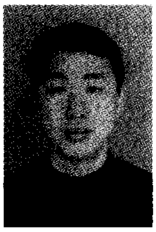
文章编号:1671-7848(2009)02-0130-03

无模型控制律的基本形式收敛性分析

于志刚[1,2]，赵 杰[1]
(1. 哈尔滨工业大学 机器人研究所，黑龙江 哈尔滨 150001；2. 黑龙江大学 电子工程重点实验室，黑龙江 哈尔滨 150080)



摘 要：在实时建模与反馈控制一体化的思想下，利用“泛模型的基本形式”，对无模型控制律的收敛性进行了定量和定性的分析，给出了控制律收敛的必要条件、特征参量选择方法以及影响收敛特性的因素。从理论上，进一步证明了无模型控制器设计方法的合理性，并为控制器的设计提供理论依据。分析结果表明了在考虑控制系统设计的建模问题时，可以脱离开“先建模后设计”的经典途径，只要从所谓的泛模型出发，所设计的无模型控制律的收敛性将得到保证。

关 键 词：无模型控制；收敛性；泛模型
中图分类号：TP 273 **文献标识码**：A

Convergence Analysis of Model Free Control Law with Primary Pattern

YU Zhi-gang[1,2], *ZHAO Jie*[1]
(1. Robotics Insititute, Harbin Insititute Technology, Harbin 150001, China;
2. Key Laboratory of Electronics Engineering, Heilongjiang University, Harbin 150080, China)

Abstract: Based on the perimer form of unvisial model and the thought of integration of real-time modeling and feedback control, the convergence of model free control law is analyzed quantitatively and qualitatively. The necessary condition of convergence on control law, the choice of character parameter and the effective factor of convergence are given. The rationalities of model free control design method are proved theoritically. A theoritical basis is provided for the model free control design. The analysis results show that the convergence of the model free contrl law is guaranteed and the thought of design in advance of modeling can be pass away, while dealing with the design of control systems.

Key words: model free control; convergence; unvisial model

1 引 言

在建模与控制一体化的思想下[1]，无模型控制器在设计过程中，实质上是不需要建立被控对象的精确的数学模型。但需要有一个对任何系统都能适应的粗糙的模型，称为“泛模型”。

在考虑控制系统设计的建模问题时，只要从所谓的泛模型出发，可以脱离开“先建模后设计”的经典途径，在一定的条件下，所设计的控制器的收敛性将得到保证。反过来这又保证了控制器设计时所依赖的所谓的泛模型的逐渐精确化。无模型控制器就是用这种途径设计出来的，它在应用中所获得的大量的成功的实例[2-3]，证明了其合理性。

为进一步对无模型控制方法推广应用，有必要对无模型控制设计过程中遇到的难点问题进行较深入的理论分析[4-5]。本文给出了控制律收敛的必要条件、特征参量和参数选择方法以及影响收敛特性的因素，为控制器的设计提供依据。

2 无模型控制律基本形式

考虑如下的泛模型描述的多输入-单输出非线性系统：

$$y(k+1)-y(k)=\varphi(k)^{\tau}[u(k)-u(k-1)] \quad (1)$$

以及控制律：

$$u(k)=u(k-1)+\lambda_k\hat{\varphi}(k)[y_0-y(k)]/(a+\|\hat{\varphi}(k)\|^2) \quad (2)$$

式中，a 为一个适当的小正数；λ_k称为控制参数。

将式(2)代入式(1)，可以得出：

$$y_0-y(k+1)=(1-\lambda_k\Delta_k)(y_0-y(k)) \quad (3)$$

式中，$\Delta_k=\varphi(k)^{\tau}\hat{\varphi}(k)/(a+\|\hat{\varphi}(k)\|^2)$。

从泛模型出发可以得出 $\varphi(k+1)$的估值 $\hat{\varphi}(k+1)$。在控制律：

$$u(k+1)=u(k)+\lambda_{k+1}\hat{\varphi}(k+1)[y_0-y(k+1)]/(a+\|\hat{\varphi}(k+1)\|^2) \quad (4)$$

的作用下，可得到真实系统的输出 $y(k+2)$。于是可以得出：

收稿日期：2007-12-07； **收修定稿日期**：2008-03-06
基金项目：黑龙江大学青年科学基金资助项目(QL200706)
作者简介：于志刚(1972-)，男，辽宁北镇人，讲师，博士，主要从事非线性系统控制等方面的教学与科研工作。

$$y_0-y(k+2)=(1-\lambda_{k+1}\Delta_{k+1})(y_0-y(k+1))=$$
$$(1-\lambda_{k+1}\Delta_{k+1})(1-\lambda_k\Delta_k)(y_0-y(k))$$

如此继续下去，可以得到：

$$y_0-y(k+h)=\prod_{j=0}^{h-1}(1-\lambda_{k+j}\Delta_{k+j})(y_0-y(k)) \tag{5}$$

式(5)是进行收敛性分析的基础。

引理 1[6]　如果对一切 $h\geqslant 0$，满足：

(1) $0\leqslant\lambda_{k=h}\Delta_{k+h}\leqslant 1$

(2) $\sum_{h=0}^{\infty}\lambda_{k+h}\Delta_{k+h}=\infty$

则有 $\lim_{h\to\infty}y(k+h)=y_0$。

3　控制律的收敛性分析

1）收敛的一个必要条件

定理 1　若控制律式(4)中的参数选择为

$$\begin{cases}|\varepsilon_i|<(2-\lambda_{k+j})|\hat{\varphi}_i(k)|/\lambda_{k+j},(i=1,2,\cdots,n)\\ 0<\lambda_{k+j}<2\end{cases} \tag{6}$$

则有：

$$\lim_{h\to\infty}y(k+h)=y_0 \tag{7}$$

其中，$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varphi}(k)-\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)$ 为估计误差，且：

$$\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{\varphi}(k)=(\varphi_1(k),\varphi_2(k),\cdots,\varphi_n(k))^{\mathrm{T}}$$
$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)=(\hat{\varphi}_1(k),\hat{\varphi}_2(k),\cdots,\hat{\varphi}_n(k))^{\mathrm{T}}$$

n 为向量 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)$ 的维数。

证明　若式(6)成立，则：

$$\begin{cases}\|\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)\|^2+\lambda_{k+j}\boldsymbol{\varepsilon}^{\tau}\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)/(\lambda_{k+j}-2)>0\\ 0<\lambda_{k+j}<2\end{cases}$$

因为 $|(\lambda_{k+j}-2)/\lambda_{k+j}|<1$，则：

$$\begin{cases}\|\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)\|^2+\lambda_{k+j}/\lambda_{k+j}-2\boldsymbol{\varepsilon}^{\tau}\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)>0\\ \|\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)\|^2+\boldsymbol{\varepsilon}^{\tau}\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)>0\\ 0<\lambda_{k+j}<2\end{cases}$$

即：

$$\begin{cases}(\lambda_{k+j}-2)\|\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)\|^2+\lambda_{k+j}\boldsymbol{\varepsilon}^{\tau}\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)<0\\ \lambda_{k+j}(\|\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)\|^2+\boldsymbol{\varepsilon}^{\tau}\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k))>0\end{cases}$$

因为 $a>0$，则：

$$\begin{cases}(\lambda_{k+j}-2)\|\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)\|^2<-\lambda_{k+j}\boldsymbol{\varepsilon}^{\tau}\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)+2a\\ \lambda_{k+j}(\|\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)\|^2+\boldsymbol{\varepsilon}^{\tau}\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k))>0\end{cases}$$

即：

$$\begin{cases}\lambda_{k+j}(\|\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)\|^2+\boldsymbol{\varepsilon}^{\tau}\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k))<2(a+\|\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)\|^2)\\ \lambda_{k+j}(\|\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)\|^2+\boldsymbol{\varepsilon}^{\tau}\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k))>0\end{cases}$$

$$0<\lambda_{k+j}(\|\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)\|^2+\boldsymbol{\varepsilon}^{\tau}\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k))<2(a+\|\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)\|^2)$$

因为 $a+\|\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)\|^2>0$，则：

$$0<\lambda_{k+j}[\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)+\boldsymbol{\varepsilon}]^{\tau}\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)/(a+\|\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)\|^2)<2$$

$$0<\lambda_{k+j}\frac{\boldsymbol{\varphi}(k)^{\tau}\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)}{a+\|\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)\|^2}<2,0<\lambda_{k+j}\Delta_{k+j}<2$$

即：$|1-\lambda_{k+j}\Delta_{k+j}|<1$

于是根据引理 1，则有式(7)成立。证明完毕。

对于单输入-单输出泛模型描述的系统，能够使得控制算法收敛的特征参量 $\boldsymbol{\varphi}(k)$ 的估值 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)$ 的取值范围，可以用二维图形来直观地表示出来。

不失一般性，令 $\lambda_{k+j}=1$，由式(6)得 $|\varepsilon_i|<|\hat{\varphi}_i(k)|$，即：

$$|\varphi_i(k)-\hat{\varphi}_i(k)|<|\hat{\varphi}_i(k)| \tag{8}$$

满足不等式(8)成立，必有：

$$\varphi_i(k)>0,\hat{\varphi}_i(k)>0 \text{ 或 } \varphi_i(k)<0,\hat{\varphi}_i(k)<0$$

于是：

$$-\hat{\varphi}_i(k)<\varphi_i(k)-\hat{\varphi}_i(k)<\hat{\varphi}_i(k) \text{ 或}$$
$$\hat{\varphi}_i(k)<\varphi_i(k)-\hat{\varphi}_i(k)<-\hat{\varphi}_i(k)$$

即 $\varphi_i(k)/2<\hat{\varphi}_i(k)$ 或 $\varphi_i(k)/2>\hat{\varphi}_i(k)$。如果令：

①$\varphi_i(k)>0$，$\hat{\varphi}_i(k)>0$，并且 $\hat{\varphi}_i(k)>\varphi_i(k)/2$

②$\varphi_i(k)<0$，$\hat{\varphi}_i(k)<0$，并且 $\varphi_i(k)/2>\hat{\varphi}_i(k)$

则当条件①或②成立时，有式(7)成立。

条件①和②表示了使得控制律式(5)收敛，估计值 $\hat{\varphi}_i(k)$ 的取值范围。因此，估计值 $\hat{\varphi}_i(k)$ 的范围，如图 1 中的阴影部分所示。

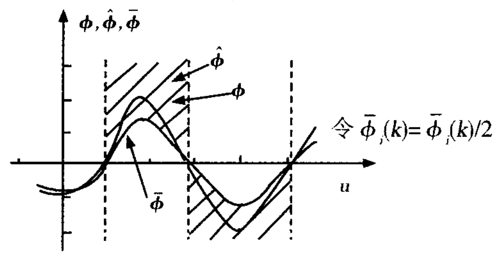


图 1　估计值 $\hat{\varphi}_i(k)$ 的取值范围

Fig. 1 The range of estimate $\hat{\varphi}_i(k)$

根据定理 1 可知，估计误差 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 受到估值 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)$ 和参数 λ_{k+1} 共同约束。$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)$ 和参数 λ_{k+1} 决定了估计误差的大小，进而影响算法的收敛性。

对于两输入-单输出泛模型描述的系统，使得控制算法收敛的特征参量 $\boldsymbol{\varphi}(k)$ 的估值 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)$ 的取值范围，可以用三维图形来直观地表示 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)$ 的允许取值范围，如图 2 所示。

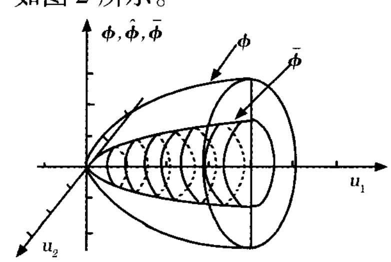


图 2　二维向量 $\hat{\varphi}_i(k)$ 的取值范围

Fig. 2 The range of two dimension vector $\hat{\varphi}_i(k)$

不失一般性，令 $\lambda_{k+1}=1$ 时，$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)$ 的允许取值范围为阴影部分的外部。

2）关于允许估计误差的讨论　估计误差为 $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varphi}(k)-\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)$。从图中可以看出，当 $\boldsymbol{\varphi}(k)$ 比较大时，允许的估计误差 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}=\min\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ 比较大。此时，

给了估计值 $\hat{\varphi}(k)$ 较大的空间，即减小了对 $\hat{\varphi}(k)$ 估计的精度要求；当 $\varphi(k)$ 比较小时，允许的估计误差 $\bar{\varepsilon}=\min\{\varepsilon\}$ 比较小。此时，给了估计值 $\hat{\varphi}(k)$ 较小的空间，增大了对 $\hat{\varphi}(k)$ 估计的难度。

为了提高算法的收敛性，应该选择比较小的 λ，带来的负面影响是减小算法的收敛速度。因此必须根据控制要求合理地选择参数 λ 的值。

3）关于参数 λ 和 a 对估计值 $\hat{\varphi}(k)$ 影响的讨论

根据定理1可知，在 $\varphi(k)=0$ 附近的邻域内容易使算法不收敛，为了保证算法收敛必须选择比较大的参数 λ_{k+j}。

对于单输入单输出系统，可以得到如下收敛性条件(9)。由式(8)得：

$$\begin{cases}\hat{\varphi}(k)^2-\lambda_{k+j}\varphi(k)\hat{\varphi}(k)/2+a>0\\ \lambda_{k+j}\varphi(k)\hat{\varphi}(k)>0\end{cases}$$

若令 $b=-(1/2)\lambda_{k+j}\varphi(k)$，$c=1$，则：

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\hat{\varphi}(k)>(-b+(b^2-4ac)^{1/2})/(2a)\\ \text{或}\ \hat{\varphi}(k)<(-b-(b^2-4ac)^{1/2})/(2a)\\ \varphi(k)\hat{\varphi}(k)>0\\ \lambda_{k+j}>0\end{cases}\qquad(9)$$

λ_{k+j} 和 a 对 $\hat{\varphi}(k)$ 的影响，如图3所示。

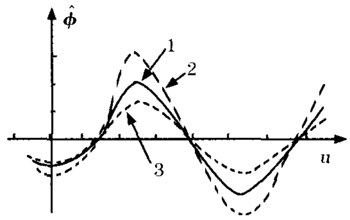


图3　参数 λ_{k+j} 和 a 对 $\hat{\varphi}_i(k)$ 的影响

Fig. 3 The effect of the parameter λ_{k+j} and a on $\hat{\varphi}_i(k)$

图中，曲线1：$0<a\leqslant\delta$，$\lambda=1$，曲线2：$0<a\leqslant\delta$，$\lambda>1$，曲线3：$a>\delta$，$\lambda=1$。

当估计值 $\hat{\varphi}(k)$ 具有较小的空间时，增大了对估计的难度。因此，为了提高算法的收敛性，应该选择比较小的 λ 和较大的 a。

特例：当 $\lambda_{k+j}=1$，且 $a=1$ 时，由式(10)得：

$$\begin{cases}\hat{\varphi}(k)>\varphi(k)/2,(\varphi(k)>0,\hat{\varphi}(k)>0)\\ \hat{\varphi}(k)<\varphi(k)/2,(\varphi(k)<0,\hat{\varphi}(k)<0)\end{cases}$$

5 仿真研究

以上分析为控制器设计中参数的选择提供了依据。下面通过仿真来验证这一结论。考虑下述模型描述的系统：

$$y(k)=1.3y(k-1)-0.3y(k-2)+0.5u(k-1)$$

用基本的无模型控制律式(2)对该系统进行控制。取 $\lambda_k=1.5$，$a=1$，$\hat{\varphi}(k)=100$。

设定值取 $y_0=70$。其控制结果，如图4所示。

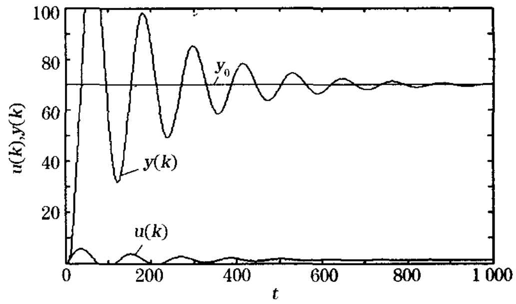


图4　控制参数优化前的结果

Fig. 4 The results before control parameters optimized

为了提高算法的收敛性，应选择比较小的 λ 和较大的 a。为此取 $\lambda_k=0.5$，$a=3$，$\hat{\varphi}(k)=100$。

设定值取 $y_0=70$。其控制结果，如图5所示。

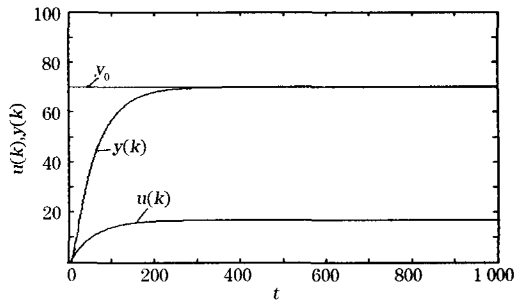


图5　控制参数优化后的结果

Fig. 5 The results of optimal control parameters

从仿真结果可以看出，参数 λ_{k+j} 和 a 对 $\hat{\varphi}(k)$ 具有较大影响，必须根据控制要求合理地选择参数。

6 结　语

上述分析，说明只要从“泛模型”出发，在一定条件下，所设计的控制律的收敛性可以得到保证。说明建模与反馈控制一体化的手续是可行的。所以在考虑控制系统设计的建模问题时，可以脱离开“先建模后设计”的经典途径。

参考文献(References)：

[1] 韩志刚，王德进. 无模型控制器[J]. 黑龙江大学自然科学学报，1994，11(4)：29-35.（Han Zhigang, Wang Dejin. Controller without model[J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 1994，11(4)：29-35.）

[2] 韩志刚. 无模型控制器的应用[J]. 控制工程，2002，9(4)：22-25.（Han Zhigang. The application of model free control [J]. Control Engineering of China, 2002，9(4)：22-25.）

[3] 韩志刚. 无模型控制器理论与应用的进展[J]. 自动化技术与应用，2004，29(2)：1-6.（Han Zhigang. The progress of theory and application of model free controller[J]. Techniques of Automation & Applications，2004，29(2)：1-6.）

[4] 张铁柱，宋仁学，韩志刚. 离散时间非线性系统线性化的泛模型方法[J]. 控制与决策，2002，17(2)：249-251.（Zhang Tiezhu, Song Renxue, Han Zhigang. Universal model method of linearization of discrete time nonlinear system[J]. Control and Decision，2002，17(2)：249-251.）

[5] 韩志刚. 一类复杂系统非建模控制方法的研究[J]. 控制与决策，2003，18(4)：398-402.（Han Zhigang. Study on non-modelling control method for a class of complex systems[J]. Control and Decision, 2003，18(4)：398-402.）

[6] Han Z G, Qin B. Direct adaptive control for nonlinear system[J]. System Analysis Modeling Simulation，1997，28(3)：301-315.