

$$V_t = \Omega r + \mu \Omega R \sin \psi \quad (2.20)$$

这里只考虑轴向和周向气流对旋翼空气动力特性的影响，忽略了径向气流的影响。因此，叶素受到两个基元力的作用，基元升力 ΔL 与基元后向力 ΔD ，其方向分别为垂直和平行于来流方向，其大小分别为^[13]：

$$\Delta L = qcC_l \Delta r \quad (2.21)$$

$$\Delta D = qcC_d \Delta r \quad (2.22)$$

其中， q 为气压， C_l 与 C_d 分别是叶素的基元升力系数和基元后向力系数，它们分别与迎角 α 和雷诺数 RN 有以下关系

$$q = \frac{1}{2} \rho V_t^2 \quad (2.23)$$

$$C_l = a\alpha = a(\theta - \phi) \approx a\left(\theta - \frac{V_p}{V_t}\right) \quad (2.24)$$

$$C_d = \frac{0.144}{(RN)^{1/5}} \quad (2.25)$$

其中， a 为常数， RN 为雷诺数。

另外，位于桨叶不同径向位置 r 处的叶素，其弦长 c 和基元后向力系数 C_d 不同，但是对于整个桨叶来讲，若取其平均值 \bar{c} 和 \bar{C}_d ，则仍可将它们视为常数。在此基础上，将基元升力 ΔL 与基元后向力 ΔD 投影到叶素坐标系，可得到基元拉力 ΔF_y 与基元阻力 ΔF_x 。

$$\begin{aligned} \Delta F_y &= \Delta L \cos \phi - \Delta D \sin \phi \\ &= \frac{1}{2} \rho V_t^2 a \left(\theta - \frac{V_p}{V_t}\right) \bar{c} \Delta r \cos \phi - \frac{1}{2} \rho V_t^2 \bar{C}_d \bar{c} \Delta r \sin \phi \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \Delta F_x &= \Delta L \sin \phi - \Delta D \cos \phi \\ &= \frac{1}{2} \rho V_t^2 a \left(\theta - \frac{V_p}{V_t}\right) \bar{c} \Delta r \sin \phi - \frac{1}{2} \rho V_t^2 \bar{C}_d \bar{c} \Delta r \cos \phi \end{aligned} \quad (2.27)$$

将基元拉力 ΔF_y 沿桨叶积分，并取其对方位角 ψ 的平均值，再乘以桨叶片数即得到整个旋翼产生的拉力 T 。由于来流角 ϕ 很小，而且基元升力 ΔL 比基元后向力 ΔD 大一个数量级，这里可近似认为基元升力 ΔL 的大小等于基元拉力 ΔF_y ，基元后向力 ΔD 的大小就等于基元阻力 ΔF_x 。

$$\begin{aligned} T = F_y &\approx \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\Delta L}{\Delta r} dr d\psi \\ &= \frac{N\rho a \bar{c}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R (V_t^2 \theta - V_p V_t) dr d\psi \\ &= N\rho a \bar{c} (\Omega R)^2 R \left(\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \mu^2\right) \theta - \frac{1}{4} \lambda \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

与此类似，可以通过积分获得旋翼的阻力 D 、扭矩 Q 和侧倾力矩 L 的表达式：

$$\begin{aligned}
D = F_x &= \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\frac{\Delta D}{\Delta r} + \frac{\Delta L}{\Delta r} \frac{V_p}{V_t} \right) \sin \psi \, dr \, d\psi \\
&= N\rho a \bar{c} (\Omega R)^2 R \left(\frac{1}{4a} \mu \bar{C}_d + \frac{1}{4} \lambda \mu \theta \right)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\frac{\Delta D}{\Delta r} + \frac{\Delta L}{\Delta r} \frac{V_p}{V_t} \right) r \, dr \, d\psi \\
&= N\rho a \bar{c} (\Omega R)^2 R \left(\frac{1}{8a} (1 + \mu^2) \bar{C}_d + \lambda \left(\frac{1}{6} \theta - \frac{1}{4} \lambda \right) \right)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}
L &= -\frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\Delta L}{\Delta r} r \sin \psi \, dr \, d\psi \\
&= N\rho a \bar{c} (\Omega R)^2 R \left(\mu \left(\frac{1}{6} \theta - \frac{1}{8} \lambda \right) \right)
\end{aligned} \tag{2.31}$$

至此，我们可以获得相关的空气动力学系数为：

$$\frac{C_T}{2\sigma a} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \mu^2 \right) \theta - \frac{1}{4} \lambda \tag{2.32}$$

$$\frac{C_D}{2\sigma a} = \frac{1}{4a} \mu \bar{C}_d + \frac{1}{4} \lambda \mu \theta \tag{2.33}$$

$$\frac{C_Q}{2\sigma a} = \frac{1}{8a} (1 + \mu^2) \bar{C}_d + \lambda \left(\frac{1}{6} \theta - \frac{1}{4} \lambda \right) \tag{2.34}$$

$$\frac{C_L}{2\sigma a} = \mu \left(\frac{1}{6} \theta - \frac{1}{8} \lambda \right) \tag{2.35}$$

其中， $\sigma = \frac{N\bar{c}}{\pi R}$ 为旋翼实度。

由式 (2.5) ~ (2.8) 以及式 (2.32) ~ (2.35)，可以看出旋翼的空气动力和力矩均与其转速的平方成正比。比例系数与旋翼的几何特性有关，并随飞行状态而改变。

特别地，当飞行器悬停时，飞行速度 $V_0 = 0$ ，即 $\mu = 0$ ；另外，由于此时的 v_1 远小于 ΩR ，还可以认为 $\lambda \approx 0$ ^[13]。因此，根据式 (2.19) ~ (2.20) 有 $V_p = 0$ ， $V_t = \Omega r$ 。据此，可得悬停时的空气动力学系数为：

$$\frac{C_T}{2\sigma a} = \frac{\theta}{6} \tag{2.36}$$

$$\frac{C_Q}{2\sigma a} = \frac{\bar{C}_d}{8a} \tag{2.37}$$

$$C_D = C_L = 0 \tag{2.38}$$

当微小型四旋翼飞行器处于悬停或近似悬停状态时，可以认为其旋翼只受到升力 T 和反扭力矩 Q 的作用，它们都与旋翼转速的平方成正比，且比例系数均为常数，可分别表示为 k_t 和 k_d 。

§ 2.4 动力系统模型

微小型四旋翼无人直升机的动力系统主要包括：直流电机、减速箱和旋翼三部分。根据电机轴上的动量定理和电枢回路中的电压平衡方程^[14]，建立动力系统的模型如下：

$$J_{total} \dot{\omega}_{motor} = K_M I - M_{drag} \quad (2.39)$$

$$V = IR + K_E \omega_{motor} \quad (2.40)$$

其中， J_{total} 是整个动力系统绕电机轴的转动惯量， ω_{motor} 是电机转速， K_M 为电机转矩常数， M_{drag} 是电机负载转矩， V 是电机输入电压， I 为电枢电流， K_E 则是反电动势常数。

可以简单地认为 J_{total} 由两部分组成，包括电机转子惯量 J_R 和减速箱、旋翼绕电机轴的转动惯量 $J_{rotor \rightarrow motor}$ ，即：

$$J_{total} = J_R + J_{rotor \rightarrow motor} \quad (2.41)$$

另外，动力系统将电能转化为机械能，根据能量守恒有：

$$J_{rotor} \omega_{rotor}^2 = \eta J_{rotor \rightarrow motor} \omega_{motor}^2 \quad (2.42)$$

其中， η 为动力系统的传动效率。

根据(2.41)~(2.42)，可得动力系统绕电机轴的转动惯量为：

$$J_{total} = J_R + \frac{J_{rotor}}{\eta \tau^2} \quad (2.43)$$

其中， $\tau = \frac{\omega_{motor}}{\omega_{rotor}}$ 为减速箱的减速比。

电机轴上输出的机械能绝大部分转化为旋翼与空气摩擦所产生的热能，另外，还有一小部分转化为机械零件摩擦所消耗的热能。根据能量守恒有：

$$\begin{aligned} \eta M_{drag} \theta_1 &= M_{rotor} \theta_2 \\ M_{drag} &= \frac{M_{rotor} \theta_2}{\eta \theta_1} = \frac{M_{rotor}}{\eta \tau} \end{aligned} \quad (2.44)$$

M_{rotor} 是旋翼受到的反扭力矩，根据本文2.3.2节可知，它与旋翼转速的平方成正比。为了便于推导，这里假设比例系数为 k_d ，则式(2.44)可进一步简化为：

$$M_{drag} = \frac{k_d \omega_{rotor}^2}{\eta \tau} = \frac{k_d \omega_{motor}^2}{\eta \tau^3} \quad (2.45)$$

至此，可以通过以上推导获得动力系统的动力学方程

$$J_{total} \dot{\omega}_{motor} = K_M \left(\frac{V - K_E \omega_{motor}}{R} \right) - \frac{k_d \omega_{motor}^2}{\eta \tau^3} \quad (2.46)$$

也可以表示为：

$$\dot{\omega}_{rotor} = -\frac{k_d}{J_{total} \eta \tau^2} \omega_{rotor}^2 - \frac{K_M K_E}{J_{total} R} \omega_{rotor} + \frac{K_M}{J_{total} R \tau} V \quad (2.47)$$

§ 2.5 微小型四旋翼无人直升机动力学

在忽略弹性振动及形变的情况下，微小型四旋翼无人直升机的运动可以看成是六个自由度的刚体运动，即包含绕三个轴的转动（偏航、俯仰和滚动）和重心沿三个轴的线运动（进退、左右侧飞和升降）。

选用体坐标系描述机体的运动，其定义如图 2.6 所示，坐标原点与机体重心重合，并规定机体俯仰抬头时为正。按照旋转方向，四个旋翼可分为逆时针（1，3）和顺时针（2，4）两组。

根据质心运动定理和欧拉动力学方程^[15]，建立微小型四旋翼无人直升机机体坐标系下三轴力的动平衡方程式和绕三轴的力矩平衡方程式如下：

$$m\left(\frac{du}{dt} + wq - vr\right) = \sum F_{x_b} \quad (2.48)$$

$$m\left(\frac{dv}{dt} + ur - wq\right) = \sum F_{y_b} \quad (2.49)$$

$$m\left(\frac{dw}{dt} + vp - uq\right) = \sum F_{z_b} \quad (2.50)$$

$$I_{x_b} \frac{dp}{dt} - (I_{y_b} - I_{z_b})qr = \sum M_{x_b} \quad (2.51)$$

$$I_{y_b} \frac{dq}{dt} - (I_{z_b} - I_{x_b})rp = \sum M_{y_b} \quad (2.52)$$

$$I_{z_b} \frac{dr}{dt} - (I_{x_b} - I_{y_b})pq = \sum M_{z_b} \quad (2.53)$$

其中， $\sum F_{x_b}$ ， $\sum F_{y_b}$ ， $\sum F_{z_b}$ 为机体坐标系中沿三个轴向的合外力； $\sum M_{x_b}$ ， $\sum M_{y_b}$ ， $\sum M_{z_b}$ 为机体坐标系中绕三个轴向的合外力矩； u ， v ， w 为体坐标系下沿三轴向的线速度； p ， q ， r 为体坐标系下绕三轴的转动角速率； ψ ， θ ， ϕ 是三个欧拉角，即偏航、俯仰和滚动角。 I_x ， I_y ， I_z 为轴向惯性主矩，近似认为微小型四旋翼无人直升机相对 $x_b o_b z_b$ 平面和 $y_b o_b z_b$ 对称，故惯量积

$$I_{x_b y_b} = I_{y_b z_b} = I_{z_b x_b} = 0 \quad (2.54)$$

因此，式（2.51）~（2.53）中不含 $I_{x_b y_b}$ 、 $I_{y_b z_b}$ 和 $I_{z_b x_b}$ 。

作用于微小型四旋翼无人直升机上的空气动力、力矩如图 2.6 所示，图中采用的是机体坐标系。除此之外，还应考虑旋翼的转动惯量矩和陀螺效应，下面以旋翼 1 为例进行分析（旋翼 2、3 和 4 的情况与之类似）。旋翼 1 的旋转方向为逆时针，因此有：

$$M_{m1} = -J_{rotor} \dot{\omega}_1 \bar{z}_b \quad (2.55)$$

$$\tau_{gx_b1} = \bar{q} \times J_{rotor} \bar{\omega}_1 = -J_{rotor} q \omega_1 \bar{x}_b \quad (2.56)$$

$$\tau_{gy_b1} = \bar{p} \times J_{rotor} \bar{\omega}_1 = J_{rotor} p \omega_1 \bar{y}_b \quad (2.57)$$

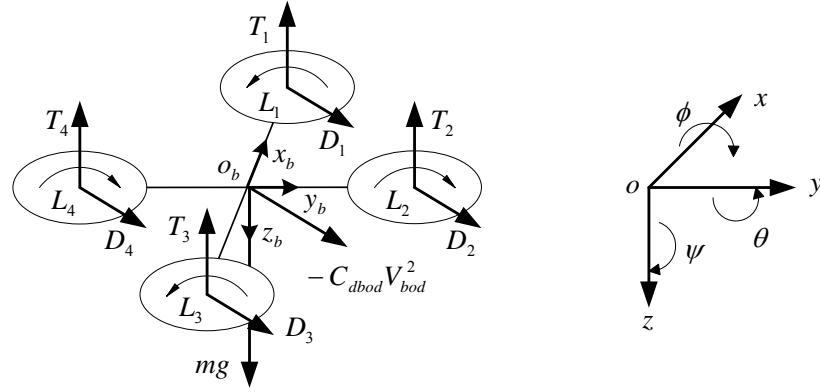


图 2.6 微小型四旋翼直升机的空气动力和力矩

根据以上分析，微小型四旋翼无人直升机受到的合外力、力矩分别为：

$$F_{tot} = -C_{dbod} V_{bod}^2 (\bar{x}_v \quad \bar{y}_v \quad \bar{z}_v) + mg \bar{z} + \sum_{i=1}^4 [-T_i \bar{z}_b - D_i (\bar{x}_v \quad \bar{y}_v)] \quad (2.58)$$

$$M_{tot} = (T_4 - T_2) l \bar{x}_b + (T_1 - T_3) l \bar{y}_b + \sum_{i=1}^4 [Q_i \bar{z}_b + L_i (\bar{x}_v \quad \bar{y}_v) + D_i h (-\bar{y}_v \quad \bar{x}_v) + \tau_{gx_i} \bar{x}_b + \tau_{gy_i} \bar{y}_b + M_{mi} \bar{z}_b] \quad (2.59)$$

其中， l 与 h 分别是旋翼中心到机体重心的纵向距离和垂直距离， $(\bar{x}_v \quad \bar{y}_v \quad \bar{z}_v)$ 表示体坐标系下的飞行速度方向， $(\bar{x}_v \quad \bar{y}_v)$ 表示 $x_b o_b y_b$ 平面内的飞行速度方向， C_{dbod} 为机体与空气的摩擦阻力系数。

欧拉角与体坐标系下角速度之间有如下关系^[16]：

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

也可以写成：

$$\begin{cases} \dot{\phi} = p + p \sin \phi \tan \theta + r \cos \phi \tan \theta \\ \dot{\theta} = q \cos \phi - r \sin \phi \\ \dot{\psi} = q \sin \phi \sec \theta + r \cos \phi \sec \theta \end{cases} \quad (2.61)$$

另外，机体坐标系到地面坐标系的旋转矩阵为^[16]

$$R = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \sin \theta \sin \phi & \sin \psi \sin \phi + \cos \psi \sin \theta \cos \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \theta \sin \phi & -\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

综合 (2.47)、(2.48) ~ (2.53)、(2.58) ~ (2.59) 以及 (2.61) ~ (2.62)，得到微小型四旋翼无人直升机的全状态非线性方程如下：