

## 第二章 微小型四旋翼无人直升机建模

### § 2.1 引言

本章的研究目的是通过数学方法对微小型四旋翼无人直升机进行建模。首先，简要介绍微小型四旋翼无人直升机的机体构造与飞行原理；其次，在详细分析旋翼和桨叶的相对气流的基础之上，应用叶素理论和动量法对旋翼空气动力学进行分析，得到了旋翼空气动力学模型；再次，建立了动力系统的数学模型；最后，对微小型四旋翼无人直升机的动力学模型进行研究，得到了具有仿射非线性方程形式的模型。

### § 2.2 机体构造与飞行原理

国防科技大学机器人实验室于 2004 年开展了微小型四旋翼无人直升机的相关技术研究，自行设计、制作的原型样机如图 2.1(a)。该原型机总重约 750g，最大长度约 70cm，可依靠旋翼升力离地起飞；机身由两支等长空心铝竿正交安装构成；动力设备采用了 Draganflyer III 旋翼、瑞士 Maxon 电机 (RE-max 21) 以及自行设计的齿轮减速装置 (减速比为 6: 1)；机载传感器包括：日本 Murata 单轴陀螺仪 ENV-05G，美国 Analog 双轴加速度计 ADXL202，美国 Honeywell 三轴电子罗盘 HMR3300 以及江苏吴江企诚光电码盘 HS-302。目前，我们已经基本完成了控制系统硬件部分的开发和测试，并正在着手于微惯性测量单元(MIMU)的开发，如图 2.1(b)。



图 2.1 国防科大机器人实验室的微小型四旋翼飞行器

从图 2.1(a)可以看到，四只旋翼分别安装于正方形机体的四个顶点位置，分为顺时针和逆时针两组，位于同一对角线上的两只旋翼同组。由于旋翼攻角固定，只能通过控制四只旋翼的转速来实现飞行器的飞行控制。悬停时，四只旋翼的转速相等，以相互抵消反扭力矩；同时等量地增大/减小四只旋翼的转速，会引起上升/下降运动；增大某一只旋翼的转速的同时，等量地减小同组另一只旋翼的转速，则可以产生俯仰/横滚转动；增大某一组

旋翼的转速，而等量减小另一组旋翼的转速，将产生偏航运动。

## § 2.3 旋翼空气动力学

建立微小型四旋翼无人直升机的数学模型，关键在于准确建立其旋翼空气动力学模型。与固定翼飞行器相比，旋翼飞行器的气动环境要复杂得多，其气动力在本质上是非线性性和非定常的<sup>[11-13]</sup>，要准确建立其数学模型是具有相当难度的。目前经常采用的研究旋翼气动特性的方法有：动量理论、叶素理论、涡流理论以及其他新兴流体力学方法、流场计算方法，比如：Euler 或 NS 方程等<sup>[12]</sup>。

本节将首先分析微小型四旋翼无人直升机的旋翼、桨叶的相对气流，然后利用动量理论和叶素理论分析、计算获得旋翼受到的空气动力和力矩。

### § 2.3.1 旋翼和桨叶的相对气流

旋翼飞行器在垂直飞行时，远处相对来流沿旋翼的旋转轴方向，即旋翼处于轴流状态；前进飞行时，远处来流方向与旋翼轴不平行，是斜向吹来，此时旋翼处于斜流状态。在不同状态下，旋翼的空气动力学特性有较大差别。

#### 1、旋翼的相对气流

下面，首先分析整个旋翼的相对气流。

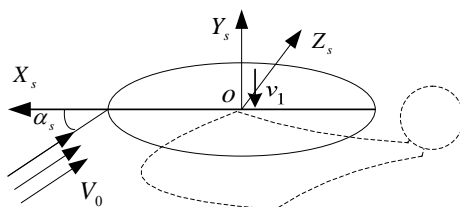


图 2.1 旋翼的相对气流

假设旋翼式飞行器的飞行速度为  $V_0$ ，也可以认为是速度为  $V_0$  的来流从一定方向吹向旋翼。如图 2.1 所示，来流与旋翼的构造旋转平面（ $S-S$  平面）之间的夹角，即旋翼构造迎角为  $\alpha_s$ 。这里所使用的坐标系是旋翼构造轴系，坐标原点 ( $O$ ) 位于旋翼中心，竖轴 ( $OY_s$ ) 沿旋翼的构造旋转轴，向上为正。纵轴 ( $OX_s$ ) 指向前方，与速度  $V_0$  在  $S-S$  平面的投影重合。

将相对气流速度  $V_0$  分解为沿  $X_s$ 、 $Y_s$  轴两个方向的分量，并将它们除以桨尖旋转速度  $\Omega R$ ，可得到表征旋翼工作状态的两个重要的速度系数：

$$\mu = \frac{V_0 \cos \alpha_s}{\Omega R} \quad (2.1)$$

$$\lambda = \frac{v_1 - V_0 \sin \alpha_s}{\Omega R} \quad (2.2)$$

其中， $\mu$  为平行于  $S-S$  平面的速度系数，称为前进比； $\lambda$  为垂直于  $S-S$  平面的速度

系数，成为流入比； $v_1$  为  $S-S$  平面处的轴向诱导速度。

## 2、 桨叶的相对气流

在轴流状态，桨叶的周向分量只是由桨叶旋转造成的，因而分布规律为  $\Omega r$ ，即沿径向位置呈三角形分布，且各片桨叶相同。

在斜流状态，旋转平面内增加了前飞相对速度的投影  $V_0 \cos \alpha_s = \mu \Omega R$ ，如图 2.2。该速度分量对于不同位置的各片桨叶的影响不同。用  $\psi$  表示桨叶所在的方位角，顺旋转方向从  $(-X_0)$  轴方向（旋翼正后方）算起 ( $\psi = 0$ )。

从图 2.2 可以看出，桨叶在  $\psi = 0^\circ \sim 90^\circ \sim 180^\circ$  的半圆内逆风旋转，称为前行桨叶；在  $\psi = 180^\circ \sim 270^\circ \sim 360^\circ$  半圆内顺风旋转，称为后行桨叶。桨叶在旋转平面内的相对气流应是旋转相对速度 ( $\Omega r$ ) 与前飞相对速度投影 ( $V_0 \cos \alpha_s$ ) 的矢量和。在方位角  $\psi$  处的桨叶上，径向位置  $r$  处的相对气流速度为：

$$\text{周向分量} = \Omega r + \mu \Omega R \sin \psi \quad (2.3)$$

$$\text{径向分量} = \mu \Omega R \cos \psi \quad (2.4)$$

其中，周向分量对于桨叶的空气动力特性具有重要意义，既然桨叶的相对气流速度随方位角作周期变化，那么它的空气动力也是周期变化的。

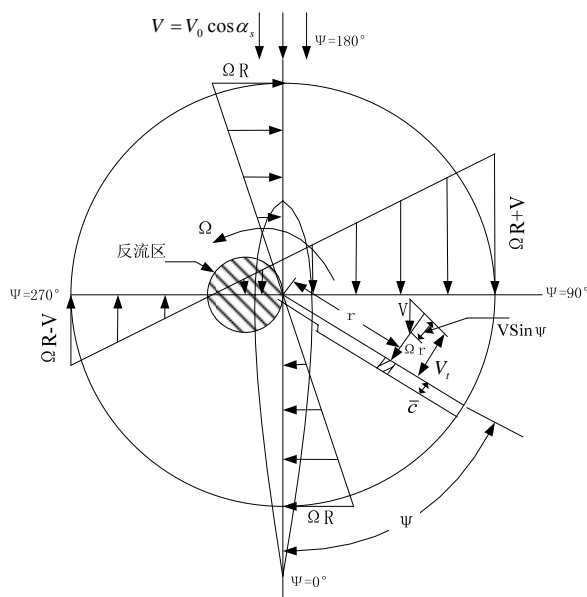


图 2.2 桨叶的相对气流

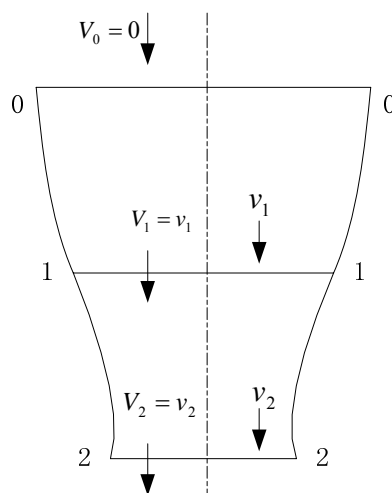


图 2.3 悬停状态下的诱导速度

通过以上分析，可以看出，由于前飞速度的影响，旋翼旋转平面上左右两边的相对气流并不对称。前行桨叶区域桨叶逆风旋转，相对气流速度比顺风旋转的后行桨叶大。而且，前飞速度越大，旋翼旋转平面上相对气流的不对称程度就越大。这种气流不对称使得桨叶上的力及其运动大为复杂，这是造成研究旋翼空气动力问题十分困难的根源所在。

### § 2.3.2 空气动力与力矩

根据旋翼和桨叶的相对气流分析结论，我们知道，当具有前飞速度时，旋翼除了受到

沿构造旋转轴的升力  $T$  和扭矩  $Q$  外, 还将受到阻力  $D$  和侧向力矩  $L$ 。这些力或力矩均与旋翼转速的平方 ( $\Omega^2$ ) 成一定比例关系<sup>[13]</sup>:

$$T = \frac{1}{2} \rho A C_T R^2 \Omega^2 \quad (2.5)$$

$$D = \frac{1}{2} \rho A C_D R^2 \Omega^2 \quad (2.6)$$

$$Q = \frac{1}{2} \rho A C_Q R^2 \Omega^2 \quad (2.7)$$

$$L = \frac{1}{2} \rho A C_R R^2 \Omega^2 \quad (2.8)$$

其中,  $C_T$ 、 $C_D$ 、 $C_Q$ 、 $C_L$  分别为旋翼的拉力系数、阻力系数、扭矩系数和侧倾力矩系数,  $\rho$  为空气密度,  $R$  为桨叶半径,  $A = \pi R^2$  为桨盘面积。

由此可见, 求解旋翼的力或力矩关键在于各项空气动力学系数的求解。空气动力学系数不仅与旋翼的相对气流有关, 还与其几何特性相关, 下面将分别利用动量理论和叶素理论对这两项因素进行分析, 以求解空气动力学系数。

### 1、诱导速度的计算

所谓诱导速度, 也就是由于某种作用在均匀流场内或静止空气中所引起的速度增量 (包括大小和方向的改变)。它可以反映出旋翼与其周围空气的相互作用, 旋翼改变空气的动量和动能, 气流对桨盘的反作用, 也正好生成了旋翼的空气动力。

为了便于分析, 我们以悬停状态为例, 计算旋翼的诱导速度。以此为基础, 可以进一步推导出垂直飞行和前飞状态下的诱导速度。

根据不可压流的质量守恒定律可知: 速度小的地方滑流截面积大, 速度大的地方截面积小<sup>[12-13]</sup>。因此, 悬停状态下, 旋翼的滑流逐渐收缩, 宛如一漏斗状, 如图 2.3。远处空气速度为 0;  $v_1$  是桨盘处的诱导速度, 它与该处空气速度  $V_1$  相等;  $v_2$  是下游很远处的诱导速度, 它与该处空气速度  $V_2$  相等。

首先, 对旋翼滑流应用定常条件下的动量定理, 有:

$$T' = \dot{m}(V_2 - V_0) \quad (2.9)$$

式中,  $T'$  为滑流所受到的外力合力,  $\dot{m}$  为单位时间内流过滑流任一截面的空气质量。这里用到了质量守恒定律:

$$\rho V_0 S_0 = \rho V_1 S_1 = \rho V_2 S_2 = \dot{m} = \text{constant} \quad (2.10)$$

气流对桨盘的反作用力, 就是旋翼的拉力  $T$

$$T = T' = \dot{m}(V_2 - V_0) = \dot{m}v_2 \quad (2.11)$$

其次, 对旋翼滑流应用定常条件下的能量守恒定律 (不计旋翼重力), 旋翼消耗的功率可由滑流的动能变化率确定。

$$P = \dot{m} \left( \frac{1}{2} V_2^2 - \frac{1}{2} V_0^2 \right) = \frac{1}{2} \dot{m} v_2^2 \quad (2.12)$$

$$P = TV_1 = TV_0 + Tv_1 \quad (2.13)$$

比较 (2.11) ~ (2.13) 三式, 可得桨盘处(桨盘面积为  $A$ )的诱导速度等于桨盘下游处诱导速度的一半

$$v_1 = \frac{1}{2}v_2 \quad (2.14)$$

据此, 旋翼的拉力可重新表示为

$$T = 2\rho Av_1^2 \quad (2.15)$$

至此, 可以获得悬停状态下的旋翼诱导速度

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{2\rho A}} \quad (2.16)$$

飞行器以某一速度  $\vec{V}_0$  飞行时, 同样可以通过动量理论和动能定理推导出旋翼的诱导速度

$$v_1 = \sqrt{-\frac{V_0^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{V_0^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{T}{2\rho A}\right)^2}} \quad (2.17)$$

## 2、叶素理论

旋翼的叶素理论是把桨叶看成由无限个桨叶微段(即叶素)组成。首先分析桨叶剖面的相对流动, 再根据叶素的几何、运动特性确定叶素上的基元力, 然后通过积分得出桨叶及旋翼的空气动力和力矩。

为了便于分析, 选取叶素坐标系  $oxyz$ , 如图 2.4。坐标原点在  $o$  在剖面变距中心;  $ox$  轴平行于  $S-S$  平面, 指向旋转方向;  $oz$  轴与桨叶变距轴线重合, 指向叶尖;  $oy$  轴通过右手法则确定。

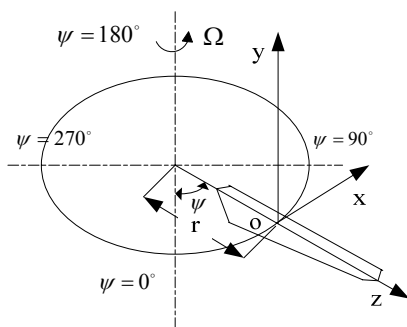


图 2.4 叶素坐标系

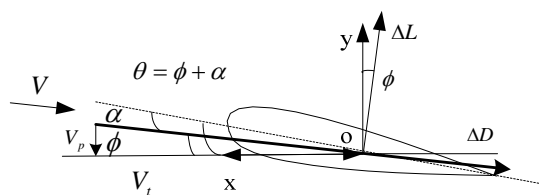


图 2.5 叶素基元力

取桨叶上径向位置为  $r$ , 宽度为  $\Delta r$ , 弦长为  $c$  的叶素, 如图 2.5。桨叶叶素的安装角  $\theta$ 、迎角  $\alpha$  和来流角  $\phi$  之间的关系为:

$$\alpha = \theta - \phi = \theta - \arctan \frac{V_p}{V_t} \approx \theta - \frac{V_p}{V_t} \quad (2.18)$$

根据 (2.2) ~ (2.3) 式, 有

$$V_p = v_1 - V_0 \sin \alpha_s = \lambda \Omega R \quad (2.19)$$