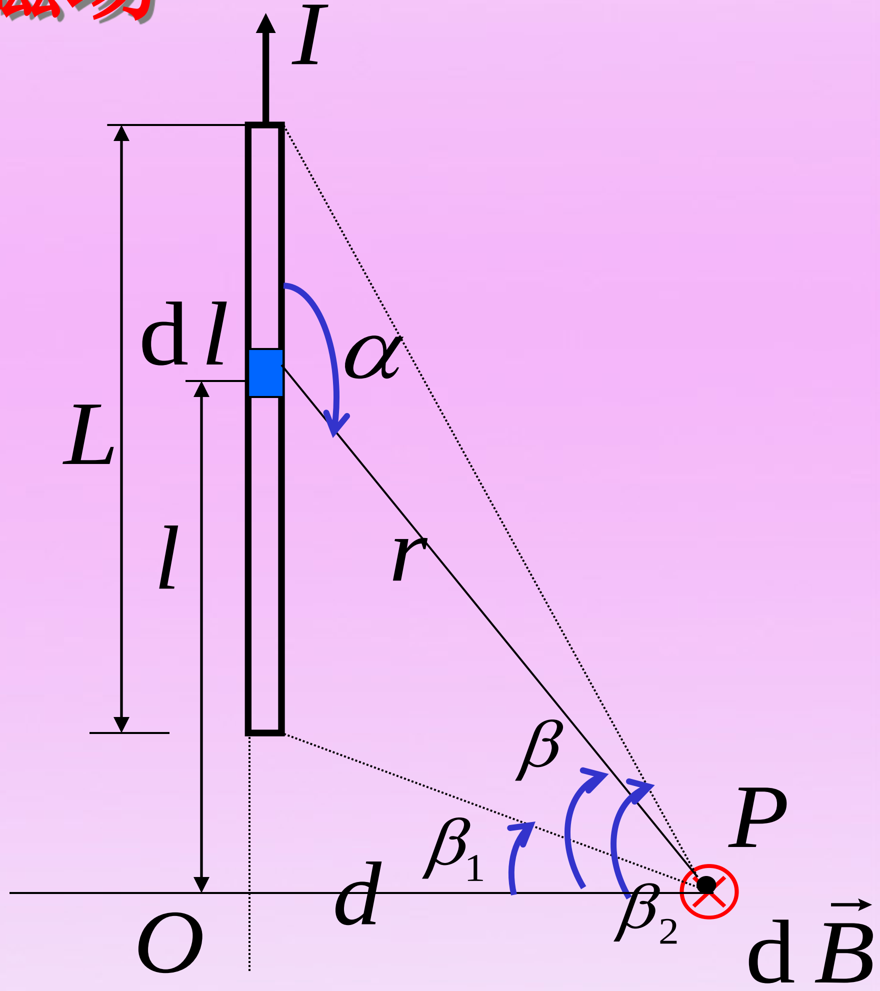
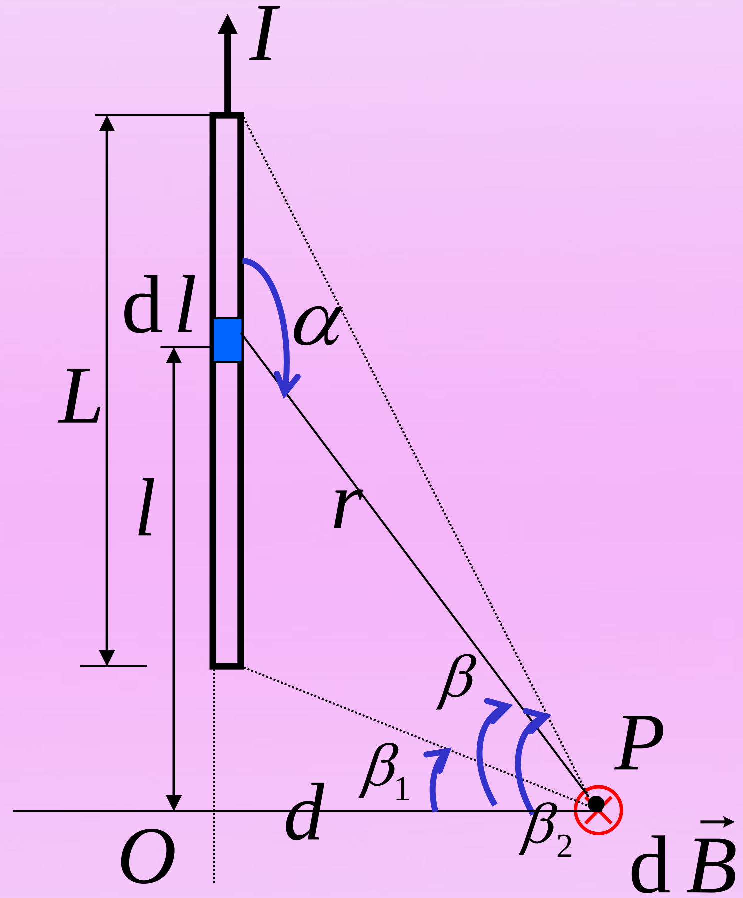
1. 载流长直导线的磁场

设有长为L的载流直导线，通有电流I。计算与导线垂直距离为d的p点的磁感强度。取Z轴沿载流导线，如图所示。



按毕奥—萨伐尔定律有：

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

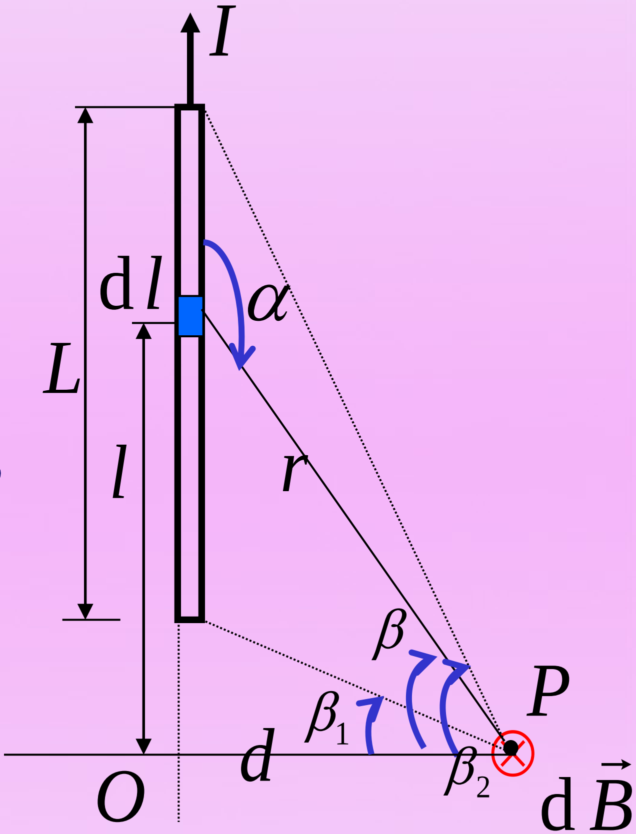


所有dB的方向相同，

所以P点的 $\vec{B}$ 的大小为：

$$B = \int_L \mathrm{d}B = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}$$

$$B=\int_L \mathrm{d}B=\int_L \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}$$



由几何关系有：

$$\sin\alpha=\cos\beta \qquad r=d\sec\beta$$

$$l=d\tan\beta \qquad \mathrm{d}l=d\sec^2\beta\,\mathrm{d}\beta$$

$$\Rightarrow B=\int_L \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{I}{d}\cos\beta\,\mathrm{d}\beta=\frac{\mu_0 I}{4\pi d}\left(\sin\beta_2-\sin\beta_1\right)$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi d}(\sin\beta_2-\sin\beta_1)$$

考虑三种情况：

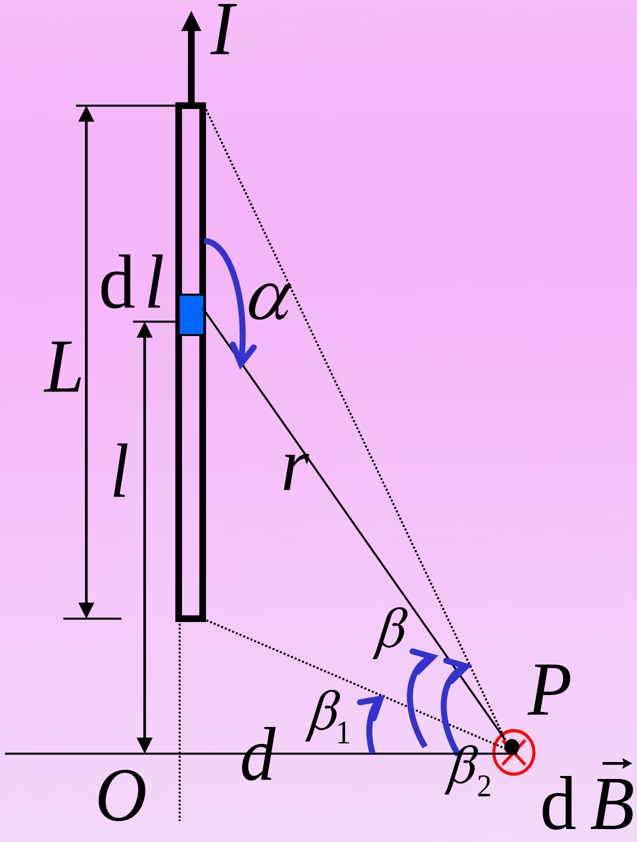
(1) 导线无限长，即 $\beta_1=-\dfrac{\pi}{2}$ $\beta_2=\dfrac{\pi}{2}$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

(2) 导线半无限长，场点与一端的连线垂直于导线

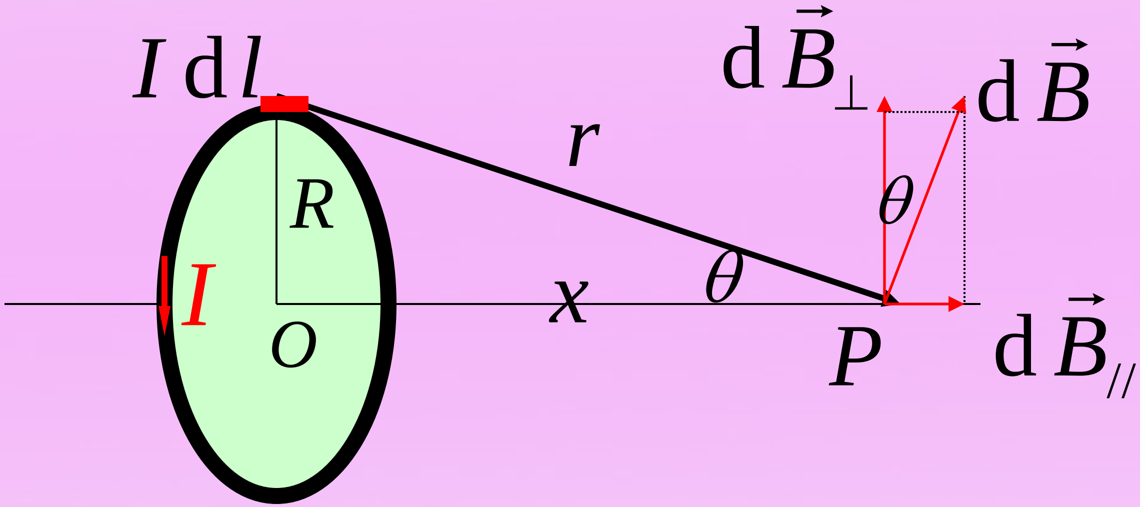
$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi d}$$

(3) P点位于导线延长线上，B=0



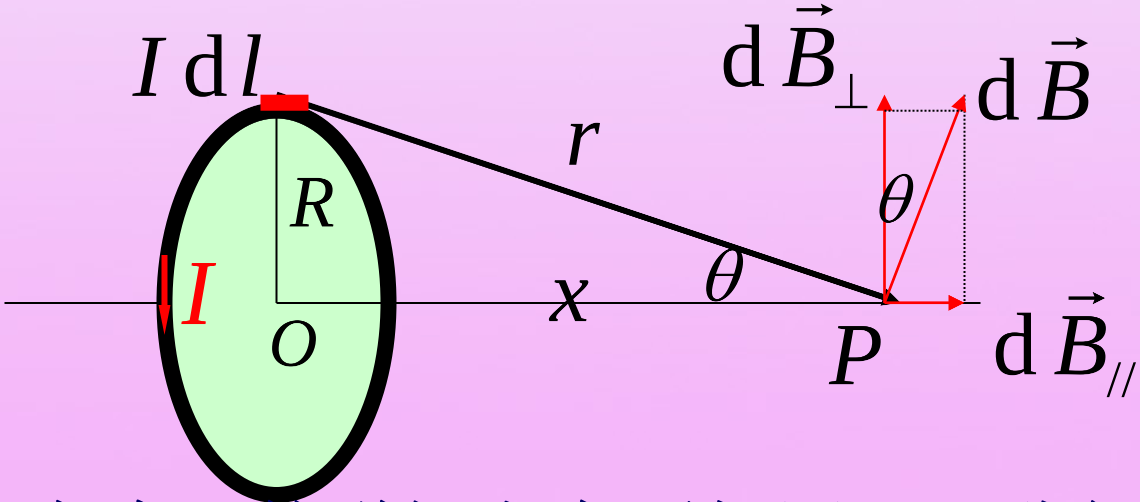
2. 载流圆线圈轴线上的磁场

设有圆形线圈L，半径为R，通以电流I。



在场点P的磁感强度大小为

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

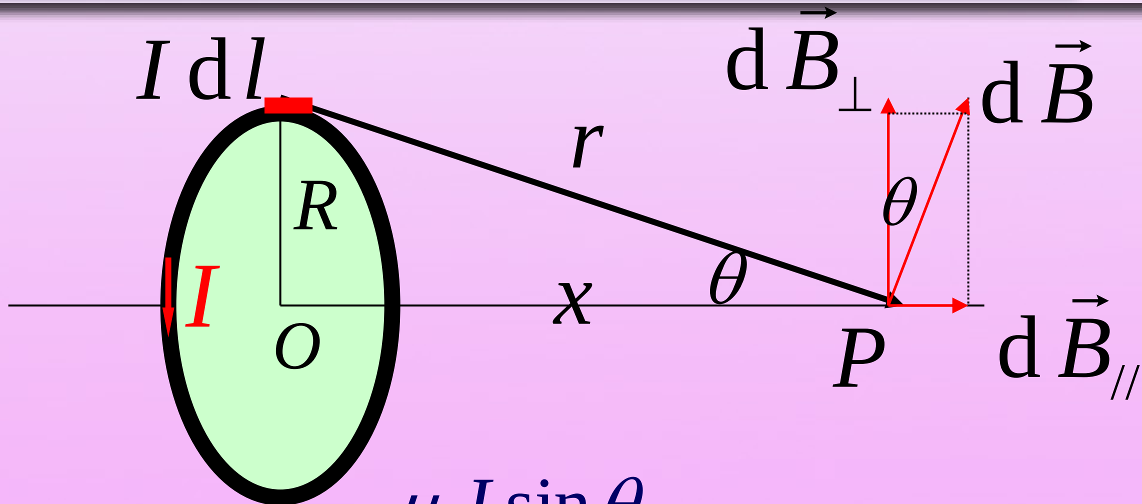


各电流元的磁场方向不相同，可分解为 $\mathrm{d}\vec{B}_\perp$ 和 $\mathrm{d}\vec{B}_{//}$，由于圆电流具有对称性，其电流元的 $\mathrm{d}\vec{B}_\perp$ 逐对抵消，所以P点 $\vec{B}$的大小为：

$$B=\int_L \mathrm{d}B_{//}=\int_L \mathrm{d}B\sin\theta=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_L\frac{I\,\mathrm{d}l}{r^2}\sin\theta$$

$$=\frac{\mu_0 I\sin\theta}{4\pi r^2}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l \quad =\frac{\mu_0 I\sin\theta}{4\pi r^2}2\pi R$$

载流圆线圈轴线上的磁场



$$B=\frac{\mu_0 I\sin\theta}{4\pi r^2}2\pi R$$

$$\because r^2=R^2+x^2,\sin\theta=\frac{R}{r}=\frac{R}{(R^2+x^2)^{1/2}}$$

$$\therefore B=\frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IS}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$S=\pi R^2$$

载流圆线圈轴线上的磁场

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IS}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

讨论：

（1）在圆心处 $x = 0$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

（2）在远离线圈处 $x >> R, x \approx r$

载流线圈的磁矩

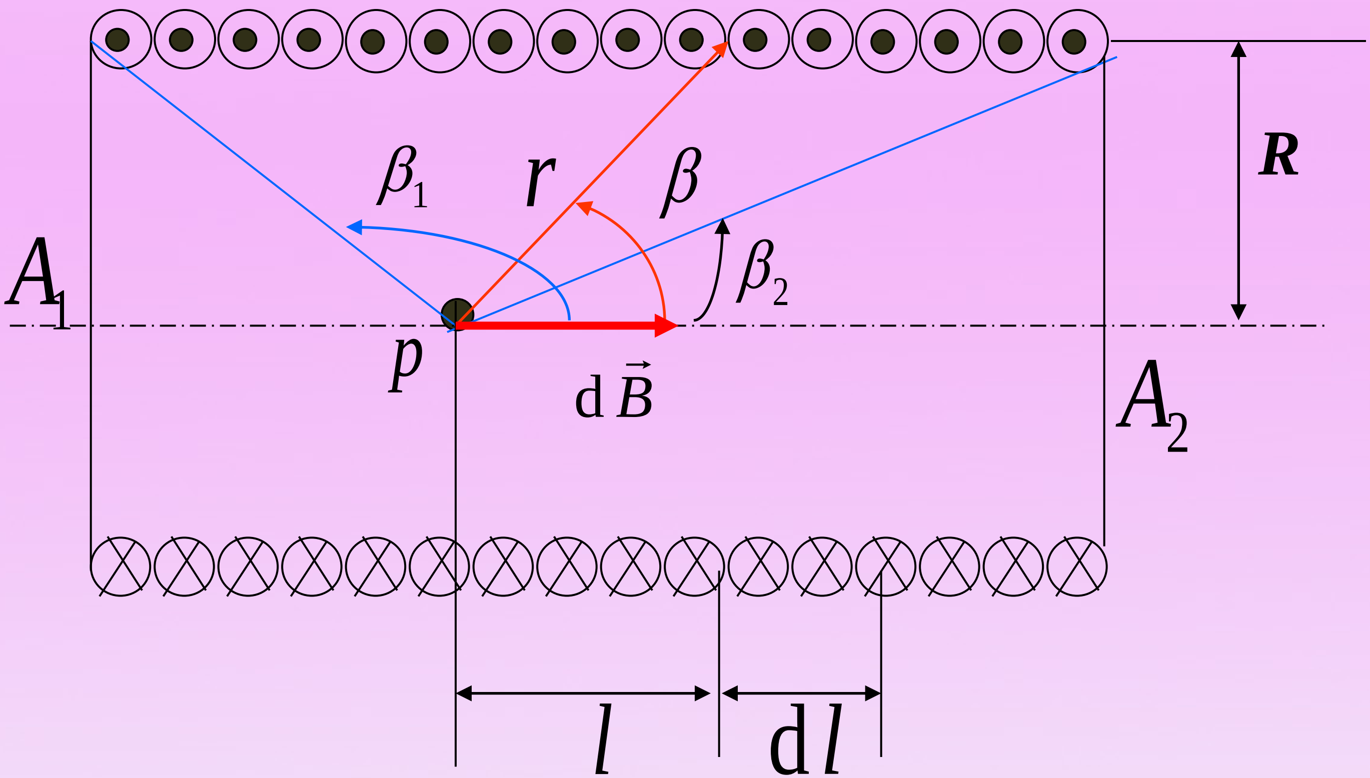
$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IS}{x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IS}{r^3}$$

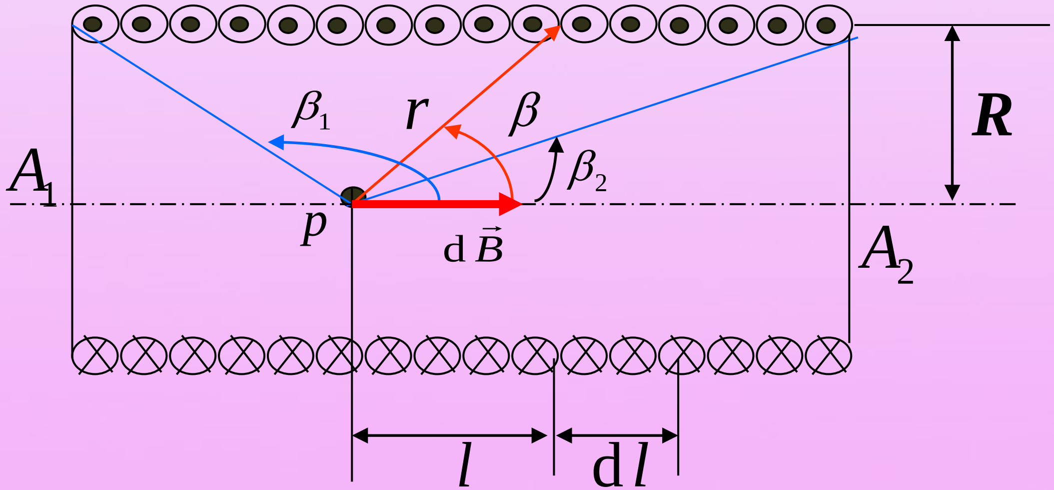
引入 $\vec{p}_m = IS\vec{e}_n$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\vec{p}_m}{r^3}$$

3. 载流直螺线管内部的磁场

设螺线管的半径为***R***，电流为***I***，每单位长度有线圈***n***匝。





由于每匝可作平面线圈处理， **n*****d*****l**匝线圈可作***I*****n*****d*****l**的一个圆电流，在***P***点产生的磁感应强度：

$$\mathrm{d}\,B=\frac{\mu_0 R^2 nI\,\mathrm{d}\,l}{2(R^2+l^2)^{3/2}}$$

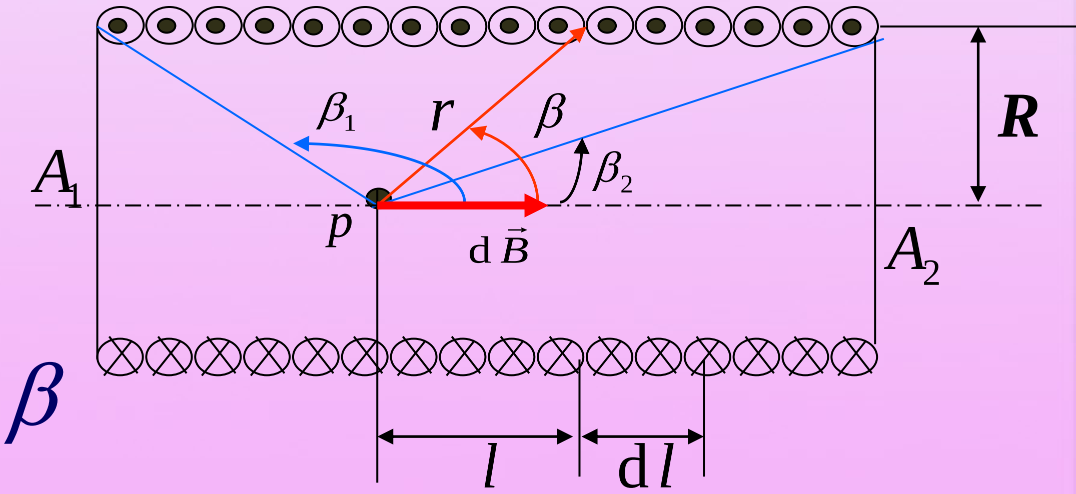
$$B=\int_L \mathrm{d}B=\int_L \frac{\mu_0 R^2 nI\,\mathrm{d}\,l}{2(R^2+l^2)^{3/2}}$$

载流圆线圈轴线上的磁场

$$\because l = R\cot\beta$$

$$\therefore \mathrm{d}l = -R\csc^2\beta\,\mathrm{d}\beta$$

$$\text{又}\because R^2 + l^2 = R^2\csc^2\beta$$



$$B = \int_L \frac{\mu_0 R^2 nI\,\mathrm{d}l}{2(R^2 + l^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0}{2} nI \int_{\beta_1}^{\beta_2} [-\sin\beta]\mathrm{d}\beta$$

$$= \frac{\mu_0}{2} nI(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)$$

$$B=\frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\beta_2-\cos\beta_1)$$

讨论：

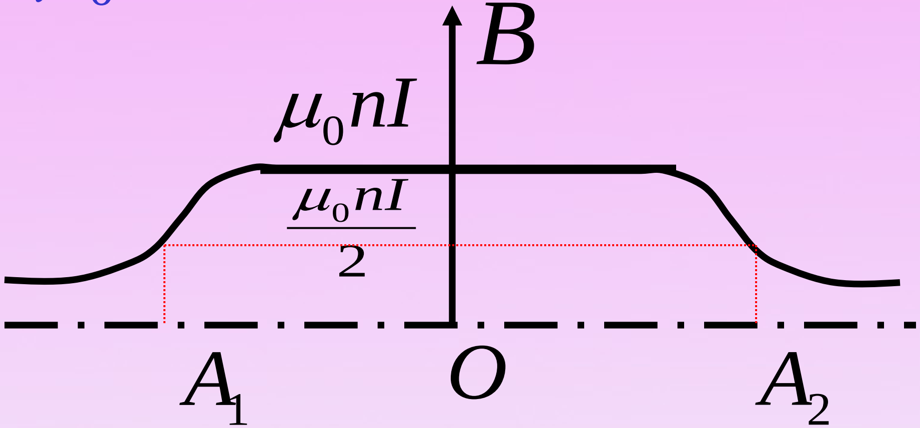
（1）螺线管无限长 $\beta_1\to\pi,\beta_2\to 0$

$$B=\mu_0 nI$$

（2）半无限长螺线管的端点圆心处

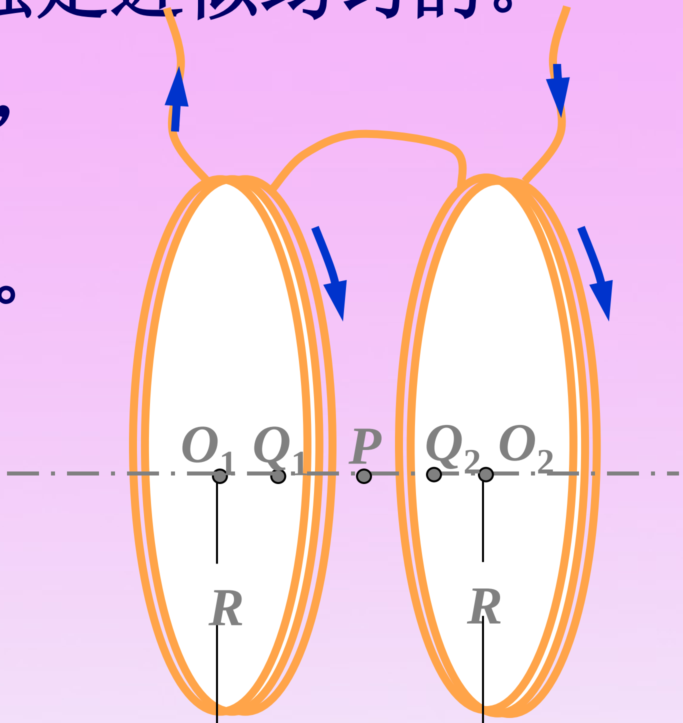
$$B=\mu_0 nI/2$$

实际上，***L>>R*** 时，螺线管内部的磁场近似均匀，大小为 $\mu_0 nI$



例题8-4　亥姆霍兹线圈在实验室中，常应用亥姆霍兹线圈产生所需的不太强的均匀磁场。特征是由一对相同半径的同轴载流线圈组成，当它们之间的距离等于它们的半径时，试计算两线圈中心处和轴线上中点的磁感应强度。从计算结果将看到，这时在两线圈间轴线上中点附近的场强是近似均匀的。

解　设两个线圈的半径为R，各有N匝，每匝中的电流均为I，且流向相同（如图）。两线圈在轴线上各点的场强方向均沿轴线向右，在圆心O_1、O_2处磁感应强度相等，大小都是



$$B_0=\frac{\mu_0 NI}{2R}+\frac{\mu_0 NIR^2}{2\left(R^2+R^2\right)^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0 NI}{2R}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=0.677\frac{\mu_0 NI}{R}$$

两线圈间轴线上中点P处，磁感应强度大小为

$$B_P=2\frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[R^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2\right]^{3/2}}=\frac{8\mu_0 NI}{5\sqrt{5}R}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

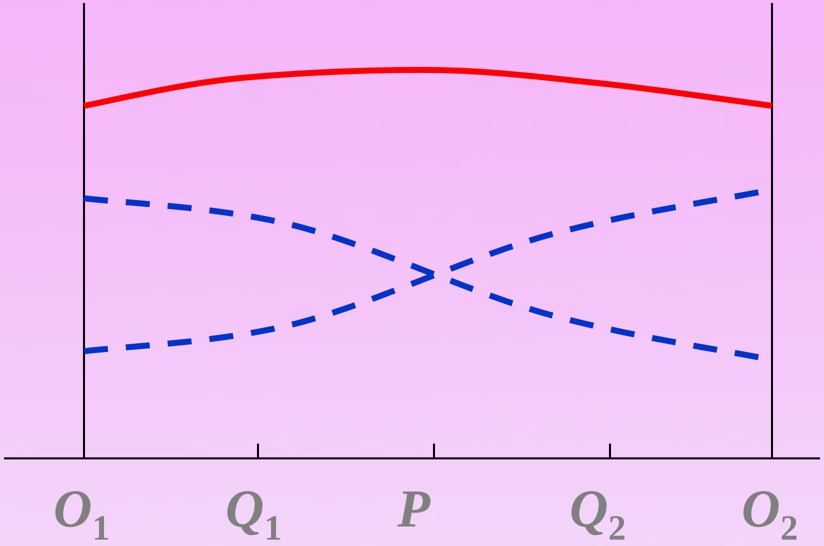
$$=0.716\frac{\mu_0 NI}{R}$$

此外，在P点两侧各R/4处的O_1、O_2 两点处磁感应强度都等于

$$B_Q=\frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[R^2+\left(\frac{R}{4}\right)^2\right]^{3/2}}+\frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[R^2+\left(\frac{3R}{4}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0 NI}{2R}\left(\frac{4^3}{17^{3/2}}+\frac{4^3}{5^3}\right)=0.712\frac{\mu_0 NI}{R}$$

在线圈轴线上其他各点，磁感应强度的量值都介乎B_0、B_P之间。由此可见，在P点附近轴线上的场强基本上是均匀的，其分布情况约如图所示。图中虚线是每个圆形载流线圈在轴线上所激发的场强分布，实线是代表两线圈所激发场强的叠加曲线。



例题8-5　在玻尔的氢原子模型中，电子绕原子核运动相当于一个圆电流，具有相应的磁矩，称为轨道磁矩。试求轨道磁矩μ与轨道角动量L之间的关系，并计算氢原子在基态时电子的轨道磁矩。

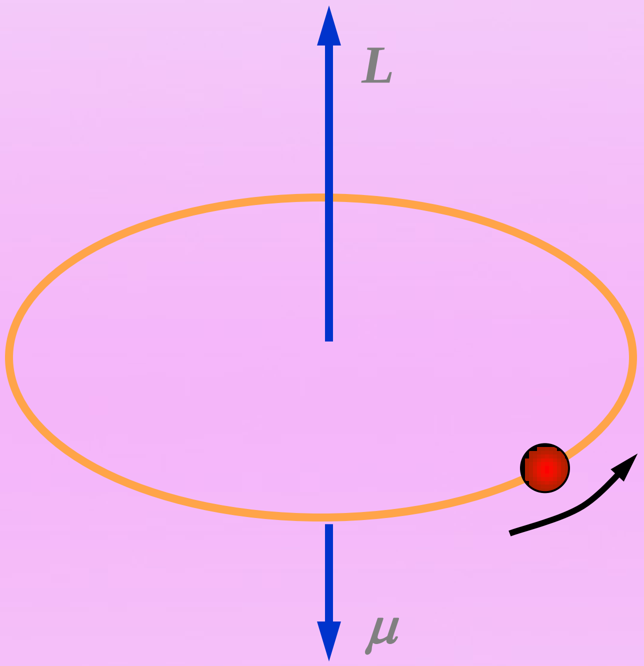
解 为简单起见，设电子绕核作匀速圆周运动，圆的半径为r，转速为n。电子的运动相当于一个圆电流，电流的量值为I=ne，圆电流的面积为S=π r^2，所以相应的磁矩为

$$\mu = IS = ne\pi r^2$$

$$L = m_e vr = m_e 2\pi rnr = 2m_e n\pi r^2$$

$$\mu = \frac{e}{2m_e}\vec{L}$$

角动量和磁矩的方向可分别按右手螺旋规则确定。因为电子运动方向与电流方向相反，所以L和 μ 的方向恰好相反，如图所示。上式关系写成矢量式为



$$\mu = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}$$

这一经典结论与量子理论导出的结果相符。由于电子的轨道角动量是满足量子化条件的，在玻尔理论中，其量值等于（h/2 π ）d的整数倍。所以氢原子在基态时，其轨道磁矩为

$$\mu_B = \frac{e}{2m_e}\left(\frac{h}{2\pi}\right) = \frac{eh}{4\pi m_e}$$

它是轨道磁矩的最小单位（称为玻尔磁子）。将e=1.602×10^{-19} C，m_e= 9.11×10^{-31}kg ，普朗克常量h= 6.626×10^{-34}J·s代入，可算得

$$\mu_B = 9.273\times10^{-24}\,A\cdot m^2$$

原子中的电子除沿轨道运动外，还有自旋，电子的自旋是一种量子现象，它有自己的磁矩和角动量，电子自旋磁矩的量值等于玻尔磁子。

$$\mu_B = \frac{e}{2m_e}\left(\frac{h}{2\pi}\right) = \frac{eh}{4\pi m_e}$$

它是轨道磁矩的最小单位（称为玻尔磁子）。将e=1.602×10^{-19} C，m_e= 9.11×10^{-31}kg ，普朗克常量h= 6.626×10^{-34}J·s代入，可算得

$$\mu_B = 9.273\times10^{-24}\,A\cdot m^2$$

原子中的电子除沿轨道运动外，还有自旋，电子的自旋是一种量子现象，它有自己的磁矩和角动量，电子自旋磁矩的量值等于玻尔磁子。