定理 6.6 可证。

专家系统中另一类问题是证据的传播问题。若给出了证据 E_1 关于假设 E_2 的确定度,同时 E_2 又作为证据,给出了证据 E_2 关于假设 H 的确定度,这是由证据 E_1 对假设 H 应该有一个什么样的估计,这即是专家系统中证据的传播问题。

以往的专家系统中,三角模常常用来作为传播算子,例如

$$D_1(H/E_1)=D(E_2/E_1)\wedge D(H/E_2)$$

$$D_2(H/E_1)=D(E_2/E_1)D(H/E_2)$$

$$D_3(H/E_1)=0\vee(D(E_2/E_1)+D(H/E_2)-1)$$

一般我们称三角模形成的传播算子为广义传播算子。

广义传播算子有一些明显的矛盾。比如 $D(E_2/E_1)=0$,这时必有 $D_i(H/E_1)=0(i\leqslant 3)$,不管证据 E_2 对假设 H 有什么影响。

定义 6.3 称 $G:[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 为传播算子,若满足以下条件

(1) $F(1,y)=y$

(2) $F(0,y)=1-y$

(3) $F(x,y)=F(y,x)$

若 G 进一步满足

(4) $G(G(x,y),z)=G(x,G(y,z))$

称 G 为强传播算子。

例 6.7 下面的算子为强传播算子

$$G(x,y)=xy+(1-x)(1-y)$$

容易证明上式定义的强传播算子具有以下性质:

(1) 当 $x>0.5$ 时,$G(x,y)$ 是 y 的增函数;

(2) 当 $x<0.5$ 时,$G(x,y)$ 是 y 的减函数;

(3) 当 $x=0.5$ 时,$G(x,y)=0.5$。

定理 6.8 设 T 为[0,1]上的三角模,则

$$G(x,y)=T(x,y)+T(1-x,1-y)$$

是传播算子。

例 6.8 下面的算子为传播算子

$$G(x,y)=xy+(1-x)(1-y)$$

$$G(x,y)=\sqrt[n]{(xy)^n+(1-x)^n(1-y)^n}$$

定理 6.9 若 T 为[0,1]上的三角模，则

$$F(x,y)=\begin{cases}T(x,y)/(T(x,y)+T(1-x,1-y)), & |x-y|\neq 1\\ 0.5, & |x-y|=1\end{cases}$$

为合成算子。

证明 由于 T 是单调增的，于是 $T'_x(x,y)\geqslant 0$，从而

$$F'_x(x,y)=\frac{T'_x(x,y)T(1-x,1-y)+T(x,y)T'_{1-x}(1-x,1-y)}{(T(x,y)+T(1-x,1-y))^2}\geqslant 0$$

则证。

利用证明的合成与传播公式可以对证据进行修正。考虑以下三种情形

(1) $E'=E\cup\{e\}(e\notin E)$，这时可以利用合成公式

$$D(H/E')=F(D(H/E),D(H/e))$$

(2) $E'=E\setminus\{e\}(e\in E)$，由于 $E=E'\cup\{e\}(e\notin E)$，有

$$D(H/E)=F(D(H/E'),D(H/e))$$

反解后即得 $D(H/E')$。比如利用例 2.22 反解即得

$$D(H/E')=\frac{(1-D(H/e))D(H/E)}{(1-D(H/e))D(H/E)+(1-D(H/E))D(H/e)}$$

(3) 若 $E'=\bar{E}$，可以利用传播公式

$$D(H/\bar{E})=G(0,D(H/E))=1-D(H/E)$$

6.5 关系数据库上的知识获取

设 X 为对象集合，$A_i\subset X(i\leqslant k)$为 X 的分划，即满足 $A_i\cap A_j$

$=\varnothing\ (i\neq j)$，且$\bigcup_{i=1}^{k}A_i=X$。对于 X 的一个分划记为

$$\mathscr{A}=\{A_i;\ i\leqslant k\}$$

记 **D** 为 X 上的分划的全体。对于 X 上的两个分划 $\mathscr{A}=\{A_i;\ i\leqslant k\}$ 和 $\mathscr{B}=\{B_j;j\leqslant l\}$，若对于任意 A_i，均有 B_j 使 $A_i\subset B_j$，称分划 $\mathscr{B}$ 依赖于分划 $\mathscr{A}$，记作 $\mathscr{A}\leqslant\mathscr{B}$。显然有 $\mathscr{A}\leqslant\mathscr{A}$，且当 $\mathscr{A}\leqslant\mathscr{B},\mathscr{B}\leqslant\mathscr{C}$ 时，$\mathscr{A}\leqslant\mathscr{C}$。若 $A_i\in\mathscr{A},B_j\in\mathscr{B},A_i\subset B_j$，表示 A_i 的属性影响到决策 B_j。

设 $\mathscr{A}=\{A_i;\ i\leqslant k\}$ 和 $\mathscr{B}=\{B_j;\ j\leqslant l\}$ 是 X 上的两个分划，记

$$D(\mathscr{B}/\mathscr{A})=\bigwedge_{i=1}^{k}\left(\bigvee_{j=1}^{l}D(B_j/A_i)\right)\tag{6.2}$$

其中 $D(B_j/A_i)$ 是 X 上的包含度。显然 $D(\mathscr{B}/\mathscr{A})$ 是 **D** 上的包含度。特别当 $\mathscr{A}\leqslant\mathscr{B}$ 时，$D(\mathscr{B}/\mathscr{A})=1$。

如果 $\mathscr{A}=\{A_i;\ i\leqslant k\}$ 和 $\mathscr{B}=\{B_j;\ j\leqslant l\}$ 是 X 上的两个分划，定义运算

$$\mathscr{A}*\mathscr{B}=\{A_i\cap B_j;\ i\leqslant k,\ j\leqslant l\}$$

显然有

$$\mathscr{A}*\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A},\ \mathscr{A}*\mathscr{B}\leqslant\mathscr{B}$$

表 6.2　属性与决策关系库

	Θ				H			
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	h_1	h_2	h_3	h_4
x_1	1	1	1	1	1	1	1	1
x_2	1	2	2	1	2	1	1	2
x_3	1	1	1	1	1	1	1	3
x_4	1	2	2	1	2	1	1	4
x_5	2	2	1	1	3	2	1	5
x_6	2	2	1	1	3	2	1	5
x_7	3	3	3	2	4	2	2	5
x_8	3	3	3	2	4	2	2	5

假定$\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}$为属性空间，$H=\{h_1,h_2,h_3,h_4\}$为假设或

决策空间。表 6.2 中的 8 个事例构成一个关系数据库系统。按照属性 θ_1 可以将 X 分划为

$$A_1=\{x_i;\ \theta_1=1\}=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\}$$
$$A_2=\{x_i;\ \theta_1=2\}=\{x_5,\ x_6\}$$
$$A_3=\{x_i;\ \theta_1=3\}=\{x_7,\ x_8\}$$

记为

$$\theta_1^*=\{\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\},\ \{x_5,\ x_6\},\ \{x_7,\ x_8\}\}$$

同样可得

$$\theta_2^*=\{\{x_1,\ x_3\},\ \{x_2,\ x_4,\ x_5,\ x_6\},\ \{x_7,\ x_8\}\}$$
$$\theta_3^*=\{\{x_1,\ x_3,\ x_5,\ x_6\},\ \{x_2,\ x_4,x_7,\ x_8\}\}$$
$$\theta_4^*=\{\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6\},\ \{x_7,\ x_8\}\}$$

于是我们得到关于 X 依属性的所有划分

$$\mathscr{D}=\{\theta_1^*,\ \theta_2^*,\ \theta_3^*,\ \theta_4^*,\ \theta_1^* * \theta_2^*,\ \theta_1^* * \theta_3^*,\cdots\}$$

同样可以用假设将空间 X 进行分划

$$h_1^*=\{\{x_1,\ x_3\},\ \{x_2,\ x_4\},\{x_5,\ x_6\},\ \{x_7,\ x_8\}\}$$
$$h_2^*=\{\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\},\ \{x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8\}\}$$
$$h_3^*=\{\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6\},\{x_7,\ x_8\}\}$$
$$h_4^*=\{\{x_1\}\{x_2\},\ \{x_3\},\ \{x_4\},\ \{x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8\}\}$$

我们研究属性 $\theta_1\sim\theta_4$ 与假设 h_1 的关系,由于

$$\theta_1^*\not\leqq h_1^*,\ \theta_2^*\not\leqq h_1^*,\ \theta_3^*\not\leqq h_1^*,\ \theta_4^*\not\leqq h_1^*$$

因此只依赖于某一个属性 θ_i 不能对假设 h_1 作出判断。但是

$$\theta_1^* * \theta_2^*\leqslant h_1^* \quad \theta_1^* * \theta_3^*\leqslant h_1^*$$

于是可以用两个属性 θ_1 与 θ_2 的不同值,或用 θ_1 与 θ_3 的不同值去区分 h_1 的不同值。例如

$$\theta_1^* * \theta_2^*=\{\{x_1,\ x_3\},\{x_2,\ x_4\},\{x_5,\ x_6\},\{x_7,\ x_8\}\}$$

于是 $\theta_1^* * \theta_2^*=h_1^*$,且

$$\{x_1,\ x_3\}=\{x_i;\ \theta_1=1,\ \theta_2=1\}=\{x_i;\ h_1=1\}$$

$\{x_2, x_4\} = \{x_i; \theta_1 = 1, \theta_2 = 2\} = \{x_i; h_1 = 2\}$
$\{x_5, x_6\} = \{x_i; \theta_1 = 2, \theta_2 = 2\} = \{x_i; h_1 = 3\}$
$\{x_7, x_8\} = \{x_i; \theta_1 = 3, \theta_2 = 3\} = \{x_i; h_1 = 4\}$

于是我们得到规则如下：

(1) 如果 $\theta_1 = 1$，$\theta_2 = 1$，那么 $h_1 = 1$

(2) 如果 $\theta_1 = 1$，$\theta_2 = 2$，那么 $h_1 = 2$

(3) 如果 $\theta_1 = 2$，$\theta_2 = 2$，那么 $h_1 = 3$

(4) 如果 $\theta_1 = 3$，$\theta_2 = 3$，那么 $h_1 = 4$

同样地，由于 $\theta_1^* * \theta_3^* \leqslant h_1^*$，也可以用 θ_1 及 θ_3 得到相应的规则。但是我们有

$$\theta_1^* * \theta_4^* \not\leqslant h_1^*,\ \theta_2^* * \theta_4^* \not\leqslant h_1^*,\ \theta_3^* * \theta_4^* \not\leqslant h_1^*$$

于是 θ_4 不能用来建立规则。一般来说，我们用 **D** 中满足 $\mathscr{A} \not\leqslant h_1^*$ 的最大分划来建立规则，即在 **D** 中不再存在 $\mathscr{A}'$ 使 $\mathscr{A} \leqslant \mathscr{A}' \leqslant h_1^*$。这时构成 $\mathscr{A}$ 的分划的属性称为本质属性。比如

$$\mathscr{A} = \theta_1^* * \theta_2^*$$

是满足 $\mathscr{A} \leqslant h_1^*$ 的最大分划，且由 θ_1 与 θ_2 构成，因此 θ_1 和 θ_2 是本质属性。同样由于 $\theta_1^* * \theta_3^*$ 也满足以上性质，θ_3 也是本质属性，但是 θ_4 不是本质属性。

在 **D** 中的最小分划是

$\theta_1^* * \theta_2^* * \theta_3^* * \theta_4^* = \{\{x_1, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_5, x_6\}, \{x_7, x_8\}\}$

而且

$$\theta_1^* * \theta_2^* * \theta_3^* * \theta_4^* \not\leqslant h_4^*$$

于是由 θ_1，θ_2，θ_3，θ_4 不能对 h_4 作出判断。如果取 X 上的包含度为 $A \cap B$ 中元素个数与 A 中元素个数之比，通过计算包含度可得

$$D(h_4^* / \theta_1^* * \theta_2^* * \theta_3^* * \theta_4^*) = 0.5$$

这是由于对于 h_4 存在着矛盾的事例。比如 x_1 与 x_3，属性一样，

但决策 h_4 却不相同。在存在有矛盾事例情况下，一般来说可以采用以下方法决定对矛盾事例的取舍而形成不确定的规则。若

$$D(\mathscr{B}/\mathscr{A})=\bigwedge_{i=1}^{k}\left(\bigvee_{j=1}^{l}D(B_j/A_i)\right)=\alpha<1$$

对于任意 $i\leqslant k$，取 B_{j_i} 使

$$D(B_{j_i}/A_i)=\bigvee_{j=1}^{l}D(B_j/A_i)$$

这样即得到规则"如果 A_i，那么 B_{j_i}"。

由以上的讨论可知，若属性集$\Theta=\{\theta_1,\cdots,\theta_m\}$，且

$$D(h/\theta_1^* * \theta_2^* * \cdots * \theta_m^*)=1$$

则关系数据库必然可以形成确定性规则。若

$$D(h/\theta_1^* * \theta_2^* \cdots * \theta_m^*)<1$$

不可能形成确定性规则，但可以形成不确定性规则。实际上所谓形成的确定性规则只是对关系数据库而言的，是针对这些特定事例的确定性规则。而这些事例本身就是不确定的，因此对实际情况来说仍然为不确定性规则。

6.6 蕴含度与专家系统中的不确定性推理

蕴含度也称为隐含度，表示了两个命题之间的蕴含程度。在经典逻辑中，蕴含关系只有两种极端情况：一是蕴含关系成立，二是蕴含关系不成立。也就是说只有"真"和"假"两个值。蕴含度表示了蕴含关系在"真"与"假"之间的一种过渡。因此，它是定量化不确定性推理的基础。

定义 6.4 设 X 为对象集合，Θ为属性集合。$\mathscr{P}(X)$和$\mathscr{P}(\Theta)$分别表示 X 和Θ中全体经典子集；$\mathscr{F}(X)$和$\mathscr{F}(\Theta)$分别表示 X 和Θ中全体模糊集。$P\in\mathscr{F}(\Theta)$称为一个命题。如果映射 $g:\mathscr{F}(\Theta)\to\mathscr{F}$

(X)(或 $\mathscr{P}$(X))满足条件

$$P\subset Q(P,Q\in\mathscr{P}(\Theta))\Rightarrow g(Q)\subset g(P)$$

称 g 为外延映射。若进一步满足

$$g(\varnothing)=X,\quad g(\Theta)=\varnothing$$

称为正则的外延映射。称外延映射 g 为下外延映射，若

$$g(P\cup Q)=g(P)\cap g(Q) \tag{6.3}$$

称外延映射 g 为上外延映射，若

$$g(P\cap Q)=g(P)\cup g(Q) \tag{6.4}$$

例 6.9 设(X,P,Θ,I)为关系数据库系统，即 $I\subset X\otimes\Theta$，且有性质：若对于任意 $x\in X$，存在 $\theta_1,\theta_2\in\Theta$，使 $(x,\theta_1)\in I$，$(x,\theta_2)\notin I$；对于任意 $\theta\in\Theta$，存在 $x_1,x_2\in X$，使 $(x_1,\theta)\in I$，$(x_2,\theta)\notin I$。记

$$g_*(P)=\{x;\ \forall\theta\in P,\ (x,\theta)\in I\}\qquad(P\in\mathscr{P}(\Theta))$$

易证：

(1) 若 $P\subset Q(P,Q\in\mathscr{P}(\Theta))$，则 $g_*(Q)\subset g_*(P)$；

(2) $g_*(\varnothing)=X$，$g_*(\Theta)=\varnothing$；

(3) $g_*(P\cup Q)=g_*(P)\cap g_*(Q)$。

于是 g_* 为正则的下外延映射。记

$$g^*(P)=\{x;\ \forall\theta\notin P,\ (x,\theta)\in I\}\quad(P\in\mathscr{P}(\Theta))$$

易证：

(1) 若 $P\subset Q(P,Q\in\mathscr{P}(\Theta))$，则 $g^*(Q)\subset g^*(P)$；

(2) $g^*(\varnothing)=X$，$g^*(\Theta)=\varnothing$；

(3) $g^*(P\cap Q)=g^*(P)\cup g^*(Q)$。

于是 g^* 是正则的上外延映射。

例 6.10 设(X, P, Θ, V)为模糊关系数据库系统，V 是 $X\otimes\Theta$ 上的模糊集，且对于任意 $x\in X$，存在 $\theta\in\Theta$ 使 $0<V(x,\theta)<1$；对于任意 $\theta\in\Theta$，存在 $x\in X$，使 $0V(x,\theta)<1$。则

$$g_*(Q)=\{x;\quad Q\subset V(x)\}\quad(Q\in\mathscr{F}(\Theta))$$

为正则的下外延映射，而

$$g^*(Q)=\{x;\quad Q\supseteq V^c(x)\}\quad (Q\in\mathscr{F}(\Theta))$$

为正则的上外延映射，其中

$$V(x)=\sum V_j(x)/\theta_j$$

是Θ上的模糊集。$V_j(x)=V(x,\theta_j)$。

设D是$\mathscr{F}(\Theta)$上的包含度，M为$\mathscr{F}(X)$上的模糊测度，记

$$g_1(P)(x)=\mathrm{D}(\underset{\sim}{V}(x)/\mathrm{P})=\mathrm{M}(P^c\cup \underset{\sim}{V}(x))$$

$$g_2(P)(x)=\frac{\mathrm{M}(V(x)\cap P^c)}{\mathrm{M}(V(x))}$$

$$g_3(P)(x)=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(\mathrm{P}(\theta_j)\alpha V(x)(\theta_j))$$

其中 $a\alpha b$ 是$[0,1]$上的二元函数，且 $a\leqslant b$ 时 $a\alpha b=1$，$a>b$ 时，$a\alpha b=b$。若M为必然度，则 $g_i(i\leqslant 3)$为下外延映射，若M为可能度，则 $g_i(i\leqslant 3)$为上外延映射。

定义 6.5 设X为对象集合，Θ为属性集合，g 为外延映射，D为$\mathscr{F}(\Theta)$上的包含度，P为X上的概率测度，称

$$\mathrm{T}(P)=P(g(P))\qquad (P\in\mathscr{F}(\Theta))$$

为 P 的真值，而称

$$\mathrm{T}(P\rightarrow Q)=\mathrm{D}(g(Q)/g(P))$$

为"$P\rightarrow Q$"的蕴含度。

例 6.11 假定M为模糊测度，则

$$\mathrm{T}_1(P\rightarrow Q)=\mathrm{M}(g(P)^c\cup g(Q))$$

$$\mathrm{T}_2(P\rightarrow Q)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(1-g(P)(x_i))\vee g(Q)(x_i)]$$

$$\mathrm{T}_3(P\rightarrow Q)=\frac{\sum(g(P)(x_i)\wedge g(Q)(x_i))}{\sum g(\mathrm{P})(x_i)}$$

$$T_4(P \to Q) = \frac{\sum(g(P)^c(x_i) \wedge g(Q)^c(x_i))}{\sum g(Q)^c(x_i)}$$

$$T_5(P \to Q) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(g(P)(x_i)\alpha g(Q)(x_i))$$

是蕴含度。

由于蕴含度是通过包含度定义的,根据不同的包含度可以得到各种各样的蕴含度。

定理 6.10 蕴含度具有以下性质:

(1) $P \subset Q$ 时,$T(Q \to P) = 1$

(2) $P \subset Q \subset R$ 时,$T(Q \to R) \geqslant T(P \to R)$

(3) 对于 P 和 Q 有

$$T(P \vee Q \to Q \vee P) = 1$$
$$T(P \wedge Q \to Q \wedge P) = 1$$

证明 由 $P \subset Q$ 时 $g(Q) \subset g(P)$ 及包含度性质即证(1)和(2)。在(3)中 $P \vee Q$ 表示"或"运算,$P \wedge Q$ 表示与运算,它们是可交换的,由(1)则证(3)。

定理 6.11 设 M 为模糊测度,记

$$T(P \to Q) = M(g(P)^c \cup g(Q))$$

则有以下性质:

(1) 若 g 为下外延映射,M 为必然度,则

$$T(P \to Q \vee R) = T(P \to Q) \wedge T(P \to R)$$

(2) 若 g 为下外延映射,M 为可能度,则

$$T(P \vee Q \to R) = T(P \to R) \vee T(Q \to R)$$

(3) 若 g 为上外延映射,M 为可能度,则

$$T(P \to Q \wedge R) = T(P \to Q) \vee T(P \to R)$$

(4) 若 g 为上外延映射,M 为必然度,则

$$T(P \wedge Q \to R) = T(P \to R) \wedge T(Q \to R)$$

(5) 对于任意模糊测度 M，当 $g(P)^c = g(\bar{P})$ 时

$$\mathrm{T}(\bar{Q} \to \bar{P}) = \mathrm{T}(P \to Q)$$

其中 $\bar{P}(\theta) = P^c(\theta)$。

(6) 若 M 为概率测度，g 为下外延映射，$P \to R$ 与 $Q \to R$ 是独立的，即

$$\mathrm{M}((P \to R) \wedge (Q \to R)) = \mathrm{M}(P \to R)\mathrm{M}(Q \to R)$$

则

$$\mathrm{T}(P \vee Q \to R) = \mathrm{S}_2(\mathrm{T}(P \to R), \mathrm{T}(Q \to R))$$

证明 设 g 为下外延映射，M 为必然度，则

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(P \to Q \vee R) &= \mathrm{M}(g(P)^c \cup g(Q \cup R)) \\
&= \mathrm{M}(g(P)^c \cup (g(Q) \cap g(R))) \\
&= \mathrm{M}((g(P)^c \cup g(Q)) \cap (g(P)^c \cup g(R))) \\
&= \mathrm{M}(g(P)^c \cup g(Q)) \wedge \mathrm{M}(g(P)^c \cup g(R)) \\
&= \mathrm{T}(P \to Q) \wedge \mathrm{T}(P \to R)
\end{aligned}$$

则证(1)。(2)、(3)、(4)类似可证。由于

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(\bar{Q} \to \bar{P}) &= \mathrm{M}(g(\bar{Q})^c \cup g(\bar{P})) \\
&= \mathrm{M}(g(Q) \cup g(P)^c) \\
&= \mathrm{M}(g(P)^c \cup g(Q)) \\
&= \mathrm{T}(P \to Q)
\end{aligned}$$

即证(5)。若 M 为概率测度，g 为下外延映射，$P \to R$ 与 $Q \to R$ 独立时，有

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(P \vee Q \to R) &= \mathrm{M}(g(P \vee Q)^c \cup g(R)) \\
&= \mathrm{M}((g(P) \cap g(Q))^c \cup g(R)) \\
&= \mathrm{M}(g(P)^c \cup g(Q)^c \cup g(R)) \\
&= \mathrm{M}((g(P)^c \cup g(R)) \cup (g(Q)^c \cup g(R))) \\
&= \mathrm{M}(g(P)^c \cup g(R)) + \mathrm{M}(g(Q)^c \cup g(R)) \\
&\quad - \mathrm{M}(g(P)^c \cup g(R))\mathrm{M}(g(Q)^c \cup g(R)) \\
&= \mathrm{T}(P \to R) + \mathrm{T}(Q \to R) - \mathrm{T}(P \to R) \cdot \mathrm{T}(Q \to R)
\end{aligned}$$

$= S_2(T(P \to R), T(Q \to R))$

定理 6.11 即是给出假定评价的合成公式。由两个不确定性推理结构合成一个不确定性的命题。记

$$T(P' \wedge \text{“}P \to Q\text{”}) = T(P') \wedge T(P \to Q)$$

$$T(P \to \text{“}Q \to R\text{”}) = T((P \vee Q) \to R)$$

$$T(\text{“}P \to Q\text{”} \to R) = T((P \wedge Q) \to R)$$

则为不确定性推理的传递公式。

定理 6.12 不确定推理的传递公式具有性质：

(1) 若 M 为可能度，g 为下外延映射，则

$$T(P \to \text{“}Q \to R\text{”}) = T(P \to R) \vee T(Q \to R)$$

(2) 若 M 为可能度，g 为上外延映射，则

$$T(\text{“}P \to Q\text{”} \to R) = T(P \to R) \wedge T(Q \to R)$$

证明 由定理 6.11 则证。

参考文献

[1] Zadeh L A. Fuzzy Sets. Information and Control, 1965, 8: 338~353

[2] Mamdani E H. Applications of Fuzzy Algorithms for Simple Dynamic Plant. Proc. IEE, 1974, 121: 1585~1588

[3] Kruse R, Schwecke E and Heinsohn J. Uncertainty and Vagueness in Knowledge Based Systems, Springer-Verlag, Berlin: Heidelberg, 1991

[4] Klir G J and Folger T A. Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information. Prentice-Hall, 1988

[5] Kosko B. Neural Networks and Fuzzy Systems. Prentice-Hall, 1992

[6] Zadeh L A, Kacprzyk J. Fuzzy Logic for the Management of Uncertainty. John Wiley, 1992

[7] Witold P. Fuzzy Control and Fuzzy Systems. Resarch Studies Press, 1993

[8] Leung Y. Fuzzy Sets Approach to Spatial Analysis and Planning: A Nontechnical Evaluation. Chinese University of Hong Kong. 1983

[9] Mitra S, Gupta M M, Kraske W F. Neural and Fuzzy Systems. U.S.A. 1994

[10] Dubois D, Prade H. Possibility Theory. Plenum Press, 1988

[11] Leung K S and Lam W. Fuzzy Concepts in Expert Systems. IEEE COMPUTER Sept., 1988 21(9) 43～56

[12] Leung K S and Lam W. A Fuzzy Expert System Shell Using Both Exact and Inexact Reasoning. Journal of Automated Reasoning 5(2) (D. Reidel Publishing Co., Holland. June. 1989), 207～233

[13] Leung K S, Leung Y, So L and Yam K F. Rule Learning in Expert Systems Using Genetic Algorithm: 1. Concepts, Procedings of the 2nd International Conterence on Fuzzy Logic & Neural Networks, Japan (July 17-22, 1992a), 201～204

[14] Leung K S, Leung Y, So L and Yam K F. Rule Learning in Expert Systems Using Genetic Algorithm: 2. Empirical Studies, Proceedings of the 2nd International Conference on Fuzzy Logic & Neural Networks, Japan (July 17-22, 1992b), 205～208

[15] Leung K S, Leung Y and Wong M H. The Integration of Rule-based and Proceedural Methods to Solve Optimization Problems Through Expert-System Technology. The Interface Between Artificial Intelligence and Operations Research in Fuzzy Environment ISR 95 (Verlag TUV Rheinland, Germany, 1989a), 157～176

[16] Leung K S, So Y T. Ares Leung and Wong, W. S. Z-Ⅲ: APC-Based Fuzzy Expert System Shell. Proceedings of International Computer Symposium 2 (Taiwan, Dec. 17-19, 1990), 657～662

[17] Leung K S and Wong M H. An Expert System Shell

Using Sturctured Knowledge: An Object Oriented Approach, IEEE COMPUTER March, 1990 23(3) 38 ~47

[18] Leung K S and Wong M H. Fuzzy Conceptes in an Object Oriented Expert System Shell, International Journal of Intelligent Systems 7(2) (John Wiley, Feb, 1992), 171 ~192

[19] Leung K S, Wong M H and Lam M. A Fuzzy Expert Database System. Data & Knowledge Engineering. North-Holland 4(4) (Dec., 1989c) 287~304

[20] Leung K S, Wong M L. Automatic Refinement of Knowledge Bases with Fuzzy Rules. Knowledge-Based Systems 4(4) (Butterworth-Heinemann., Oxford, U. K., Dec., 1991a), 231~246

[21] Leung K S and Wong M L. Inducing and Refining Rule-based Knowledge from Inexact Examples. Knowledge Acquisition 3(3) (Academic Press, London, Sept., 1991b), 291~315

[22] Leung K W, Wong W S and Lam W. Applications of a Novel Fuzzy Expert System Shell. Expert Systems: The International Journal of Knowledge Engineering (691) (Feb., 1989b) 2~10

[23] Leung Y. A Concept of Fuzzy Ideal for Multicriteria Conflict Resolutiln, in Advances in Fuzzy Sets (ed.) P. P. Wang (Plenum Press, New York, 1983), 387~403

[24] Leung Y. Compromise Programming under Fuzziness. Control and Cybernetics 13 (1984) 203~214

[25] Leung Y. Spatial analysis and planning under Imprecision

(North-Holland, Amsterdam, 1988)
[26] Leung Y. Towards the Development of an Intelligent Spatial Decision Support System, in Geographic Information Systems, Spatial Modelling and Policy Evaluation, ed. M. M. Fischer and P. Nijkamp (Springer-Verlag, Berlin, 1993.)
[27] Leung Y, Leung K S. An Intelligent Expert Systems Shell for Knowledge-Based Gegraphic Information Systems: I The Tool. International Jourual of Geograhic Information System, 7(1993a)
[28] 张文修,杨金丽.合情推理与计算机思维.西安:西安交通大学出版社,1988
[29] 张文修.信息论与或然逻辑.西安:西安交通大学出版社,1988
[30] 张文修,陈雁.合情推理与发现逻辑.贵阳:贵州科技出版社,1994
[31] 张文修,徐萍,陈雁.内涵空间与外延空间概率推理的理论基础.工程数学学报, 1991(3)
[32] 张文修,陈雁. Model of Plausible Inference Based on Fuzzy Measure. 第一届全国智能信息技术讨论会议文集,1992
[33] 梁广锡,梁怡,张文修.关系数据库上的证据理论.工程数学学报, 1994(3)
[34] 梁广锡,张文修.包含度及其在专家系统中的应用.工程数学学报, 1994(4)
[35] 张文修,梁广锡,梁怡.包含度及其在人工智能中的应用.西安交通大学学报, 1995(8)
[36] 张文修,徐萍.模糊控制系统发展前景.西北高新科技,

1993(3)
[37] 张文修. T 模运算下 F 关系方程最大解. 科学通报, 1982(3)
[38] 张文修,乐惠玲. 扩张模糊算子与 F 真值可能度. 西安交通大学学报, 1986(4)
[39] 张文修,乐惠玲. The Structure of Norm Systems of FuzzySets. Math. Anal. and Appl. 1987. 127(1)
[40] 张文修. Fuzzy 数测度. 科学通报. 1986(23)
[41] 张文修等, Set-Valued measures and Fuzzy set-valued measures. Fuzzy Sets and Systems, 1990. 36(1)
[42] 张文修等. 模糊数学引论. 西安:西安交通大学出版社, 1991