

§ 3.2.2 严格反馈系统

考虑如下形式的非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(x_1)x_2 + f_1(x_1) \\ \dot{x}_2 = g_2(x_1, x_2)x_3 + f_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})x_n + f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ \dot{x}_n = g_n(x_1, \dots, x_n)u + f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (3.3)$$

其中, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$ 为系统状态, $u \in R$ 为系统的控制输入, f_i 和 g_i 为光滑的非线性函数, 且 $g_i \neq 0$ 。因为 f_i 和 g_i 仅与反馈状态 x_1, \dots, x_i 有关, 而与 x_{i+1} 无关, 所以系统 (3.3) 称为“严格反馈系统”^[24]。

Backstepping 要求系统结构必须是严格反馈系统或可经过变换化为该种类型的非线性系统。

§ 3.2.3 Backstepping 算法及其稳定性证明

Backstepping 的设计思想是: 针对满足严格反馈控制结构的系统, 通过反向递推设计, 用系统化的方法同时构造 Lyapunov 函数和镇定控制器。基于 Backstepping 的控制器设计方法, 其基本思路是将复杂的系统分解成不超过系统阶数的子系统, 然后通过反向递推设计为每个子系统设计部分 Lyapunov 函数和中间虚拟控制量, 直至完成整个控制器的设计^[24]。

假设系统 (3.3) 的平衡点为原点, 即 $x = [0, \dots, 0]^T$, 其反馈控制器的 Backstepping 设计共有 n 个步骤。

➤ 第 1 步: 定义误差变量 $w_1 = x_1$, 则其导数为

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \dot{x}_1 \\ &= g_1 x_2 + f_1 \\ &= g_1 w_2 + g_1 \alpha_1 + f_{1s} \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中, $w_2 = x_2 - \alpha_1$ 为误差变量, α_1 是待定的虚拟控制作用, $f_{1s} = f_1$ 。

选取候选的 Lyapunov 函数 V_1 为

$$V_1 = \frac{1}{2} w_1^2 \quad (3.5)$$

则沿 (3.4) 式对时间的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= w_1 \dot{w}_1 \\ &= g_1 w_1 w_2 + w_1 (g_1 \alpha_1 + f_{1s}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

选取 α_1 为

$$\alpha_1 = -\frac{1}{g_1}(c_1 w_1 + f_{1s}) \quad (3.7)$$

其中, $c_1 > 0$ 为一个常数。将式 (3.7) 代入 (3.6), 得到

$$\dot{V}_1 = -c_1 w_1^2 + g_1 w_1 w_2 \quad (3.8)$$

考虑到闭环系统的全局稳定性, 耦合项 $g_1 w_1 w_2$ 将在下一步中消去。将式 (3.7) 代入 (3.4), 得到 (3.4) 的闭环形式为

$$\dot{w}_1 = -c_1 w_1 + g_1 w_2 \quad (3.9)$$

➤ 第 2 步: w_2 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{w}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 \\ &= g_2 x_3 + f_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(g_1 x_2 + f_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \\ &= g_2 w_3 + g_2 \alpha_2 + f_{2s} \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中, $w_3 = x_3 - \alpha_2$ 为误差变量, α_2 是待定的虚拟控制作用,

$$f_{2s} = f_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(g_1 x_2 + f_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial t}。$$

选取候选的 Lyapunov 函数 V_2 为

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} w_2^2 \quad (3.11)$$

则 V_2 沿 (3.10) 对时间的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + w_2 \dot{w}_2 \\ &= -c_1 w_1^2 + g_2 w_2 w_3 + w_2 (g_1 w_1 + g_2 \alpha_2 + f_{2s}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

选取 α_2 为

$$\alpha_2 = -\frac{1}{g_2}(c_2 w_2 + g_1 w_1 + f_{2s}) \quad (3.13)$$

其中, $c_2 > 0$ 为一个常数。将式 (3.13) 代入 (3.12), 得到

$$\dot{V}_2 = -c_1 w_1^2 - c_2 w_2^2 + g_2 w_2 w_3 \quad (3.14)$$

其中, 耦合项 $g_2 w_2 w_3$ 将在下一步中消去。将式 (3.13) 代入式 (3.10), 得到 (3.10) 的闭环形式为

$$\dot{w}_2 = -c_2 w_2 - g_1 w_1 + g_2 w_3 \quad (3.15)$$

➤ 第 i 步: w_i 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{w}_i &= \dot{x}_i - \dot{\alpha}_{i-1} \\ &= g_i x_{i+1} + f_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k}(g_k x_{k+1} + f_k) - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial t} \\ &= g_i x_{i+1} + g_i \alpha_i + f_{is} \end{aligned} \quad (3.16)$$

其中, $w_{i+1} = x_{i+1} - \alpha_i$ 为误差变量, α_i 是待定的虚拟控制作用,

$$f_{is} = f_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} (g_k x_{x+1} + f_k) - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial t}.$$

选取候选的 Lyapunov 函数 V_i 为

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} w_i^2 \quad (3.17)$$

则 V_i 沿式 (3.16) 对时间的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= \dot{V}_{i-1} + w_i \dot{w}_i \\ &= -\sum_{k=1}^{i-1} c_k w_k^2 + g_{i-1} w_{i-1} w_i + w_i (g_i w_{i+1} + g_i \alpha_i + f_{is}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

选取 α_i 为

$$\alpha_i = -\frac{1}{g_i} (c_i w_i + g_i w_{i+1} + f_{is}) \quad (3.19)$$

其中, $c_i > 0$ 为一个常数。将式 (3.19) 代入 (3.18), 得到

$$\dot{V}_i = -\sum_{k=1}^i c_k w_k^2 + g_i w_i w_{i+1} \quad (3.20)$$

其中, 耦合项 $g_i w_i w_{i+1}$ 将在下一步中消去。将式 (3.19) 代入式 (3.16), 得到 (3.16) 的闭环形式为

$$\dot{w}_i = -c_i w_i - g_{i-1} w_{i-1} + g_i w_{i+1} \quad (3.21)$$

➤ 第 n 步: w_n 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{w}_n &= \dot{x}_n - \dot{\alpha}_{n-1} \\ &= g_n u + f_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} (g_k x_{x+1} + f_k) - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial t} \\ &= g_n u + f_{ns} \end{aligned} \quad (3.22)$$

其中, $f_{ns} = f_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} (g_k x_{x+1} + f_k) - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial t}$ 。

选取候选的 Lyapunov 函数 V_n 为

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} w_n^2 \quad (3.23)$$

则 V_n 沿式 (3.22) 对时间的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \dot{V}_{n-1} + w_n \dot{w}_n \\ &= -\sum_{k=1}^{n-1} c_k w_k^2 + w_n (g_{n-1} w_{n-1} + g_n u + f_{ns}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

选取控制器 u 为

$$u = -\frac{1}{g_n} (c_n w_n + g_{n-1} w_{n-1} + f_{ns}) \quad (3.25)$$

其中, $c_n > 0$ 为一个常数。将式 (3.25) 带入 (3.24), 得到

$$\dot{V}_n = -\sum_{k=1}^n c_k w_k^2 \quad (3.26)$$

将式 (3.25) 带入式 (3.22), 得到 (3.22) 的闭环形式为

$$\dot{w}_n = -c_n w_n - g_{n-1} w_{n-1} + g_n u \quad (3.27)$$

根据以上的反向递推过程, 可以得到闭环误差系统为

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = -c_1 w_1 + g_1 w_2 \\ \dot{w}_i = -c_i w_i - g_{i-1} w_{i-1} + g_i w_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1 \\ \dot{w}_n = -c_n w_n - g_{n-1} w_{n-1} + g_n u \end{cases} \quad (3.28)$$

系统 (3.3) 在控制器 (3.25) 的控制之下, 构成闭环系统 (3.28); Lyapunov 函数 (3.23) 沿误差系统 (3.28) 的导数为 (3.26)。根据定理 3-1, 容易证明: 闭环误差系统 (3.28) 的平衡点 $w = 0$ 是全局渐近稳定的。

§ 3.3 基于 Backstepping 的飞行控制系统设计

本节首先对第二章的动力学模型进行简化, 然后根据系统特性进行了整个控制系统的设计, 最后利用 Backstepping 方法设计了控制器。

§ 3.3.1 动力学模型

微小型四旋翼无人直升机完整的数学模型见式 (2.69) ~ (2.71)。本文所研究的是在室内或室外无风条件下, 微小型四旋翼无人直升机悬停或慢速飞行控制, 即考虑飞行器姿态变化很小的情况。在第二章的建模假设基础之上, 可以进一步作如下假设:

- 忽略旋翼中心至机体质心的垂直距离;
- 忽略风的干扰, 不计空气摩擦阻力;
- 根据式 (2.60), 认为欧拉角速率等于体坐标系下角速率;
- 不考虑旋翼挥舞, 认为它只受到与其转速的平方成正比的升力和反扭力矩作用;
- 认为旋翼质量很轻, 不考虑其转动惯量矩。

另外, 为了简化问题, 可以将动力系统模型从整个系统动力学模型中分离出去, 即直接将旋翼转速当作系统动力学模型的输入。

根据以上假设, 可以得到简化的动力学模型如下:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \frac{1}{m} U_1 \\ \ddot{y} = -(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \frac{1}{m} U_1 \\ \ddot{z} = g - (\cos \phi \cos \theta) \frac{1}{m} U_1 \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\begin{cases} \ddot{\psi} = \dot{\phi}\dot{\theta}\left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right) + \frac{1}{I_z}U_4 \\ \ddot{\theta} = \dot{\phi}\dot{\psi}\left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right) + \frac{J_{rotor}}{I_y}\dot{\phi}\dot{\Omega} + \frac{l}{I_y}U_3 \\ \ddot{\phi} = \dot{\theta}\dot{\psi}\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) - \frac{J_{rotor}}{I_x}\dot{\theta}\dot{\Omega} + \frac{l}{I_x}U_2 \end{cases} \quad (3.30)$$

其中, $\Omega_1 \sim \Omega_4$ 分别为四个旋翼的转速, $U_1 \sim U_4$ 为系统控制量, 且有:

$$\begin{cases} U_1 = k_t(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ U_2 = k_t(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\ U_3 = k_t(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \\ U_4 = k_d(\Omega_1^2 + \Omega_3^2 - \Omega_2^2 - \Omega_4^2) \\ \Omega = \Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4 \end{cases} \quad (3.31)$$

式 (3.30) 右边第一项为机体陀螺效应, 第二项为旋翼陀螺效应, 第三项为旋翼空气动力学效应 (包括升力和阻力矩)。

另外, 依据本文 § 2.2 中微小型四旋翼无人直升机的机体构造与飞行原理有: U_1 为 z 轴方向线运动控制量; U_2 为横滚姿态 ϕ 和 y 轴方向线运动控制量; U_3 为俯仰姿态 θ 和 x 轴方向线运动控制量; U_4 为偏航姿态 ψ 控制量。

§ 3.3.2 飞行控制系统设计

根据微小型四旋翼无人直升机的动力学模型 (3.29) ~ (3.30), 它有 6 个自由度, 而只有 4 个控制输入, 因此对其研究可归结为欠驱动控制问题。

对于微小型四旋翼无人直升机, 其飞行控制系统设计的难点在于 x 、 y 两个自由度是欠驱动的, 分别由 θ 和 ϕ 间接驱动, 即必须要有俯仰/横滚转动, 才能引起 x/y 轴向上的平动。对于这样的系统, 通常采用 Backstepping 设计光滑时变反馈控制律, 其优点是控制律光滑, 便于实现, 可保证系统渐进稳定; 缺点是所设计的控制律一般比较复杂。

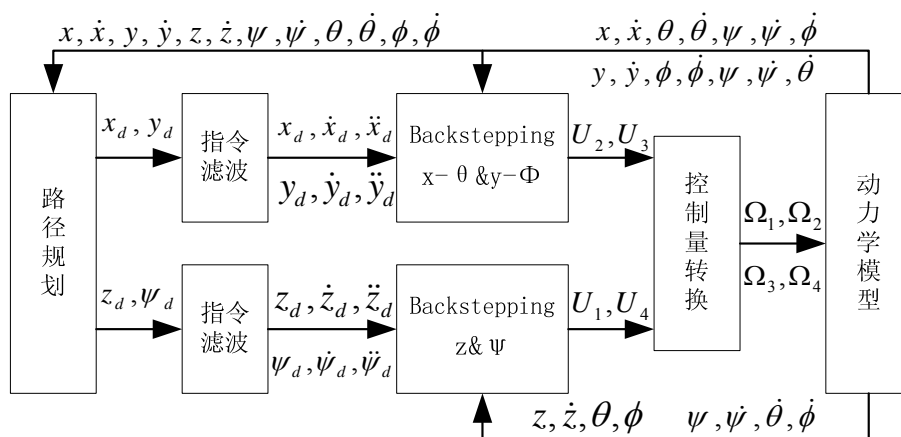


图 3.1 微小型四旋翼无人直升机控制系统结构