

第五章 微小型四旋翼无人直升机状态估计

§ 5.1 引言

通过前面几章的内容, 我们知道要实现微小型四旋翼无人直升机的自主飞行控制, 则必须首先获得动力学模型的状态变量。飞行器上的传感器包括四个光电码盘和一个微惯导单元 (MIMU), 通过这些传感器可以直接获得四个旋翼的转速、体坐标系下的线加速度以及体坐标系下的角速率。不能由传感器直接获得的状态量, 包括地面坐标系下的位置与速度以及欧拉角、欧拉角速度, 它们只能通过状态估计的方法获得。由于微小型四旋翼无人直升机的状态方程和量测方程均为非线性的, 需要设计一个非线性滤波器来实现系统状态估计。

解决非线性滤波问题的最优方案需要得到其条件后验概率的完整描述, 然而这种精确的描述需要无穷的参数, 这在实际中是无法实现的。为此人们提出了大量次优的近似方法, 主要有两大途径: 对高阶项实行忽略或逼近, 从而将非线性环节线性化; 通过采样方法近似非线性分布^[47]。

扩展卡尔曼滤波 (EKF) 就是通过对非线性函数的 Taylor 展开式进行一阶线性化截断, 从而将非线性问题线性化。但是这样就忽略了非线性函数的高阶导数项, 在很多实际应用当中会带来很大的偏差, 并且在局部线性化不成立的时候会产生不稳定的滤波。另外, EKF 需要计算 Jacobian 矩阵, 其推导复杂性使得许多应用非常困难^[48]。

为了突破 EKF 受到的限制, Julier 等人基于近似非线性函数的概率密度分布比近似非线性函数更容易的观点, 提出了 Sigma 点卡尔曼滤波 (SPKF) 算法^[49]。该算法利用统计线性化技术, 通过一组仔细选择的相关统计参量, 将非线性映射直接作用于各 Sigma 点, 根据映射后的点集重建统计参量, 然后根据新的统计参量重新选择 Sigma 点集并重复上述过程。这种方法可以在不必对非线性映射近似的情况下, 使一个随机变量的分布按非线性映射递推传播。根据 Sigma 点选取的不同, SPKF 又可分为 Unscented 卡尔曼滤波 (UKF)、中心差分卡尔曼滤波 (CDKF) 以及为减少运算开销和提高计算过程数值稳定性而导出的平方根形式 SR-UKF (Square Root UKF) 和 SR-CDKF。

本章首先介绍了 SR-UKF 算法, 然后讨论了 SR-UKF 算法在微小型四旋翼无人直升机状态估计中的应用, 最后给出了仿真结果。

§ 5.2 SR-UKF 滤波算法

SR-UKF 是 UKF 的平方根滤波形式。在 UKF 中, 为了构成 sigma 点集, 每次时间更新都要计算状态协方差矩阵的平方根, 这是计算开销最大的操作之一。为了提高效率, 增强状态协方差矩阵更新等计算过程中的数值稳定性, 导出了 UKF 的平方根形式^[49-51]。它

利用矩阵 QR 分解、矩阵 Cholesky 分解因数更新等强有力的线性代数技术，以 Cholesky 分解因数的形式直接传播和更新状态协方差矩阵的平方根。

§ 5.2.1 UT 变换

UT 变换是 SR-UKF 方法的核心和基础，它是一种计算随机变量经过非线性变换后统计特性的方法。具体的变换方法可用图 5.1 表示，在确保采样均值与协方差为 \bar{x} 和 P_{xx} 的前提下，选择一组点集（sigma 点集），将非线性变换应用于每个 sigma 点，得到非线性转换后的 \bar{y} 和 P_{yy} 就是变换后 sigma 点集的统计量^[52-54]。

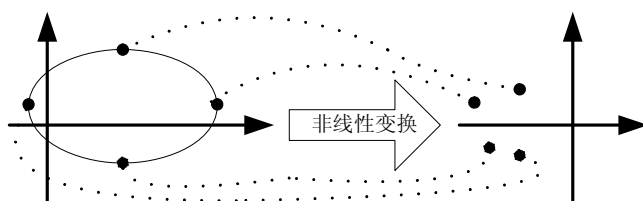


图 5.1 UT 变换原理

UT 变换算法中，最重要的是确定 sigma 点采样策略，也就是确定使用 sigma 点的个数、位置以及相应权值。目前，已有的采样策略有对称采样、单形采样、3 阶矩偏度采样以及高斯分布 4 阶矩对称采样等。本文将采用对称采样策略，下面给出基于该策略的 UT 变换算法框架。

设随机变量 x 经过非线性变换 $y = f(x)$ ，其中 x 的均值和方差分别为 \bar{x} 和 P_{xx} ，维数为 n ，则 y 的统计特性可以通过以下步骤得到：

1) 求取 sigma 点集

根据 \bar{x} 和 P_{xx} ，利用对称采样策略可得到 $2n+1$ 个 sigma 点，以及相对应的权值。

$$\chi_0 = \bar{x} \quad (5.1)$$

$$\chi_i = \bar{x} + (\sqrt{(n+\lambda)P_{xx}})_i, i = 1, \dots, n \quad (5.2)$$

$$\chi_i = \bar{x} - (\sqrt{(n+\lambda)P_{xx}})_i, i = n+1, \dots, 2n \quad (5.3)$$

$$w_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n+\lambda} \quad (5.4)$$

$$w_0^{(c)} = \frac{\lambda}{n+\lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) \quad (5.5)$$

$$w_i^{(m)} = w_i^{(c)} = \frac{1}{2(n+\lambda)}, i = 1, \dots, 2n \quad (5.6)$$

其中， $\lambda = \alpha^2(n+\kappa) - n$ ； α 决定 sigma 点围绕均值的散布，通常取一小正数（如： $1e-4 \leq \alpha \leq 1$ ）； κ 为比例因数，一般在状态估计时取 0； β 为另一比例因子，用来合并随机变量分布的先验知识（对于高斯分布，其最优值为 2）； $(\sqrt{(n+\lambda)P_{xx}})_i$ 是加权协方差矩阵的第 i 列。

2) 所采样的输入变量 σ 点集 $\{\chi_i\}$ 中的每个 σ 点进行 $f(\bullet)$ 非线性变换, 得到变换后的 σ 点集 $\{y_i\}$ 。

$$y_i = f(\chi_i), i = 0, \dots, 2n \quad (5.7)$$

3) 对变换后的变 σ 点集 $\{y_i\}$ 进行加权处理, 从而得到输出变量 y 的统计量 \bar{y} 和 P_{yy} 。

$$\bar{y} = \sum_{i=0}^{2n} w_i^{(m)} y_i \quad (5.8)$$

$$P_{yy} = \sum_{i=0}^{2n} w_i^{(c)} (y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})^T \quad (5.9)$$

§ 5.2.2 矩阵 QR 分解与 Cholesky 分解因数更新

在 SR-UKF 中, 需要应用矩阵 QR 分解与 Cholesky 分解因数更新, 下面分别给出两者的定义^[51,55-57]。

若矩阵 $P = AA^T$, 其中 $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $n > m$, 则可进行 QR 分解: $A^T = QR$, 记为 $qr\{A^T\}$ 。其中, $Q \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ 为正交矩阵, $R \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ 为上三角矩阵。由此可得 $P = R^T Q^T QR = R^T R$, 可见 R^T 即为 P 的 Cholesky 系数。

若已知矩阵 P 的 Cholesky 系数 R^T , 则称 $P \pm \sqrt{v}uu^T$ 的 Cholesky 系数为 P 的 Cholesky 系数一阶更新 (rank-one update), 记为 $cholupdate\{R^T, u, \pm v\}$ 。

§ 5.2.3 状态估计 SR-UKF 滤波算法

在卡尔曼滤波框架中, 对一步预测方程, 使用 UT 变换、矩阵 QR 分解和 Cholesky 系数一阶更新来处理均值和协方差的非线性传递, 就成为 SR-UKF 算法^[50-51]。

考虑系统方程中存在加性噪声的情况, 设系统模型为

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + v_k \quad (5.10)$$

$$y_k = h(x_k) + n_k \quad (5.11)$$

式中, $x_k \in \mathfrak{R}^n$ 为 k 时刻系统的 n 维状态向量, 它是不可观测的; $y_k \in \mathfrak{R}^m$ 为量测向量; u_k 为已知的外部输入; v_k 为零均值系统过程噪声, 是方差为 R_v 的 Gauss 白噪声; n_k 为零均值量测噪声, 是方差为 R_n 的 Gauss 白噪声。

状态估计 SR-UKF 的具体算法流程如下:

1) 状态初始化

$$\hat{x}_0 = E[x_0] \quad (5.12)$$

$$S_{x_0} = chol\{E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T]\} \quad (5.13)$$

$$S_v = \sqrt{R_v}, S_n = \sqrt{R_n} \quad (5.14)$$

2) 确定 σ 点集

$$\mathcal{X}_{k-1} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1} & \hat{x}_{k-1} + \gamma \mathcal{S}_{x_{k-1}} & \hat{x}_{k-1} - \gamma \mathcal{S}_{x_{k-1}} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

3) 时间更新

$$\mathcal{X}_{k|k-1}^* = f(\mathcal{X}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \quad (5.16)$$

$$\hat{x}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} w_i^{(m)} \mathcal{X}_{i,k|k-1}^* \quad (5.17)$$

$$\mathcal{S}_{x_k}^- = qr \left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{w_i^{(c)}} (\mathcal{X}_{1:2n,k|k-1}^* - \hat{x}_k^-) & \mathcal{S}_v \end{bmatrix} \right\} \quad (5.18)$$

$$\mathcal{S}_{x_k}^- = cholupdate \left\{ \mathcal{S}_{x_k}^-, \mathcal{X}_{0,k|k-1}^* - \hat{x}_k^-, w_0^{(c)} \right\} \quad (5.19)$$

$$\mathcal{X}_{k|k-1} = \begin{bmatrix} \hat{x}_k^- & \hat{x}_k^- + \gamma \mathcal{S}_{x_k}^- & \hat{x}_k^- - \gamma \mathcal{S}_{x_k}^- \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$y_{k|k-1} = h(\mathcal{X}_{k|k-1}) \quad (5.21)$$

$$\hat{y}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} w_i^{(m)} y_{i,k|k-1} \quad (5.22)$$

4) 测量更新

$$\mathcal{S}_{y_k}^- = qr \left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{w_i^{(c)}} (y_{1:2n,k|k-1} - \hat{y}_k^-) & \mathcal{S}_n \end{bmatrix} \right\} \quad (5.23)$$

$$\mathcal{S}_{y_k}^- = cholupdate \left\{ \mathcal{S}_{y_k}^-, y_{0,k|k-1} - \hat{y}_k^-, w_0^{(c)} \right\} \quad (5.24)$$

$$P_{x_k y_k} = \sum_{i=0}^{2n} w_i^{(c)} (\mathcal{X}_{i,k|k-1} - \hat{x}_k^-) (y_{i,k|k-1} - \hat{y}_k^-)^T \quad (5.25)$$

$$K_k = (P_{x_k y_k} / \mathcal{S}_{y_k}^{-T}) / \mathcal{S}_{x_k}^- \quad (5.26)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - \hat{y}_k^-) \quad (5.27)$$

$$U = K_k \mathcal{S}_{y_k}^- \quad (5.28)$$

$$\mathcal{S}_{x_k} = cholupdate \left\{ \mathcal{S}_{x_k}^-, U, -1 \right\} \quad (5.29)$$

5) $k = k + 1$, 转至第 2) 步。

其中, 比例系数 $\gamma = \sqrt{n + \lambda}$, y_k 为 k 时刻的量测向量, \hat{x}_k 与 \mathcal{S}_{x_k} 分别是 k 时刻的状态向量和协方差阵的估计值; 权值 $w_0^{(c)}$ 可能为负值, 因此 Cholesky 一阶更新 (5.19) 与 (5.24) 是必须的; σ 点重构 (5.20) 的目的是将过程噪声混合添加到 σ 点的非线性传递过程中去。

与标准的 UKF 算法相比, SR-UKF 具有两个明显的优点^[55]:

1) σ 点集的构成和不确定性的传播都只需要协方差矩阵的平方根, 而不再需要完整的协方差矩阵, 只存储和运算平方根因数可以降低计算负担, 获得更高的效率。

2) 协方差矩阵要有意义, 则它必须是非负定的, 而对于非线性系统而言, 并不能完全确保其非负定性。但是利用平方根得到的协方差矩阵一定是非负定的, 因此平方根形式

可以获得更稳定可靠的结果。

§ 5.3 微小型四旋翼无人直升机状态估计算法

SR-UKF 是基于模型的滤波方法, 因此必须首先建立系统状态方程与量测方程。微小型四旋翼无人直升机的状态方程即为第二章中的动力学方程, 而建立量测方程时除了动力学特性, 还需要考虑传感器的各种误差的影响。

基于微小型四旋翼无人直升机的状态方程与量测方程, 利用标准的 SR-UKF 算法可构建起系统的状态估计模块, 与前面几章的内容结合实现整个系统的闭环仿真。

§ 5.3.1 状态方程与量测方程

1、状态方程

为了满足第三、四章中所设计控制器的需要, 选取状态量为:

$$X_k = [\dot{x}_k \quad \dot{y}_k \quad \dot{z}_k \quad \dot{\phi}_k \quad \dot{\theta}_k \quad \dot{\psi}_k]^T \quad (5.30)$$

线速度状态方程就是第二章中给出的动力学模型, 但是与动力学模型状态变量不同, 这里需要对欧拉角速率进行估计。因此, 首先要建立欧拉角加速度的状态方程。

对式 (2.64) 求导, 可得:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \cos\phi \tan\theta + \sin\phi \sec^2\theta & -\sin\phi \tan\theta + \cos\phi \sec^2\theta \\ 0 & -\sin\phi & -\cos\phi \\ 0 & \cos\phi \sec\theta + \sin\phi \tan\theta \sec\theta & -\sin\phi \sec\theta + \cos\phi \tan\theta \sec\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi \sec\theta & \cos\phi \sec\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.31)$$

将式 (2.60)、(2.65) 代入 (5.31) 即可得欧拉角加速度状态方程。

设采样周期为 T , 采样点为 $kT, k=1, 2, \dots, n$, 则可将上述状态方程离散化为如下形式:

$$X_k = f(X_{k-1}, u_k) + v_k \quad (5.32)$$

其中, $u_k = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4]^T$ 将四个旋翼的转速作为外部输入, v_k 为 Gauss 白噪声, 且 $v_k \sim N(0_{6 \times 1}, R_v)$ 。

将状态量 X_k 积分, 可获得位置 $[x_k \quad y_k \quad z_k]^T$ 和欧拉角 $[\phi_k \quad \theta_k \quad \psi_k]^T$ 。

2、量测方程

微惯导单元 (MIMU) 可以测量飞行器体坐标系下的线加速度和角速率, 但是传感器量测值包含了多种误差, 主要包括: 器件本身制造缺陷引起的误差 (标度因数误差和不对称性误差)、安装误差 (交叉耦合误差)、漂移误差以及随机误差等。这些误差都必须通过状态估计的方法进行补偿与修正, 所以建立量测方程时必须将这些误差考虑在内^[21,58]。