1、带有未知扰动的不确定时变系统

$$x^{(n)} = f(x,\dot{x},\cdots,x^{(n-1)},w(t)) + b(t)u \tag{4.24}$$

其中， f,w,b 均为不确定函数，但 $0 < b_1 < b(t) < b_2$ 。若取 $b(t)$ 变化范围内的某一中间值 b_0，那么上式可以改写成：

$$x^{(n)} = f(x,\dot{x},\cdots,x^{(n-1)},w(t)) + (b(t)-b_0)u + b_0 u \tag{4.25}$$

这里可把 $(b(t)-b_0)u$ 当作新的“扰动”项。实际上，扩张状态观测器的输出 $z_{n+1}(t)$，当 $|b(t)-b_0|u$ 不甚大时，能较好地估计出实时作用量

$$a(t) = f(x,\dot{x},\cdots,x^{(n-1)},w(t)) + (b(t)-b_0)u \tag{4.26}$$

从而能用 $b_0 u$ 来实现自抗扰控制，即用 $z_{n+1}(t)/b_0$ 来实现对 $a(t)$ 的补偿。

2、多变量系统解耦控制

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = f_1\left(y_1,\dot{y}_1,y_2,\dot{y}_2,w_1(t)\right) + b_{11}(t)u_1 + b_{12}(t)u_2 \\ \ddot{y}_2 = f_2\left(y_1,\dot{y}_1,y_2,\dot{y}_2,w_2(t)\right) + b_{21}(t)u_1 + b_{22}(t)u_2 \end{cases} \tag{4.27}$$

式中， f_1,f_2 均为不确定函数， $w_1(t),w_2(t)$ 为未知外扰。令

$$\begin{cases} U_1 = b_{11}(t)u_1 + b_{12}(t)u_2 \\ U_2 = b_{21}(t)u_1 + b_{22}(t)u_2 \end{cases}, B(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

在此假定 $B(t)$ 可逆，如果 $B(t)$ 已知，那么 U_1 和 U_2 分别把

$$\begin{cases} a_1(t) = f_1\left(y_1,\dot{y}_1,y_2,\dot{y}_2,w_1(t)\right) \\ a_2(t) = f_2\left(y_1,\dot{y}_1,y_2,\dot{y}_2,w_2(t)\right) \end{cases} \tag{4.29}$$

当作各自的系统扰动而实现自抗扰控制，这样就能实现解耦控制。

如果 $B(t)$ 不确定，则在 $B(t)$ 的变化范围内区一可逆矩阵 B_0，并把 $\left(B(t)-B_0\right)\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ 当作系统新的外扰项。若矩阵 $B(t)-B_0$ 不甚大，那么就能用 U_1 和 U_2 分别实现各自通道的自抗扰控制，从而最终实现解耦控制。

§4.3 基于 ADRC 的飞行控制系统设计

ADRC 能够动态补偿系统模型扰动和外扰，鲁棒性很强，可应用于多种非线性系统的控制。到目前为止，ADRC 已在许多复杂的非线性控制问题中得到成功的应用，如：战斗机超机动飞行控制[40-41]、船舶减摇鳍控制[42]、某型导弹控制[43]等。

本节将针对微小型四旋翼无人直升机这样一个非线性、不确定性的耦合系统，利用 ADRC 理论设计飞行控制律。

§4.3.1 动力学模型

根据式（3.29）~（3.31）和（3.34），若认为偏航角ψ一直都很小，则可得进一步简化的微小型四旋翼无人直升机动力学模型[22]：

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{1}{m}U_1\sin\theta \\ \ddot{y} = \dfrac{1}{m}U_1\sin\phi \\ \ddot{z} = g - \cos\theta\cos\phi\dfrac{1}{m}U_1 \end{cases} \tag{4.30}$$

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = -\dfrac{J_{rotor}}{I_u}\Omega\dot{\theta} + \dfrac{I_v - I_w}{I_u}\dot{\theta}\dot{\psi} + \dfrac{l}{I_u}U_2 \\ \ddot{\theta} = \dfrac{J_{rotor}}{I_v}\Omega\dot{\phi} + \dfrac{I_w - I_u}{I_v}\dot{\phi}\dot{\psi} + \dfrac{l}{I_v}U_3 \\ \ddot{\psi} = \dfrac{I_u - I_v}{I_w}\dot{\phi}\dot{\theta} + \dfrac{1}{I_w}U_4 \end{cases} \tag{4.31}$$

上式中各变量的定义见本文§3.3.1。

§4.3.2 飞行控制系统设计及其稳定性分析

对于（4.30）~（4.31）这样一个欠驱动系统，其四个直接驱动通道都可以看成是带有未知扰动的不确定对象，根据§4.2.4 可知，能够利用 ADRC 方法对它们进行控制。此时，飞行器的姿态和高度可控，但系统还存在零动态，即飞行器在$x-y$平面内的位置不可控。由于俯仰、横滚转动分别会引起飞行器沿x、y方向运动，在 ADRC 的控制之下，飞行器将会在水平面内漂移。为此，采用 PD-ADRC 双闭环控制器，对飞行器在$x-y$平面内的位置进行控制，使其在空中悬停。

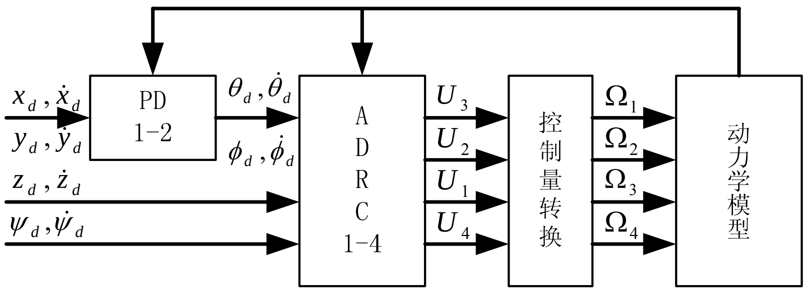

图 4.2 基于 ADRC 的飞行控制系统结构

基于 ADRC 的微小型四旋翼无人直升机控制系统如图 4.2，它可分为$x-\theta$、$y-\phi$、z和ψ四个通道，其中$x-\theta$和$y-\phi$采用 PD-ADRC 双闭环控制。ADRC 是一种不基于对象模型的控制方法，因而不需要针对具体的对象来分析控制系统的稳定性。由于本文已在§4.2.1 和§4.2.3 中对 ADRC 的稳定性进行了分析，这里只需要分析 PD-ADRC 双闭环控制

器的稳定性。

下面以 $x-\theta$ 通道为例，说明双闭环控制器的设计方法，并利用 Lyapunov 稳定性理论分析其稳定性[25,44]。

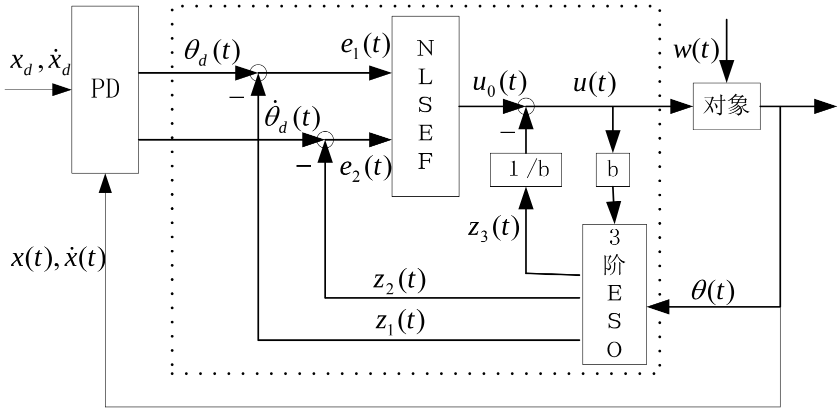

图 4.3 $x-\theta$ 通道 PD-ADRC 控制器

$x-\theta$ 双闭环控制器结构如图 4.3，内环采用 ADRC 控制算法，外环采用 PD 控制[22]。分析上述系统的稳定性时，为了简便，可以假设 $x_d=\dot{x}_d=0$、$m=l=I_v=1$。

外环 PD 控制器为：$\ddot{x}=-K_p x-K_d\dot{x}=-U_1\sin\theta$，从而

$$\theta_d=\arcsin\frac{K_p x+K_d\dot{x}}{U_1}=\arcsin(K_{p1}x+K_{d1}\dot{x}) \tag{4.32}$$

$$\dot{\theta}_d=\frac{K_{p1}\dot{x}+K_{d1}\ddot{x}}{\sqrt{1-K_{p1}^2x^2-2K_{p1}K_{d1}x\dot{x}-K_{d1}^2\dot{x}^2}} \tag{4.33}$$

根据§4.2.1 的内容，由式（4.3）、（4.4）和（4.23）可得：$\ddot{\theta}=bu_0=u_0$，即

$$\ddot{\theta}=\beta_1 fal(e_1,\alpha_1,\delta)+\beta_2 fal(e_2,\alpha_2,\delta) \tag{4.34}$$

其中，$e_1=\arcsin(K_{p1}x+K_{d1}\dot{x})-\theta$，$e_2=\dfrac{K_{p1}\dot{x}+K_{d1}\ddot{x}}{\sqrt{1-K_{p1}^2x^2-2K_{p1}K_{d1}x\dot{x}-K_{d1}^2\dot{x}^2}}-\dot{\theta}$，$fal(\bullet)$ 函数的定义见式（4.20），它与 e 同号。

针对空中悬停这一控制目标，可以取 x 轴方向上的动能：$L=\frac{1}{2}\dot{x}^2$ 为 Lyapunov 函数，则需要通过检验 L 沿（4.34）式的导数是否为负来判定平衡点的稳定性。

$$\dot{L}=\dot{x}\ddot{x}=-U_1\dot{x}\sin\theta \tag{4.35}$$

上式中，U_1 恒正，则只有当 $\dot{x}$ 与 θ 同号时，才有 $\dot{L}<0$。

当 $\dot{x}<0$ 时，有以下情况：

(1) $\theta<0 \quad\Rightarrow\quad \dot{L}<0$

(2) $\theta>0$，根据本文图 2.6 中的坐标系定义以及微小型四旋翼无人直升机的物理特性，必有 $\ddot{x}<0$。

① $\dot{\theta}<0 \quad\overset{t\to\infty}{\Rightarrow}\quad \theta<0 \quad\Rightarrow\quad \dot{L}<0$

② $\dot{\theta} > 0$

a) $x < 0$，则可得 $e_1 < 0, e_2 < 0$，从而由（4.34）有 $\ddot{\theta} < 0$，进一步推导可得

$$t \to \infty \quad \Rightarrow \quad \theta < 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{L} < 0$$

b) $x > 0$，则有 $\dot{x} < 0, \ddot{x} < 0 \quad \overset{t \to \infty}{\Rightarrow} \quad x < 0$，此时由 a)可得 $\dot{L} < 0$。

$\dot{x} > 0$ 的情况与上类似，因此式（4.35）中 $\dot{x}$ 与 θ 同号，从而 Lyapunov 函数 L 沿系统（4.34）的导数为负。因此，飞行器沿 x 轴方向上的动能将持续衰减至零，即有 $t \to \infty \Rightarrow \dot{x} \to 0$。

$y-\phi$ 通道控制器的情况与 $x-\theta$ 通道类似，这里不再赘述。

以上分析说明，在 PD-ADRC 控制之下，飞行器最终将悬停于 $x-y$ 平面内的某一位置，但最终悬停位置未知。这一问题将在§4.4.2 中，通过仿真实验进行检验和分析。

§4.3.3 ADRC 算法及其参数整定原则

根据§4.3.1，ADRC 的控制对象均为“二阶非线性不确定对象”。下面将针对二阶非线性不确定对象，阐述 ADRC 算法[31]，并给出其参数整定原则[45-46]。

被控对象：$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, w, t) + bu$， $y = x$

1、安排过渡过程(TD)

v_0 为设定植，

$$\begin{cases} v_1(k+1) = v_1(k) + hv_2(k) \\ v_2(k+1) = v_2(k) + hfst(v_1(k) - v_0, v_2, r, h_0) \end{cases} \tag{4.36}$$

2、估计状态总扰动(ESO)

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = z_1(k) - y(k) \\ z_1(k+1) = z_1(k) + h[z_2(k) - \beta_{01}\varepsilon_1] \\ z_2(k+1) = z_2(k) + h[z_3(k) - \beta_{02} fal(\varepsilon_1, \alpha_1, \delta) + bu(k)] \\ z_3(k+1) = z_3(k) - h\beta_{03} fal(\varepsilon_1, \alpha_2, \delta) \end{cases} \tag{4.37}$$

3、控制量的形成(NLSEF)

$e_1 = v_1(k) - z_1(k)$，

$e_2 = v_2(k) - z_2(k)$，

$u_0 = \beta_{01} fal(e_1, \alpha_1, \delta) + \beta_{02} fal(e_1, \alpha_2, \delta)$，

$$u(k) = u_0 - z_3(k)/b \tag{4.38}$$

其中，$fst(\bullet)$、$fal(\bullet)$ 的定义分别见式（4.13）和（4.20）。

该控制算法只需对象的输入输出数据 $u(k)$、$y(k)$。

ADRC 算法确定的情况下，其控制性能主要取决于参数的合理选取。ADRC 的模型算法中，需要设定的参数较多，必须要有一定的参数选取原则。对于二阶对象，ADRC 参数选取原则如下：

1、TD 参数整定

TD 的参数包括：快速因子 r 和滤波因子 h_0。

r 越大，跟踪速度越快，但噪声放大也越厉害；h_0 越大，滤波效果越好，但跟踪信号的相位损失也越大。为了获得较好的滤波效果，应协调调整 r 和 h_0。

2、ESO 参数整定

ESO 共有 α_1、α_2、δ、β_{01}、β_{02} 和 β_{03} 六个参数。

α_1 一般取 0.5，α_2 为 0.25，以便于实际系统实现。

δ 为 fal 函数的线性区间宽度，用来避免误差特性曲线在接近零点处的斜率过大，从而消除高频脉动的产生。实际系统中，一般取为 0.01 左右。

β_{01}、β_{02} 和 β_{03} 为状态误差反馈的反馈增益，主要影响 ESO 的收敛速度。参数越大对扰动估计的滞后越小，收敛越快。但如果取值过大，会出现观测器的震荡现象，对噪声的抑制作用也相对减弱。根据文献[45]，当控制周期 h 确定时，取 $\beta_{01} \approx \frac{1}{h}$，$\beta_{02} \approx \frac{1}{1.6h^{1.5}}$，$\beta_{03} \approx \frac{1}{8.6h^{2.2}}$，则 ESO 可以很好地估计 $v < \frac{1}{4h}$ 范围的扰动。

3、NLSEF 参数整定

由于扩张状态观测器对扰动的估计和补偿作用，在扰动幅值不很大、变化不很剧烈的情况下，完全可以实现精确补偿。所以可在假设扰动为零的情况下，对控制器的 β_1 和 β_2 进行初始值设定。其参数整定原则如下：

1) 根据 b_0 确定参数 β_1 和 β_2 的初始值。b_0 较大时，β_1 和 β_2 取较小值；b_0 较小时，β_1 和 β_2 取较大值。

2) 当 $b_0 < 100$ 时，可使 b_0 和 β_1 的乘积近似为 100;当 $b_0 > 100$ 时，可使 b_0 和 β_1 的乘积近似为 20。

3) 当 $\beta_1 > 1$ 时，β_1 近似为 β_2 的 10 倍;当 $\beta_1 < 1$ 时，β_1 近似为 β_2 的 1/l00。

按上述规律可初步调整出较好的控制效果。这里只给出一种方法，参数大小的其他组合方式也能达到类似的效果。

要获得更好的控制性能，还应根据具体对象进一步调整。在扰动幅值很大、变化很剧烈的情况下，扩张状态观测器不能完全实现精确补偿，还需对 β_1 和 β_2 进一步整定。

4) 适当增大参数 β_2，可以抑制过渡过程中出现的超调。

5) 适当增大参数 β_1，可以加快响应速度，缩短过渡过程。

对控制器参数的进一步整定只能在一定范围内改善控制性能，一般可作为微调使用。

§4.4 仿真结果与分析

自行设计、制作的原型样机的主要参数见表 3.1，我们针对它建了立了整个飞行控制